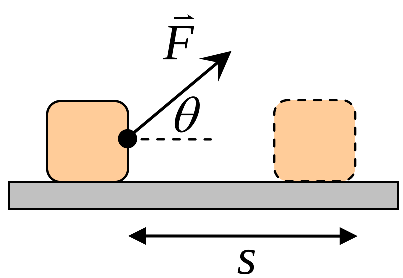
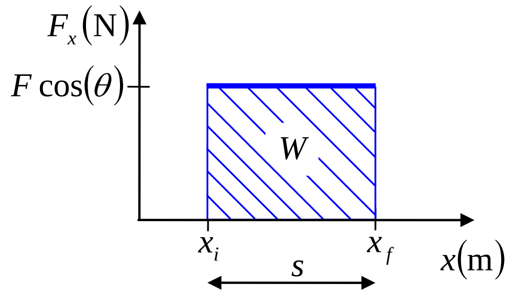
# Chapitre 3.1b – Le travail d'une force non-constante

## Travail et aire sous la courbe

Le travail $W$ est le résultat du produit d'une force $F$ avec un déplacement $s$. Puisque la force peut ne pas être constante tout au long du déplacement, elle doit se doit d'être une fonction de la position ($F = F(x)$). Ainsi, le **travail** correspond à **l'aire sous la courbe** de la **force** en **fonction** de la **position**.

| **Situation**<br>Force $\vec{F}$ constante sur le déplacement $\vec{s}$ . | **Graphique** |
|---|---|
|  |  |

<u>Travail d'une force constante :</u>

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F\, s \cos(\theta)$$

où $W$ : Le travail effectué par la force $\vec{F}$ (J)

$F$ : Module de la force qui effectue le travail (N)

$s$ : Déplacement sur laquelle la force est appliquée (m) ($s = x_f - x_i$)

$\theta$ : Angle entre l'orientation de la force et le déplacement ($F_x = F\cos(\theta)$)

Lorsque la force n'est pas constante, l'équation précédente n'est plus valide et le calcul de l'aire sous la courbe devient nécessaire. Pour ce faire, il suffit de couper la surface $W$ en petits rectangles de travail $\mathrm{d}W$ et additionner le tout à l'aide d'une intégrale. Le travail infinitésimal $\mathrm{d}W$ correspond au travail de la force $\vec{F}$ effectué sur un déplacement infinitésimal $\mathrm{d}\vec{s}$.

<u>Équation de base</u> :

$$W = \int \mathrm{d}W$$

<u>Équation vectorielle :</u>

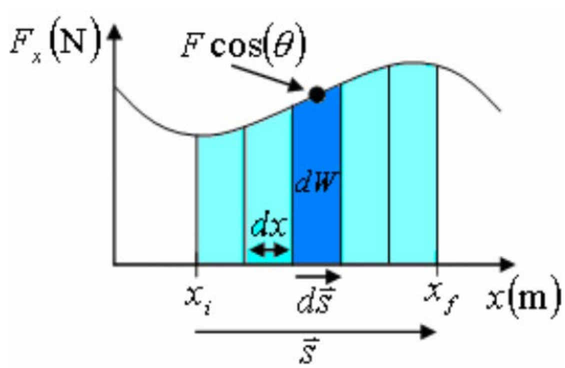
($\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$)

$$W = \int \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

<u>Équation selon l'axe $x$ :</u>

($\mathrm{d}W = F_x\, \mathrm{d}x$)

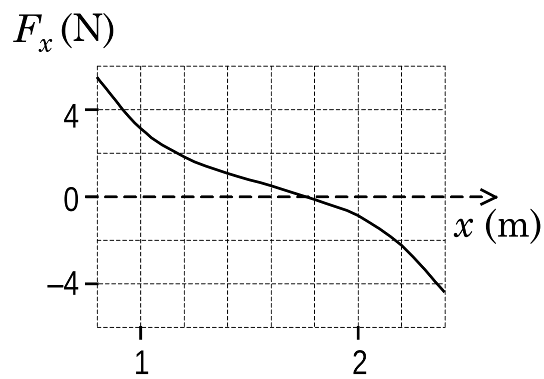
$$W = \int_{x=x_i}^{x_f} F_x\, \mathrm{d}x$$



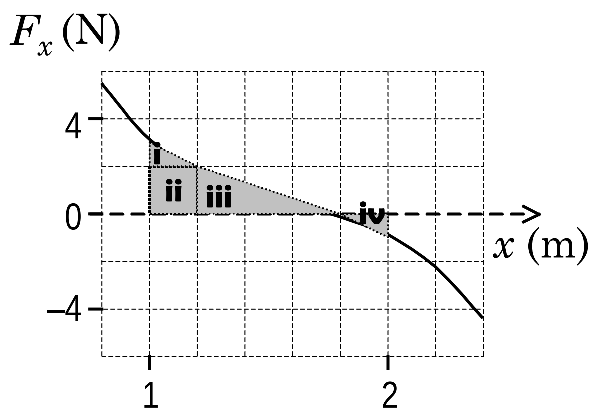
**Situation 1 :** ***Le signe du travail.*** Une particule peut se déplacer sur une surface horizontale sans frottement orientée le long d'un axe $x$. Elle est soumise à une force horizontale qui varie en fonction de la position selon ce qui est indiqué sur le graphique ci-contre. On désire déterminer le travail effectué par la force sur la particule lorsqu'elle se déplace :

**(a)** de $x_i = 1\ \text{m}$ à $x_f = 2\ \text{m}$ ;

**(b)** de $x_i = 2\ \text{m}$ à $x_f = 1\ \text{m}$ .




Aire sous la courbe à évaluer :




<u>Aire d'un carreau :</u> $2\ \text{N} \times 0{,}2\ \text{m} = 0{,}4\ \text{J}$

Aire **i** : ¼ de carreau = 0,1 J $\Rightarrow$ $\boxed{W_i = 0{,}1\ \text{J}}$

Aire **ii** : 1 carreau = 0,4 J $\Rightarrow$ $\boxed{W_{ii} = 0{,}4\ \text{J}}$

Aire **iii** : ½ de 3 carreaux = 0,6 J $\Rightarrow$ $\boxed{W_{iii} = 0{,}6\ \text{J}}$

Aire **iv** : ¼ carreau = 0,1 J $\Rightarrow$ $\boxed{W_{iv} = -0{,}1\ \text{J}}$ (Aire sous la courbe négative)

**(a)** Travail de $x_i = 1\ \text{m}$ à $x_f = 2\ \text{m}$

$$W_{1\to2} = \sum W = W_i + W_{ii} + W_{iii} + W_{iv} = (0{,}1) + (0{,}4) + (0{,}6) + (-0{,}1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{1\to2} = 1\ \text{J}}$$

**(b)** Travail de $x_i = 2\ \text{m}$ à $x_f = 1\ \text{m}$

$$W_{2\to1} = -\sum W = -(W_i + W_{ii} + W_{iii} + W_{iv}) = -(0{,}1) - (0{,}4) - (0{,}6) - (-0{,}1) \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{2\to1} = -1\ \text{J}}$$

## Le théorème de l'énergie cinétique par l'intégrale

À l'aide du calcul différentiel, nous pouvons définir le théorème de l'énergie cinétique de la façon suivante lorsqu'une force $F$ est appliquée sur un déplacement le long de l'axe $x$ selon un angle $\theta$ par rapport à l'axe $x$ :

$$W = \Delta K$$

où $W$ : Travail effectué sur l'objet par la force $F$ (J).

$\Delta K$ : Variation de l'énergie cinétique de l'objet (J).

Preuve :

Appliquons le calcul du travail effectué par une force $\vec{F}$ long de l'axe $x$ entre la position $x_i$ et $x_f$ à partir de la 2$^{\text{ième}}$ loi de Newton :

$$\sum F = ma$$

$\Rightarrow \quad F\cos(\theta) = ma\cos(\theta)$ (Multiplier par $\cos(\theta)$, $\theta$ : Angle entre $\vec{F}$ et l'axe $x$)

$\Rightarrow \quad F\cos(\theta) = ma_x$ (Projection sur l'axe $x$, $a_x = a\cos(\theta)$)

$\Rightarrow \quad F\cos(\theta) = m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}$ (Reformulation de l'accélération, $a_x = \mathrm{d}v_x / \mathrm{d}t$ )

$\Rightarrow \quad F\cos(\theta) = m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}$ (Multiplie par 1, $1 = \mathrm{d}x / \mathrm{d}x$)

$\Rightarrow \quad F\cos(\theta) = m\dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}v_x$ (Remplace $v_x = \mathrm{d}x / \mathrm{d}t$ )

$\Rightarrow \quad F\cos(\theta)\mathrm{d}x = m v_x \mathrm{d}v_x$ (Multiplier par $dx$)

$\Rightarrow \quad \displaystyle\int_{x=x_i}^{x_f} F\cos(\theta)\mathrm{d}x = \int_{v=v_{xi}}^{v_{xf}} m v_x \mathrm{d}v_x$ (Intégrale avec borne : $x_i$ à $x_f$ et $v_{xi}$ à $v_{xf}$ )

$\Rightarrow \quad W = \displaystyle\int_{v=v_{xi}}^{v_{xf}} m v_x \mathrm{d}v_x$ (Remplacer $W = \displaystyle\int_{x=x_i}^{x_f} F\cos(\theta)\mathrm{d}x$ )

$\Rightarrow \quad W = m\displaystyle\int_{v=v_{xi}}^{v_{xf}} v_x \,\mathrm{d}v_x$ (Factoriser la constante $m$ l'intégrale)

$\Rightarrow \quad W = m\left[\dfrac{{v_x}^2}{2}\right]_{v_{xi}}^{v_{xf}}$ (Résoudre l'intégrale : $\displaystyle\int x^n \mathrm{d}x = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ )

$\Rightarrow \quad W = \dfrac{1}{2}m{v_{xf}}^2 - \dfrac{1}{2}m{v_{xi}}^2$ (Évaluer l'intégrale)

$\Rightarrow \quad W = \Delta K \quad \blacksquare$ (Remplacer $K = \dfrac{1}{2}mv^2$ et $\Delta K = K_f - K_i$ )

**Situation A :** ***Le freinage de la locomotive*****.** Une locomotive de 40 tonnes (1 tonne = 1000 kg) roulant à 15 m/s (54 km/h) doit s'immobiliser à une gare. La locomotive est munie de deux systèmes de freinage : l'un efficace à faible vitesse et l'autre efficace à grande vitesse. Mathématiquement, la force du freinage est exprimée de la façon suivante en newtons en fonction de la position en mètres : $F_x = -200x - 5x^3$. On désire évaluer la distance de freinage de la locomotive.

Évaluons la variation de l'énergie cinétique de la locomotive :

$$\Delta K = K_f - K_i \quad \Rightarrow \quad \Delta K = \left(\frac{1}{2}mv_f^{\,2}\right) - \left(\frac{1}{2}mv_i^{\,2}\right) \qquad \text{(Remplacer } K = \frac{1}{2}mv^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta K = -\frac{1}{2}mv_i^{\,2} \qquad \text{(Remplacer } v_f = 0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta K = -\frac{1}{2}\left(40\times 10^3\right)\left(15\right)^2 \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta K = -4{,}5\times 10^6\ \text{J}} \qquad \text{(Calcul)}$$

Évaluons l'expression du travail effectué par le système de freinage sur une distance $s$ indéterminée. Utilisons l'expression du travail $W$ à l'aide de l'intégrale selon l'axe $x$ :

$$W = \int_{x=x_i}^{x_f} F_x\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad W = \int_{x=x_i}^{x_f} \left(-200x - 5x^3\right)\mathrm{d}x \qquad \text{(Remplacer } F_x = -200x - 5x^3\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad W = \int_{x=0}^{s} \left(-200x - 5x^3\right)\mathrm{d}x \qquad \text{(Borne : } x_i = 0 \rightarrow x_f = s\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad W = -200\int_{x=0}^{s} x\,\mathrm{d}x - 5\int_{x=0}^{s} x^3\,\mathrm{d}x \qquad \text{(Distribuer intégrale, factoriser const.)}$$

$$\Rightarrow \quad W = -200\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^s - 5\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^s \qquad \text{(Résoudre l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad W = -200\left(\frac{s^2}{2} - 0\right) - 5\left(\frac{s^4}{4} - 0\right) \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W = -100s^2 - 1{,}25s^4} \qquad \text{(Simplifier)}$$

À partir du théorème de l'énergie cinétique, évaluons le déplacement $s$ requis pour immobiliser la locomotive :

$$W = \Delta K \quad \Rightarrow \quad \left(-100s^2 - 1{,}25s^4\right) = \left(-4{,}5\times 10^6\right) \qquad \text{(Remplacer } W \text{ et } \Delta K\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}25s^4 + 100s^2 - 4{,}5\times 10^6 = 0 \qquad \text{(Réécriture)}$$

$$\Rightarrow \quad 1{,}25Y^2 + 100Y - 4{,}5\times 10^6 = 0 \qquad \text{(Remplacer } Y = s^2\text{)}$$

Évaluons la solution au polynôme du 2^e^ degré :

$$Y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad Y = \frac{-(100) \pm \sqrt{(100)^2 - 4(1{,}25)(-4{,}5\times 10^6)}}{2(1{,}25)} \quad \text{(Remplacer } a, b \text{ et } c\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad Y = \frac{-100 \pm \sqrt{2{,}251\times 10^7}}{2{,}5} \quad \text{(Simplifier)}$$

$$\Rightarrow \quad Y = \{-1938\,,\ 1858\} \quad \text{(Solutions de } Y\text{)}$$

Évaluons la distance s à partir de la relation entre Y et s :

$$Y = s^2 \quad \Rightarrow \quad s = \sqrt{Y} \quad \text{(Isoler } s\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad s = \sqrt{\{-1938\,,\ 1858\}} \quad \text{(Remplacer } Y\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad s = \{-44{,}02\,i\ ,\ 44{,}02\,i\ ,-43{,}10\ ,\ 43{,}10\} \quad \text{(Solutions de } s,\ i = \sqrt{-1}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{s = 43{,}10\ \text{ m}} \quad \text{(Solution réelle et positive)}$$

# Exercice

**3.1.X** ***Forcer au cube.*** Un mobile contraint de se déplacer le long d'un axe *x* subit une force donnée par $F_x = -5x^3$, où $F_x$ est en newtons et *x* est en mètres. (a) Déterminez la formule qui permet de calculer le travail effectué par la force sur le mobile lorsque ce dernier se déplace de la position initiale $x_i$ à la position $x_f$. (b) Que vaut ce travail si le mobile se déplace de $x_i = 2\ \text{ m}$ à $x_f = -1{,}5\ \text{ m}$.

## Solution

### 3.1.X ***Forcer au cube.***

a) Avec la définition du travail

Force : $\vec{F} = -5x^3\vec{i}$ N

Déplacement : $d\vec{s} = dx\ \vec{i}$ m

Borne de l'intégrale : $x = x_i$ à $x = x_f$

$$W = \int \vec{F}\cdot d\vec{s} \quad \Rightarrow \quad W = \int_{x=x_i}^{x_f} \vec{F}\cdot d\vec{x}$$ (Déplacement selon l'axe $x$ de $x_i$ à $x_f$)

$$\Rightarrow \quad W = \int_{x=x_i}^{x_f} \left(-5x^3\ \vec{i}\right)\cdot\left(dx\ \vec{i}\right)$$ (Remplacer $\vec{F} = -5x^3\vec{i}$ et $d\vec{x} = dx\,\vec{i}$ )

$$\Rightarrow \quad W = \int_{x=x_i}^{x_f} -5x^3\ dx\ \left(\vec{i}\cdot\vec{i}\right)$$ (Isoler le produit scalaire)

$$\Rightarrow \quad W = \int_{x=x_i}^{x_f} -5x^3\ dx$$ (Calculer $i \cdot i = 1$)

$$\Rightarrow \quad \boxed{W = -5\int_{x=x_i}^{x_f} x^3\ dx}$$ (Sortir la constante de l'intégrale)

(b) Travail de $x_i = 2$ m à $x_f = -1{,}5$ m

$$W = -5\int_{x=2}^{-1{,}5} x^3\ dx \quad \Rightarrow \quad W = -5\left[\frac{x^4}{4}\right]_2^{-1{,}5}$$

$$\Rightarrow \quad W = -5\left(\frac{(-1{,}5)^4}{4} - \frac{(2)^4}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \quad W = -5(-2{,}73)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W = 13{,}67\ \text{J}}$$

N.B. Le travail est positif, car la force (direction –*x*) est dans le même sens que le déplacement (direction –*x*)