Chapitre 3.2 – L'énergie potentielle élastique d'un ressort idéal

Le travail fait par un ressort

Le travail W_r effectué par un ressort idéal dépend de l'évolution de la déformation e de celui-ci entre un état initial e_i et un état final e_f. Il est proportionnel à la variation du carré de la déformation tel que :

$$W_r = \frac{1}{2}ke_i^{\,2} - \frac{1}{2}ke_f^{\,2}$$

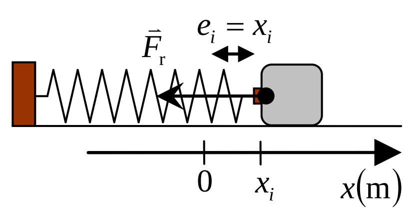
où W_r : Travail effectué par la force du ressort (J).
k : Constante du ressort (N/m).
e_i : Déformation initiale du ressort (m).
e_f : Déformation finale du ressort (m).

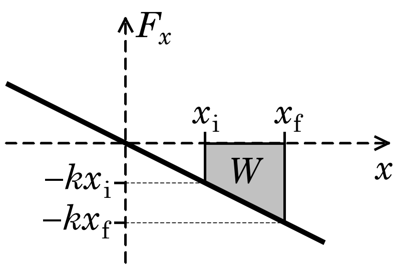
Preuve :

Rappelons l'expression de la force d'un ressort F_x en fonction de son étirement x :

$$F_x = -kx$$

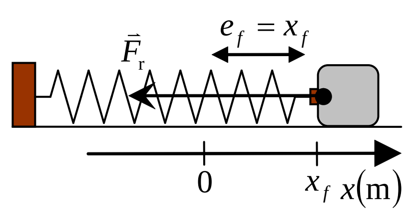
Rappel : $\vec{F}_r = -k\vec{e}$





Aire d'un trapèze :

$$A = \frac{(h+H)}{2}L$$



Évaluons le travail effectué par le ressort qui correspond à l'aire sous la courbe du graphique de force en fonction du déplacement ayant la forme d'un trapèze :

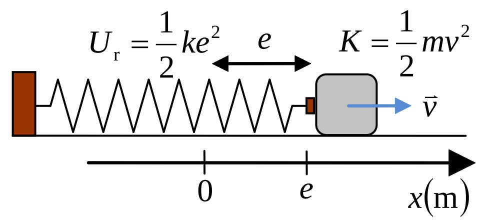
$W_r = \text{aire sous la courbe}$ $\Rightarrow$ $W_r = \frac{(-kx_i - kx_f)}{2}(x_f - x_i)$ (Aire du trapèze)

$\Rightarrow$ $W_r = -\frac{k}{2}(x_i + x_f)(x_f - x_i)$ (Factoriser $-k/2$)

$\Rightarrow$ $W_r = -\frac{k}{2}(x_i x_f - x_i^{\,2} + x_f^{\,2} - x_i x_f)$ (Effectuer le produit)

$\Rightarrow$ $W_r = \frac{1}{2}kx_i^{\,2} - \frac{1}{2}kx_f^{\,2}$ ■ (Simplification)

Théorème de l'énergie cinétique avec énergie potentielle du ressort



À partir du travail de la force d'un ressort idéal W_r, nous pouvons modifier le **théorème** de **l'énergie cinétique** en y incluant un terme d'énergie potentielle U_r associé à la déformation e du ressort. Ce nouveau terme correspond à une énergie emmagasinée dans la déformation du ressort. Elle est libérée lorsque le ressort reprend sa forme naturelle :

$$K_f + U_{rf} = K_i + U_{ri} + W_{\text{autre}} \quad \text{tel que} \quad U_r = \frac{1}{2}ke^2$$

où K_i et K_f : Énergie cinétique initiale et finale de l'objet (J).

U_{ri} et U_{rf} : Énergie potentielle du ressort initiale et finale (J).

k : Constante du ressort (N/m).

e : Déformation du ressort (m).

W_{autre} : Travail total effectué sur l'objet par les autres forces (J).

<u>Preuve :</u>

À partir du théorème de l'énergie cinétique, séparons le travail effectué par le ressort et le travail effectué par les autres forces afin d'y inclure un terme d'énergie potentielle du ressort :

$$K_f = K_i + W_{\text{tot}}$$

$$\Rightarrow \quad K_f = K_i + W_r + W_{\text{autre}}$$

$$\Rightarrow \quad K_f = K_i + \left(\frac{1}{2}ke_i^2 - \frac{1}{2}ke_f^2\right) + W_{\text{autre}} \qquad \text{(Remplacer } W_r = \frac{1}{2}ke_i^2 - \frac{1}{2}ke_f^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad K_f + \frac{1}{2}ke_f^2 = K_i + \frac{1}{2}ke_i^2 + W_{\text{autre}} \qquad \text{(Isoler termes finaux et initiaux ensemble)}$$

$$\Rightarrow \quad K_f + U_{rf} = K_i + U_{ri} + W_{\text{autre}} \;\blacksquare \qquad \text{(Remplacer } U_r = \frac{1}{2}ke^2\text{)}$$

Le travail de la force conservative du ressort

La force du ressort est une force conservative, car elle établie le lien suivant entre le travail W_r qu'elle effectue et la variation d'une énergie potentielle ΔU_r :

$$W_r = -\Delta U_r$$

où W_r : Travail effectué par la force du ressort (J).

ΔU_r : Variation de l'énergie potentielle du ressort (J). $\quad (\Delta U_r = U_{rf} - U_{ri})$

Preuve :

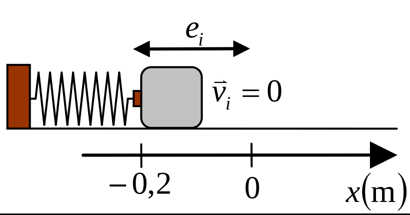
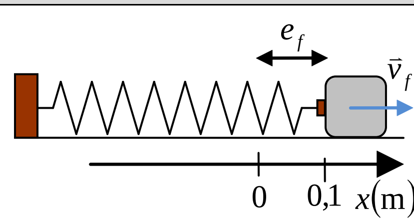
À partir du calcul du travail W_r du ressort et de la définition de l'énergie potentielle du ressort, établissons un lien entre le travail et la variation de l'énergie potentielle :

$$W_r = \frac{1}{2}ke_i^{\,2} - \frac{1}{2}ke_f^{\,2} \quad \Rightarrow \quad W_r = U_{ri} - U_{rf} \qquad \text{(Remplacer } U_r = \frac{1}{2}ke^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad W_r = -\left(U_{rf} - U_{ri}\right) \qquad \text{(Factoriser signe négatif)}$$

$$\Rightarrow \quad W_r = -\Delta U_r \quad \blacksquare$$

Situation 2 : *Bloc et ressort.* On suppose un bloc de 0,3 kg et que sa vitesse initiale est nulle lorsque le ressort est comprimé de 20 cm (le bloc est attaché au ressort). On désire déterminer le module de la vitesse du bloc lorsque le ressort est étiré de 10 cm. La constante de rappel du ressort est de 40 N/m.

Situation initiale	Situation finale
	
Mesures : $v_i = 0$ et $e_i = -0{,}2$ m	Mesures : $v_f = ?$ et $e_f = 0{,}1$ m

Évaluons nos termes d'énergies :

- $K_i = 0$
- $U_{ri} = \frac{1}{2}ke_i^{\,2} = \frac{1}{2}(40)(-0{,}2)^2 = 0{,}8$ J
- $W_{\text{autre}} = 0$
- $K_f = ?$
- $U_{rf} = \frac{1}{2}ke_f^{\,2} = \frac{1}{2}(40)(0{,}1)^2 = 0{,}2$ J

Avec le théorème de l'énergie cinétique, évaluons la vitesse finale :

$$K_f + U_{rf} = K_i + U_{ri} + W_{\text{autre}} \quad \Rightarrow \quad K_f + (0{,}2) = (0) + (0{,}8) \qquad \text{(Remplacer val. num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K_f = 0{,}6 \text{ J}} \qquad \text{(Évaluer } K_f\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_f^{\,2} = 0{,}6 \qquad \text{(} K_f = \frac{1}{2}mv_f^{\,2}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_f = \sqrt{\frac{2 \times 0{,}6}{m}} = \sqrt{\frac{2(0{,}6)}{0{,}3}} = \sqrt{4} \qquad \text{(Isoler } v_f\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_f = \pm 2 \text{ m/s}} \qquad \text{(Évaluer } v_f\text{)}$$

Remarque : La vitesse calculée n'est pas vectorielle. Il y a deux possibilités de direction.