Chapitre 3.4 – Le principe de conservation de l'énergie

Le théorème de l'énergie cinétique avec énergie mécanique

Lorsque l'on désire analyser un système composé de plusieurs masses et ressorts avec une approche énergétique, on peut appliquer le théorème de l'énergie cinétique avec un terme d'énergie mécanique E qui comptabilise les énergies cinétiques des masses en mouvement, les énergies potentielles gravitationnelles des masses ainsi que les énergies potentielles des ressorts :

$$E_f = E_i + W_{\text{nc}}$$

$$\text{tel que} \quad E = K + U_g + U_r \quad \text{et} \quad W_{\text{nc}} = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

où E_f : Énergie mécanique du système finale (J)

E_i : Énergie mécanique du système initiale (J)

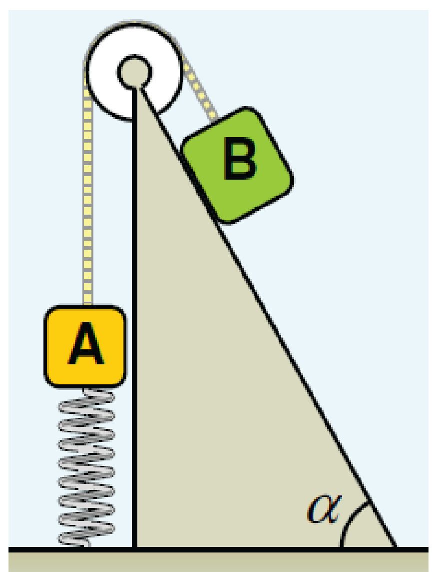
W_{nc} : Travail des forces non conservatives (autre que gravitationnelle et de ressort) (J)

K : Énergie cinétique finale du système (incluant toutes les masses) (J)

U_g : Énergie potentielle gravitationnelle totale du système (incluant toutes les masses) (J)

U_r : Énergie potentielle des ressorts totale du système (incluant tous les ressorts) (J)

Rappel : $K = \frac{1}{2}mv^2$, $U_g = mgy$ et $U_r = \frac{1}{2}ke^2$



Physique XXI - Tome A - p. 356 - © ERPI

Exemple :

Un système composé de deux blocs **A** et **B** oscille sous l'action de la déformation d'un ressort tel qu'illustré sur le schéma ci-contre. On considère que qu'il y a du frottement de contact entre le bloc **B** et le plan incliné.

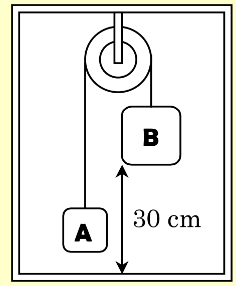
Pour appliquer le théorème de l'énergie cinétique avec énergie mécanique, nous allons devoir évaluer **11 termes d'énergie différents** tel que

$$E_f = E_i + W_{\text{nc}}$$

ce qui donne l'expression développée suivante :

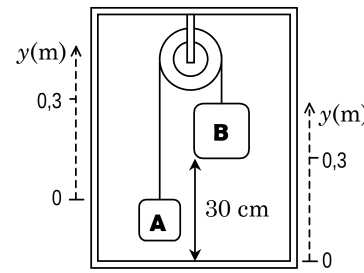
$$K_{\text{A}\,f} + K_{\text{B}\,f} + U_{\text{r}\,f} + U_{\text{gA}\,f} + U_{\text{gB}\,f} = K_{\text{A}i} + K_{\text{B}i} + U_{\text{r}i} + U_{\text{gA}i} + U_{\text{gB}i} + W_{\text{frottement}}$$

Situation 1 : *Un bloc monte, l'autre descend.* Deux blocs (m_A = 0,5 kg , m_B = 2,0 kg) sont reliés ensemble par une corde qui passe sur une poulie fixée au plafond. Les blocs sont initialement immobiles et le dessous du bloc B est à 30 cm au-dessus du plancher. On désire calculer le module de la vitesse du bloc B quand il touche le plancher. (La poulie est sans frottement; la masse de la poulie et des cordes sont négligeable.)



Voici les données de notre situation en lien avec le choix de notre système d'axe pour le bloc **A** et **B** :

Données générales			
$m_A = 0{,}5$ kg	$m_B = 2{,}0$ kg	$W_a = 0$	
Configuration initiale		**Configuration finale**	
$y_{iA} = 0$	$y_{iB} = 0{,}3$ m	$y_{fA} = 0{,}3$ m	$y_{fB} = 0$
$v_{iA} = 0$	$v_{iB} = 0$	$v_{fA} = v$	$v_{fB} = v$



Évaluons nos termes d'énergies :

- $K_i = 0$, car $v_{iA} = 0$ et $v_{iB} = 0$.
- $K_f = \frac{1}{2}m_A v_{fA}{}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{fB}{}^2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2 = \frac{1}{2}(0{,}5+2)v^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_f = 1{,}25v^2}$
- $U_{gi} = m_A g y_{iA} + m_B g y_{iB} = (0) + (2)(9{,}8)(0{,}3) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{gi} = 5{,}88 \text{ J}}$
- $U_{gf} = m_A g y_{fA} + m_B g y_{fB} = (0{,}5)(9{,}8)(0{,}3) + (0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{gf} = 1{,}47 \text{ J}}$

Évaluons la vitesse de nos deux blocs **A** et **B** par conservation de l'énergie :

$$K_f + U_{rf} + U_{gf} = K_i + U_{ri} + U_{gi} + W_a$$

$\Rightarrow \quad K_f + U_{gf} = K_i + U_{gi}$ ($U_{rf} = U_{ri} = W_a = 0$)

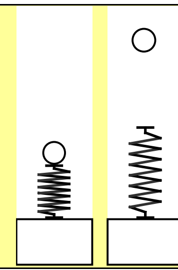
$\Rightarrow \quad (1{,}25v^2) + (1{,}47) = (0) + (5{,}88)$ (Remplacer les valeurs numériques)

$\Rightarrow \quad v^2 = 3{,}53$ (Isoler v^2)

$\Rightarrow \quad v = \pm 1{,}88$ (Calculer v)

$\Rightarrow \quad \boxed{v = 1{,}88 \text{ m/s}}$ (Choisir la vitesse positive)

Situation 2 : ***Un lance-balles à ressort.*** Un ressort idéal vertical ($k = 800\ \text{N/m}$) est fixé au sol. Sa longueur naturelle est égale à 25 cm. On le comprime de 5 cm, on place une balle de 500 g contre son extrémité supérieur (la balle n'est pas fixée au ressort) et on lâche le tout (vitesse initiale nulle). On désire déterminer la hauteur maximale atteinte par la balle par rapport au sol. (La résistance de l'air est négligeable.)



Selon le système d'axe que nous avons choisi ($y = 0$ au sol), évaluons nos données de base :

Nos données de base : ($y = L_0 + e$)

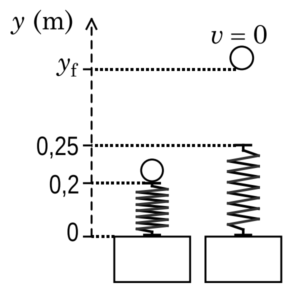
$y_i = 0{,}2\ \text{m}$ $y_f = ?$

$v_i = 0$ $v_f = 0$

$e_i = -0{,}05\ \text{m}$ $e_f = 0$

avec $m = 0{,}5\ \text{kg}$ et $k = 800\ \text{N/m}$

Système d'axe :



Évaluons nos termes d'énergie :

- $W_a = 0$
- $K_i = 0$
- $K_f = 0$
- $U_{gi} = mgy_i = (0{,}5)(9{,}8)(0{,}2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{gi} = 0{,}98\ \text{J}}$
- $U_{gf} = mgy_f = (0{,}5)(9{,}8)y_f \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{gf} = 4{,}9 y_f}$
- $U_{ri} = \dfrac{1}{2}ke_i^2 = \dfrac{1}{2}(800)(-0{,}05)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{ri} = 1\ \text{J}}$
- $U_{rf} = 0$

Appliquons la conservation de l'énergie afin d'évaluer la hauteur y_f finale :

$$K_f + U_{rf} + U_{gf} = K_i + U_{ri} + U_{gi} + W_a \qquad \text{(Conservation de l'énergie)}$$

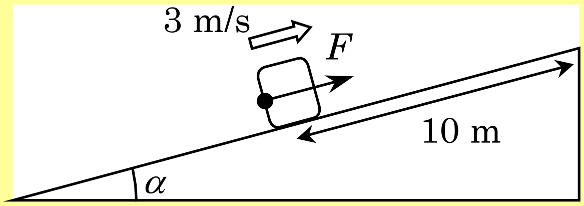
$$\Rightarrow \quad U_{gf} = U_{ri} + U_{gi} \qquad \text{(Retirer termes nuls)}$$

$$\Rightarrow \quad 4{,}9 y_f = (1) + (0{,}98) \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad 4{,}9 y_f = 1{,}98 \qquad \text{(Calcul)}$$

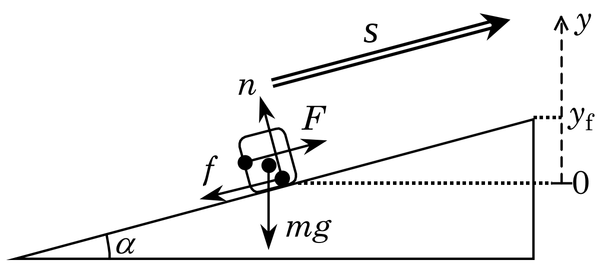
$$\Rightarrow \quad \boxed{y_f = 0{,}404\ \text{m}} \qquad \text{(Isoler } y_f\text{)}$$

Situation 6 : ***Une pente à remonter.*** Albert et Béatrice poussent sur une caisse de 100 kg afin de la hisser en haut d'un plan de 20 m de longueur incliné à $\alpha = 15°$ par rapport à l'horizontale. Il y a un coefficient de frottement cinétique de 0,3 entre le plan et la caisse.

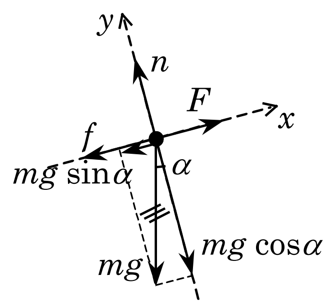


À mi-chemin, alors que la caisse se déplace à 3 m/s, Albert tombe essoufflé et Béatrice demeure seule pour pousser sur la caisse : elle maintient une force constante $F = 500\ \text{N}$ parallèle au plan. On désire déterminer le module de la vitesse de la caisse en haut de la pente.

Schéma des forces :



Décomposition des forces :



Voici les données disponibles :

$m = 100\ \text{kg}$ et $W_a = W_F + W_f$ (Normale fait un travail nul, $W_n = 0$)

$\alpha = 15°$ $F = 500\ \text{N}$

$s = 10\ \text{m}$ $f = \mu_c n$ (Frottement cinétique)

Avec la 2e loi de Newton, évaluons la force normale *n* :

$\sum F_y = ma_y$ $\Rightarrow$ $n - mg\cos(\alpha) = ma_y$ (Remplacer $\sum F_y$)

$\Rightarrow$ $n - mg\cos(\alpha) = 0$ ($a_y = 0$)

$\Rightarrow$ $n = mg\cos(\alpha)$ (Isoler *n*)

$\Rightarrow$ $n = (100)(9{,}8)\cos(15°)$ (Remplacer valeurs numérique)

$\Rightarrow$ $\boxed{n = 946{,}6\ \text{N}}$ (Évaluer *n*)

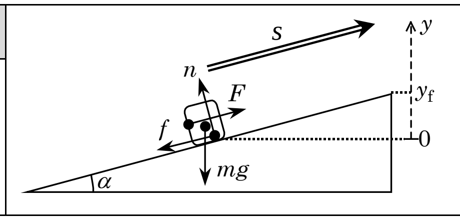
Évaluons le frottement cinétique :

$f = \mu_c n$ $\Rightarrow$ $f = (0{,}3)(946{,}6)$ (Remplacer valeurs numérique)

$\Rightarrow$ $\boxed{f = 284{,}0\ \text{N}}$ (Évaluer *f*)

Voici les mesures que nous pouvons obtenir de notre système d'axe :

Configuration initiale		Configuration finale	
$y_i = 0$	$v_i = 3\ \text{m/s}$	$y_f = s\ \sin(\alpha)$ $y_f = (10)\sin(15°)$ $y_f = 2{,}59\ \text{m}$	$v_f = ?$



Évaluons nos termes d'énergie :

- $K_i = \dfrac{mv_i^{\,2}}{2} = \dfrac{(100)(3)^2}{2}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\boxed{K_i = 450\ \text{J}}$
- $K_f = \dfrac{mv_f^{\,2}}{2} = \dfrac{(100)v_f^{\,2}}{2}$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\boxed{K_f = 50v_f^{\,2}}$
- $U_{gi} = 0$
- $U_{gf} = mgy_f = (100)(9{,}8)(2{,}59)$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\boxed{U_{gf} = 2538{,}2\ \text{J}}$

Avec la définition du travail, nous pouvons évaluer le travail de F et f : $\quad (W = F\,s\cos(\theta))$

- $W_F = Fs\cos(\theta) = (500)(10)\cos(0°)$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\boxed{W_F = 5000\ \text{J}}$
- $W_f = fs\cos(\theta) = (284)(10)\cos(180°)$ $\quad\Rightarrow\quad$ $\boxed{W_f = -2840\ \text{J}}$

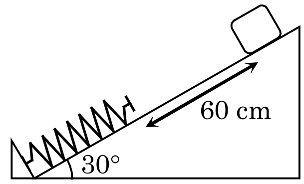
Avec la conservation de l'énergie, évaluons la vitesse finale v_f :

	$K_f + U_{rf} + U_{gf} = K_i + U_{ri} + U_{gi} + W_a$	(Conservation de l'énergie)
$\Rightarrow$	$K_f + U_{gf} = K_i + W_a$	$(U_{rf} = U_{ri} = U_{gi} = 0)$
$\Rightarrow$	$K_f + U_{gf} = K_i + (W_F + W_f)$	$(W_a = W_F + W_f)$
$\Rightarrow$	$(50v_f^{\,2}) + (2538{,}2) = (450) + (5000) + (-2840)$	(Remplacer valeurs numériques)
$\Rightarrow$	$50v_f^{\,2} = 71{,}8$	(Calcul)
$\Rightarrow$	$v_f^{\,2} = 1{,}436$	(Isoler $v_f^{\,2}$)
$\Rightarrow$	$v_f = \pm 1{,}20$	(Résoudre v_f)
$\Rightarrow$	$\boxed{v_f = 1{,}20\ \text{m/s}}$	(Choisir la vitesse positive)

Exercices

3.4.10 ***La tête en bas, prise 2.*** Dans le montage de l'exercice **3.4.9**, quelle doit être la valeur minimale de H pour que le chariot demeure en contact avec la piste au point **C** ?

3.4.15 ***Un ressort pour freiner la descente.*** Sur un plan sans frottement incliné à 30° par rapport à l'horizontale, un bloc de 2 kg initialement immobile glisse sur une distance de 60 cm avant de rencontrer un ressort idéal. On observe que la compression maximale du ressort est égale à 20 cm. Que vaut sa constante de rappel?



3.4.16 ***Un ressort pour freiner la descente, prise 2.*** À l'exercice **3.4.15**, quelle serait la compression maximale du ressort en présence d'un coefficient de frottement cinétique de 0,4 entre le bloc et le plan? (Utilisez la même constante de ressort que celle trouvée dans l'exercice **3.4.15**.)

Solutions

3.4.10 ***La tête en bas, prise 2.***

En construction …

3.4.12 ***Un ressort pour freiner la descente.***

Système d'axe : Prenons l'axe *y* verticale vers le haut avec *y* = 0 à la position initiale du bloc (en haut).

Moment initial : Bloc en haut du plan.
Moment final : Bloc en bas du plan comprimant le ressort.

<u>Avec la conservation de l'énergie :</u>

$$E_f = E_i + W_{nc} \quad \Rightarrow \quad K_f + U_{gf} + U_{rf} = K_i + U_{gi} + U_{ri} + W_{nc}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_f^{\,2} + mgy_f + \frac{1}{2}ke_f^{\,2} = \frac{1}{2}mv_i^{\,2} + mgy_i + \frac{1}{2}ke_i^{\,2} + W_{nc}$$

$$\Rightarrow \quad mgy_f + \frac{1}{2}ke_f^{\,2} = 0 \qquad \left(y_i = 0,\ e_i = 0,\ v_i = 0,\ v_f = 0,\ W_{nc} = 0 \right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}ke_f^{\,2} = -mgy_f$$

$$\Rightarrow \quad k = -\frac{2mgy_f}{e_f^{\,2}}$$

<u>Avec :</u> $y_f = -(0{,}6 + 0{,}2)\sin(30°) = -0{,}4\ \text{m}$

et $e_f = 0{,}2\ \text{m}$

<u>Alors :</u> $k = -\dfrac{2mgy_f}{e_f^{\,2}} = -\dfrac{2(2)(9{,}8)(-0{,}4)}{(0{,}2)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = 392\ \text{N/m}}$

3.4.13 ***Un ressort pour freiner la descente, prise 2.***

En construction …