Chapitre 3.3 – L'énergie potentielle gravitationnelle

Le travail fait par une force gravitationnelle constante

Le travail W_g effectué par une force gravitationnelle constante dépend du déplacement vertical d'un objet. On peut exprimer le déplacement à partir d'une une hauteur initiale y_i et d'une hauteur final y_f :

$$W_g = mgy_i - mgy_f$$

où W_g : Travail effectué par la force gravitationnelle (J).

m : Masse de l'objet qui subit le travail de la gravité (kg).

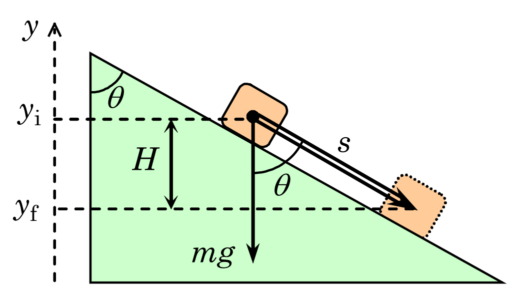
g : Champ gravitationnelle (N/kg).

y_i : Hauteur initiale de l'objet (m).

y_f : Hauteur finale de l'objet (m).

Preuve :

Considérons un bloc qui effectue un déplacement s le long d'un plan incliné sous la présence d'une force gravitationnelle mg constante. Évaluons l'expression du travail W_g effectué par la gravité sur le bloc en considérant que le travail calculé sera positif, car le déplacement sera vers le bas du plan incliné du plan et que la force gravitationnelle est orienté vers le bas (travail positif lorsque le déplacement et la force sont dans le même sens) :



$W_g = F\, s\cos(\theta)$ $\Rightarrow$ $W_g = F\ H$ (Remplacer $H = s\cos(\theta)$)

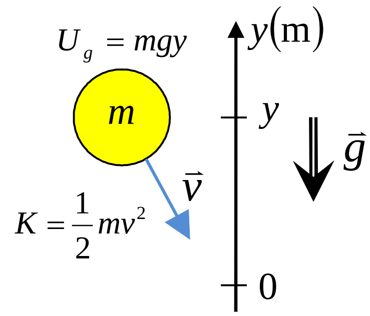
$\Rightarrow$ $W_g = F\left(y_i - y_f\right)$ (Remplacer $H = y_i - y_f$, car $W_g > 0$)

$\Rightarrow$ $W_g = mg\left(y_i - y_f\right)$ (Remplacer $F = mg$)

$\Rightarrow$ $W_g = mgy_i - mgy_f$ ■ (Distribution de mg)

Théorème de l'énergie cinétique avec énergie potentielle gravitationnelle

À partir du travail de la force gravitationnelle W_g, nous pouvons modifier le **théorème** de **l'énergie cinétique** en y incluant un terme d'énergie potentielle U_g associé à la hauteur d'un objet <u>par rapport</u> à un point de référence y = 0. Ce nouveau terme correspond à une énergie emmagasinée dans « la gravité ». Elle est libérée lorsque l'objet réduit sa hauteur :



$$K_f + U_{g\,f} = K_i + U_{g\,i} + W_{\text{autre}} \quad \text{tel que} \quad U_g = mgy$$

où K_i et K_f : Énergie cinétique initiale et finale de l'objet (J).

$U_{g\,i}$ et $U_{g\,f}$: Énergie potentielle gravitationnelle initiale et finale (J).

m : Masse de l'objet qui subit le travail de la gravité (kg).

g : Champ gravitationnelle (N/kg).

y : Position verticale de l'objet selon l'axe y où l'axe est positif vers le haut (m).

W_{autre} : Travail total effectué sur l'objet par les autres forces (J).

<u>Remarque :</u>

1) L'expression $U_g = mgy$ est valide seulement si **l'axe *y*** est dans le **sens contraire** de la **force gravitationnelle**. Ex : Axe y vers le haut, champ gravitationnel vers le bas.
2) L'énergie potentielle gravitationnelle **dépend** du **système d'axe** (où est situé $y = 0$).
3) La **physique** de la gravité se manifeste uniquement lorsqu'il y a une **variation** de l'énergie potentielle gravitationnelle.

<u>Preuve :</u>

À partir du théorème de l'énergie cinétique, séparons le travail effectué par la gravité et le travail effectué par les autres forces afin d'y inclure un terme d'énergie potentielle gravitationnelle :

$$K_f = K_i + W_{\text{tot}}$$

$\Rightarrow \quad K_f = K_i + W_g + W_{\text{autre}}$ (Séparer les travaux)

$\Rightarrow \quad K_f = K_i + (mgy_i - mgy_f) + W_{\text{autre}}$ (Remplacer $W_g = mgy_i - mgy_f$)

$\Rightarrow \quad K_f + mgy_f = K_i + mgy_i + W_{\text{autre}}$ (Isoler termes finaux et initiaux ensemble)

$\Rightarrow \quad K_f + U_{g\,f} = K_i + U_{g\,i} + W_{\text{autre}} \;\blacksquare$ (Remplacer $U_g = mgy$)

Le travail de la force gravitationnelle conservative

La force gravitationnelle est une force conservative, car elle établit le lien suivant entre le travail W_g qu'elle effectue et la variation d'une énergie potentielle ΔU_g :

$$W_g = -\Delta U_g$$

où W_g : Travail effectué par la force gravitationnelle (J).

ΔU_g : Variation de l'énergie potentielle gravitationnelle (J). ($\Delta U_g = U_{g\,f} - U_{g\,i}$)

<u>Preuve :</u>

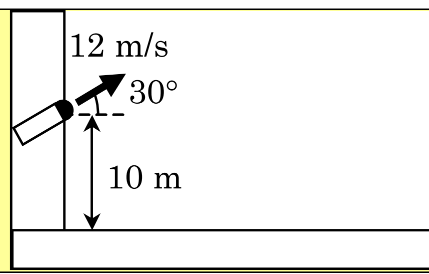
À partir du calcul du travail W_r du ressort et de la définition de l'énergie potentielle du ressort, établissons un lien entre le travail et la variation de l'énergie potentielle :

$W_g = mgy_i - mgy_f \quad \Rightarrow \quad W_g = U_{g\,i} - U_{g\,f}$ (Remplacer $U_g = mgy$)

$\Rightarrow \quad W_g = -\left(U_{g\,f} - U_{g\,i}\right)$ (Factoriser signe négatif)

$\Rightarrow \quad W_g = -\Delta U_g \quad$ ■

Situation 4 : ***Un angle sans importance***. Un lance-balles dont l'embouchure est située à 10 m au-dessus du sol projette une balle avec une vitesse de 12 m/s orientée à 30° vers le haut par rapport à l'horizontale. On désire déterminer le module de la vitesse de la balle lorsqu'elle frappe le sol. On néglige la résistance de l'air.

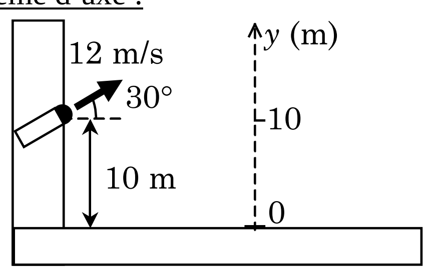


Selon le système d'axe que nous avons choisi ($y = 0$ au sol), évaluons nos données de base :

<u>Nos données de base :</u>

- $y_i = 10$ m
- $v_i = 12$ m/s
- $y_f = 0$
- $v_f = ?$

<u>Système d'axe :</u>



Énergie cinétique K et énergie potentielle U :

- $K_i = \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m (12)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_i = 72m}$
- $U_{gi} = mgy_i = m(9{,}8)(10) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{gi} = 98m}$
- $K_f = \frac{1}{2} m v_f^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_f = \frac{1}{2} m v_f^2}$
- $U_{gf} = mgy_f = m(9{,}8)(0) \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{gf} = 0 \text{ J}}$

Avec la conservation de l'énergie : $(W_{autre} = 0 \text{ J})$

$$K_f + U_{gf} = K_i + U_{gi} + W_{autre} \quad \Rightarrow \quad K_f = K_i + U_{gi} - U_{gf} \qquad \text{(Isoler } K_f\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m v_f^2 = 72m + 98m - (0) \qquad \text{(Remplacer les expressions)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} v_f^2 = 72 + 98 - (0) \qquad \text{(Diviser par } m\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_f^2 = 340 \qquad \text{(Isoler } v_f^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_f = \pm 18{,}4 \text{ m/s} \qquad \text{(Évaluer la vitesse)}$$

Nous allons prendre la **vitesse positive**, car nous voulons évaluer le **module** de la vitesse :

$$\boxed{v_f = 18{,}4 \text{ m/s}}$$

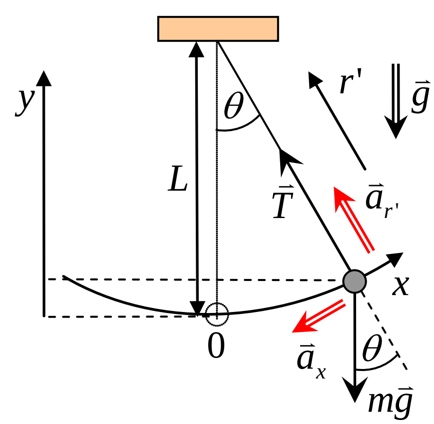
Remarque : Cette vitesse n'est pas décomposée en x ni en y. C'est le **module** de la **vitesse** qui a été évalué.

La géométrie du pendule

Le pendule est un problème de physique ayant une géométrie particulière, car la masse du pendule effectue une trajectoire circulaire avec une accélération non constante. Puisque la gravité est responsable du changement du module de la vitesse, on peut évaluer la hauteur du pendule

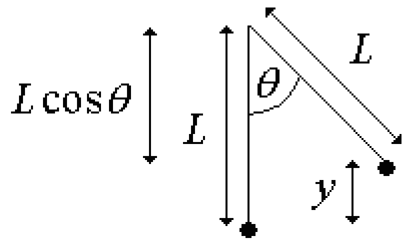
$$y = L(1 - \cos\theta)$$

tel que $x = y = 0$ lorsque $\theta = 0$ (le point le plus bas du pendule) pour évaluer l'énergie potentielle gravitationnelle $U_g = mgy$ dans le théorème de l'énergie cinétique.



Preuve :

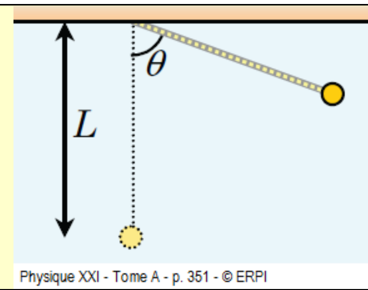
Évaluer l'expression de la hauteur y d'un pendule en considérant $y = 0$ comme étant le point le plus bas correspondant à $\theta = 0$:



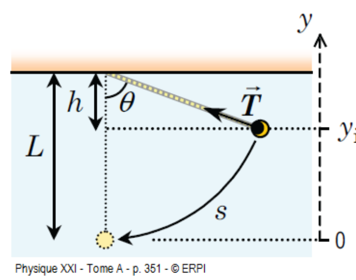
$$y = L - L\cos(\theta)$$

$$\Rightarrow \quad y = L(1-\cos(\theta)) \quad \blacksquare$$

Situation 5 (Chapitre 3.4) : *Un pendule*. Une balle dont la masse est de 0,2 kg est accrochée au bout d'une corde dont la longueur L est de 40 cm. On accroche la corde au plafond et on lâche la balle (vitesse initiale nulle) alors que la corde tendue fait un angle $\theta = 70^{\circ}$ avec la verticale (schéma ci-contre). On désire déterminer les modules (a) de la vitesse de la balle lorsque la corde passe à la verticale et (b) de la tension à cet instant.



Évaluons la hauteur initiale de la balle par rapport à son point le plus bas étant lorsque la corde sera à la verticale afin d'utiliser la relation $y = L(1-\cos(\theta))$:



$$y_i = L(1-\cos(\theta_i)) \quad \Rightarrow \quad y_i = (0{,}40)(1-\cos(70°))$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_i = 0{,}2632 \text{ m}}$$

Évaluons le module de la vitesse finale de la balle à l'aide du théorème de l'énergie cinétique :

$$K_f + U_{g\,f} = K_i + U_{g\,i} + W_a \qquad \text{(Théorème de l'énergie cinétique)}$$

$$\Rightarrow \quad K_f + U_{g\,f} = K_i + U_{g\,i} + (0) \qquad (W_a = W_T = 0 \text{, car } \vec{T} \perp \vec{s})$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}mv_f^{\,2}\right) + (mgy_f) = \left(\frac{1}{2}mv_i^{\,2}\right) + (mgy_i) \qquad (K = \frac{1}{2}mv^2, U_g = mgy)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}v_f^{\,2} = gy_i \qquad \text{(Simplifier } m,\ v_i = 0,\ y_f = 0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}v_f^{\,2} = (9{,}8)(0{,}2632) \qquad \text{(Remplacer valeurs numériques)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_f = 2{,}271 \text{ m/s}} \qquad \text{(Évaluer } v_f\text{)}$$

Évaluons la tension dans la corde à l'aide de la 2^e^ loi de Newton et de l'accélération centripète étant donné que la balle du pendule se déplace sur une trajectoire circulaire :

$$\sum F_{r'} = ma_{r'} \qquad \text{(2}^{\text{e}}\text{ loi de Newton)}$$

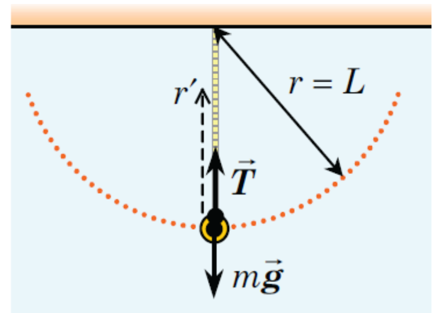
$$\Rightarrow \quad T - mg = ma_{\mathrm{C}} \qquad \text{(Remplacer)}$$

$$\Rightarrow \quad T = m\left(a_{\mathrm{C}} + g\right) \qquad \text{(Isoler T)}$$

$$\Rightarrow \quad T = m\left(\frac{v^2}{r} + g\right) \qquad (a_{\mathrm{C}} = v^2 / r)$$

$$\Rightarrow \quad T = (0,2)\left(\frac{(2,271)^2}{(0,40)} + (9,8)\right) \qquad \text{(Remplacer val. num.)}$$

$$\Rightarrow \quad T = 4,539 \ \mathrm{N} \qquad \text{(Évaluer } T\text{)}$$



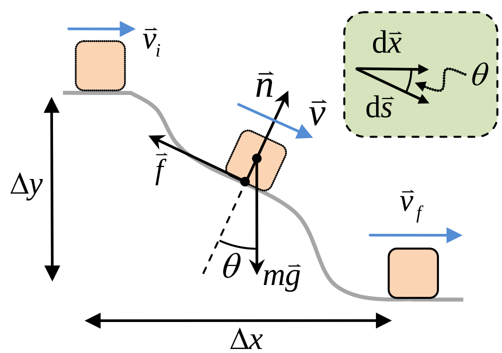
Physique XXI - Tome A - p. 352 - © ERPI

Le travail du frottement cinétique lors d'un glissement le long d'une pente à inclinaison non constante

Lorsqu'un bloc glisse le long d'une pente dont l'inclinaison θ n'est pas constante, la force de frottement cinétique $\vec{f}_{\mathrm{c}}$ varie en raison d'une force normale $n = mg\cos(\theta)$ qui dépend de l'inclinaison de la pente. Cependant, le travail W_f évalué le long de la pente peut être évalué grâce à l'équation :

$$W_f = -\mu_{\mathrm{c}} mg\Delta x$$

Où
- W_f : Travail du frottement cinétique (J).
- μ_{c} : Coefficient de frottement cinétique.
- m : Masse de l'objet qui glisse (kg).
- g : Accélération gravitationnelle, 9,8 m/s^2.
- x : Déplacement horizontal le long de la pente (m).



<u>Preuve :</u>

Effectuons le calcul du travail de la force de frottement en considérant que la force normale n'est pas constante tout au long des déplacements $d\vec{s}$:

$$W_f = \int \vec{f}_{\mathrm{c}} \cdot d\vec{s} \quad \Rightarrow \quad W_f = \int \left(-\mu_{\mathrm{c}} n\,\hat{s}\right)\cdot d\vec{s} \qquad \text{(Frottement cinétique } f_{\mathrm{c}} = -\mu_{\mathrm{c}} n\,\hat{s}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad W_f = -\mu_{\mathrm{c}} \int mg\cos(\theta)\,ds \qquad (ds = \hat{s}\cdot d\vec{s} \text{ et } n = mg\cos(\theta))$$

$$\Rightarrow \quad W_f = -\mu_{\mathrm{c}} mg \int dx \qquad (dx = ds\cos(\theta))$$

$$\Rightarrow \quad W_f = -\mu_{\mathrm{c}} mg\Delta x \quad \blacksquare \qquad (\textstyle\int dx = x)$$

Exercice

3.4.12 ***L'angle maximal d'un pendule.*** Avec une balle de 0,4 kg et une corde de 0,5 m, on crée un pendule que l'on accroche au plafond. On fait osciller le pendule et on observe que le module de la vitesse de la balle est égal à 1,5 m/s au point le plus bas de sa trajectoire. Aux deux extrémités de l'oscillation, quel est l'angle que fait la corde avec la verticale?

Solution

3.4.6 ***L'angle maximal d'un pendule.***

Système d'axe : Prenons l'axe y vertical vers le haut avec $y = 0$ à la position où la balle est le plus bas dans sa trajectoire circulaire.

Moment initial : Balle dans la trajectoire où sa position est la plus basse.
Moment final : Balle dans la trajectoire où sa position est la plus haute.

Avec la conservation de l'énergie :

$$E_f = E_i + W_{nc} \quad \Rightarrow \quad K_f + U_f = K_i + U_i + W_{nc}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_f^{\ 2} + mgy_f = \frac{1}{2}mv_i^{\ 2} + mgy_i + W_{nc}$$

$$\Rightarrow \quad mgy_f = \frac{1}{2}mv_i^{\ 2} \qquad (v_f = 0,\ \ y_i = 0,\ \ W_{nc} = 0)$$

$$\Rightarrow \quad y_f = \frac{1}{2}\frac{v_i^{\ 2}}{g}$$

$$\Rightarrow \quad y_f = \frac{1}{2}\frac{(1,5)^2}{(9,8)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_f = 0,115\ \text{ m}}$$

Puisque la corde possède une longueur de 0,5 m, nous pouvons évaluer l'angle de la corde par rapport à la verticale à l'aide de la position $y_f = 0,115\ \text{ m}$:

$$y_f = L(1-\cos(\theta_f)) \quad \Rightarrow \quad 1-\cos(\theta_f) = \frac{y_f}{L}$$

$$\Rightarrow \quad \cos(\theta_f) = 1 - \frac{y_f}{L}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta_f = 39,65°}$$