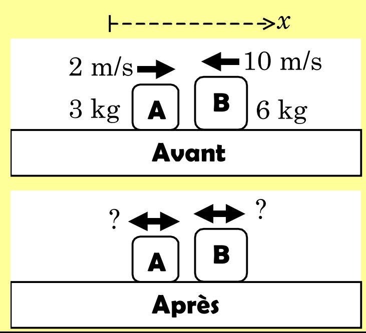
Chapitre 3.11a – Les collisions élastiques frontales

Les lois de conservation dans une collision élastique en une dimension

Le pendule de Newton est un bon exemple de collision élastique frontale.

Chaque loi physique nous apporte une équation qui peut être utilisée pour résoudre un problème. Dans le cas d'une collision à une dimension, le principe de conservation de la quantité de mouvement nous apporte une équation ce qui nous permet de résoudre un problème à un inconnu. Si la collision est élastique, nous pouvons utiliser la conservation de l'énergie cinétique et résoudre un problème à deux inconnus.

Situation 1 : ***Une collision élastique frontale.*** Un bloc de 3 kg qui se déplace à 2 m/s vers la droite subit une collision élastique frontale avec un bloc de 6 kg qui se déplace de 10 m/s vers la gauche. On désire déterminer les vitesses des blocs immédiatement après la collision



Développons l'équation de la a conservation de la quantité de mouvement selon l'axe *x* :

$$\sum p_{x\,f} = \sum p_{x\,i} \quad \Rightarrow \quad p_{xA\,f} + p_{xB\,f} = p_{xA\,i} + p_{xB\,i} \qquad \text{(Développer éq.)}$$

$$\Rightarrow \quad m_A v_{xA\,f} + m_B v_{xB\,f} = m_A v_{xA\,i} + m_B v_{xB\,i} \qquad (\,p_x = m v_x\,)$$

$$\Rightarrow \quad (3)v_{xA\,f} + (6)v_{xB\,f} = (3)(2) + (6)(-10) \qquad \text{(Remplacer num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{3v_{xA\,f} + 6v_{xB\,f} = -54} \qquad \textbf{(1)} \qquad \text{(Simplifier)}$$

Développons l'équation de la conservation de l'énergie cinétique :

$$K_f = K_i \quad \Rightarrow \quad K_{A\,f} + K_{B\,f} = K_{A\,i} + K_{B\,i} \qquad \text{(Développer éq.)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m_A v_{xA\,f}^{\;2} + \frac{1}{2} m_B v_{xB\,f}^{\;2} = \frac{1}{2} m_A v_{xA\,i}^{\;2} + \frac{1}{2} m_B v_{xB\,i}^{\;2} \qquad \left(K = \frac{1}{2} m v^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad (3)v_{xA\,f}^{\;2} + (6)v_{xB\,f}^{\;2} = (3)(2)^2 + (6)(10)^2 \qquad \text{(Remplacer num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{3v_{xA\,f}^{\;2} + 6v_{xB\,f}^{\;2} = 612} \qquad \textbf{(2)} \qquad \text{(Calcul)}$$

Nous avons deux équations et deux inconn**us** :

$$3v_{xA\,f} + 6v_{xB\,f} = -54 \qquad \textbf{(1)}$$

$$3v_{xA\,f}^{\;2} + 6v_{xB\,f}^{\;2} = 612 \qquad \textbf{(2)}$$

À partir de **(1)**, isolons $v_{xA\,f}$ et développons son expression au carré :

$$3v_{xA\,f}+6v_{xB\,f}=-54 \Rightarrow 3v_{xA\,f}=-54-6v_{xB\,f} \qquad \text{(Isoler } v_{xA\,f}\text{)}$$

$$\Rightarrow v_{xA\,f}=-(18+2v_{xB\,f}) \qquad \text{(Diviser par 3)}$$

$$\Rightarrow v_{xA\,f}{}^2=(18+2v_{xB\,f})^2 \qquad \text{(Mettre au carré)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{xAf}{}^2=324+72v_{xB\,f}+4v_{xB\,f}{}^2} \quad \mathbf{(3)} \qquad \text{(Développer le carré)}$$

On remplace **(3)** dans **(2)** :

$$3v_{xA\,f}{}^2+6v_{xB\,f}{}^2=612 \Rightarrow 3(324+72v_{xB\,f}+4v_{xB\,f}{}^2)+6v_{xB\,f}{}^2=612 \qquad \text{(Remplacer } v_{xA\,f}{}^2\text{)}$$

$$\Rightarrow 324+72v_{xB\,f}+4v_{xB\,f}{}^2+2v_{xB\,f}{}^2=204 \qquad \text{(Diviser par 3)}$$

$$\Rightarrow 6v_{xB\,f}{}^2+72v_{xB\,f}+120=0 \qquad \text{(Éq. égale à zéro)}$$

Nous avons un polynôme du 2$^{\text{ième}}$ degré à résoudre :

$$v_{xB\,f}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow v_{xB\,f}=\frac{-(72)\pm\sqrt{(72)^2-4(6)(120)}}{2(6)}$$

$$\Rightarrow v_{xB\,f}=\frac{-72\pm 48}{12}$$

$$\Rightarrow v_{xB\,f}=\{\,-10,\ -2\,\} \qquad (v_{xB\,f}=-10\text{, effet fantôme})$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{xB\,f}=-2\ \text{m/s}} \qquad \text{(Collision entre A et B)}$$

Ainsi, nous avons après la collision avec l'équation **(1)** :

$$3v_{xA\,f}+6v_{xB\,f}=-54 \Rightarrow v_{xA\,f}=\frac{-54-6v_{xB\,f}}{3} \qquad \text{(Isoler } v_{xA\,f}\text{)}$$

$$\Rightarrow v_{xA\,f}=\frac{-54-6(-2)}{3} \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{xA\,f}=-14\ \text{m/s}} \qquad \text{(Évaluer } v_{xA\,f}\text{)}$$

Nous avons donc évaluer notre deux vitesses finales à l'aide de nos deux lois de conservation :

$$\boxed{v_{xA\,f}=-14\ \text{m/s}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{v}_{xB\,f}=-2\ \text{m/s}}$$

La collision élastique à une dimension sur un objet immobile

Considérons une particule **A** se déplaçant initialement à une vitesse $v_{xA\,i}$ selon l'axe x vers une particule **B** initialement immobile. Si l'on considère une **collision élastique** entre **A** et **B**, les vitesses finales de nos deux particules après la collision seront déterminées par les équations suivantes :

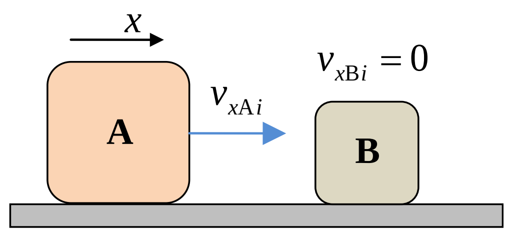


Illustration des vitesses des deux particulesavant le contact.

$$v_{xA\,f} = \left(\frac{1 - m_{B/A}}{1 + m_{B/A}}\right) v_{xA\,i} \quad \text{et} \quad v_{xB\,f} = \frac{2}{1 + m_{B/A}} v_{xA\,i}$$

$$\text{tel que} \quad m_{B/A} = m_B / m_A \quad \text{et} \quad v_{xB\,i} = 0$$

où $v_{xA\,f}$: Vitesse finale de la particule **A** selon l'axe x (m/s)
$v_{xB\,f}$: Vitesse finale de la particule **B** selon l'axe x (m/s)
$v_{xA\,i}$: Vitesse initiale de la particule **A** selon l'axe x (m/s)
m_A : Masse de la particule **A** (kg)
m_B : Masse de la particule **B** (kg)

Situation 1	Données	Conclusion	Exemple
$m_A = m_B$	$m_{B/A} = 1$ $v_{xA\,f} = 0$ $v_{xB\,f} = v_{xA\,i}$	Le bloc A s'immobilise et le bloc B avance à la vitesse initiale qu'avait le bloc A.	 Une collision frontale au billard entre deux boules.

Situation 2	Données	Conclusion	Exemple
$m_A >> m_B$	$m_{B/A} = 0$ $v_{xA\,f} = v_{xA\,i}$ $v_{xB\,f} = 2v_{xA\,i}$	Le bloc A continue à vitesse constante et le bloc B se déplace avec une vitesse deux fois plus grande que celle du bloc A.	 Frapper un clou avec un marteau.

Situation 3	Données	Conclusion	Exemple
$m_A << m_B$	$m_{B/A} = \infty$ $v_{xA\,f} = -v_{xA\,i}$ $v_{xB\,f} = 0$	Le bloc A rebondit avec la même vitesse, mais dans le sens opposé et le bloc B demeure immobile.	 Frapper une enclume avec un marteau.

Preuve :

Considérons deux particules **A** et **B** qui entrent en collision élastique lorsque ceux-ci se déplacent selon l'axe *x*. Développons l'équation de la a conservation de la quantité de mouvement selon l'axe *x* :

$\sum p_{xf} = \sum p_{xi} \quad \Rightarrow \quad p_{xAf} + p_{xBf} = p_{xAi} + p_{xBi}$ (Développer éq.)

$\Rightarrow \quad m_A v_{xAf} + m_B v_{xBf} = m_A v_{xAi} + m_B v_{xBi}$ ($p_x = mv_x$)

$\Rightarrow \quad m_A v_{xAf} + m_B v_{xBf} = m_A v_{xAi}$ ($v_{xBi} = 0$)

$\Rightarrow \quad v_{xAf} + \dfrac{m_B}{m_A} v_{xBf} = v_{xAi}$ (Diviser par m_A)

$\Rightarrow \quad v_{xAf} + m_{B/A} v_{xBf} = v_{xAi}$ ($m_{B/A} = m_B / m_A$)

$\Rightarrow \quad \boxed{v_{xAf} = v_{xAi} - m_{B/A} v_{xBf}}$ **(1)** (Isoler v_{xAf})

Développons l'équation de la conservation de l'énergie cinétique :

$K_f = K_i \quad \Rightarrow \quad K_{Af} + K_{Bf} = K_{Ai} + K_{Bi}$ (Développer éq.)

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m_A v_{xAf}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{xBf}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{xAi}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{xBi}^2$ ($K = \frac{1}{2} mv^2$)

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m_A v_{xAf}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{xBf}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{xAi}^2$ ($v_{xBi} = 0$)

$\Rightarrow \quad m_A v_{xAf}^2 + m_B v_{xBf}^2 = m_A v_{xAi}^2$ (Multiplier par 2)

$\Rightarrow \quad v_{xAf}^2 + \dfrac{m_B}{m_A} v_{xBf}^2 = v_{xAi}^2$ (Diviser par m_A)

$\Rightarrow \quad \boxed{v_{xAf}^2 + m_{B/A} v_{xBf}^2 = v_{xAi}^2}$ **(2)** ($m_{B/A} = m_B / m_A$)

Remplaçons l'équation **(1)** dans l'équation **(2)** afin d'obtenir une expression pour v_{xBf} :

$v_{xAf}^2 + m_{B/A} v_{xBf}^2 = v_{xAi}^2$ (De **(2)**)

$\Rightarrow \quad \left(v_{xAi} - m_{B/A} v_{xBf}\right)^2 + m_{B/A} v_{xBf}^2 = v_{xAi}^2$ (Remplacer **(1)**)

$\Rightarrow \quad \left(v_{xAi}^2 - 2 m_{B/A} v_{xAi} v_{xBf} + m_{B/A}^2 v_{xBf}^2\right) + m_{B/A} v_{xBf}^2 = v_{xAi}^2$ (Développer le carré)

$\Rightarrow \quad -2 m_{B/A} v_{xAi} v_{xBf} + m_{B/A}^2 v_{xBf}^2 + m_{B/A} v_{xBf}^2 = 0$ (Simplifier v_{xAi}^2)

$\Rightarrow \quad -2 v_{xAi} + m_{B/A} v_{xBf} + v_{xBf} = 0$ (Diviser par $m_{B/A} v_{xBf}$)

Continuons la simplification afin d'isoler $v_{xB\,f}$:

$$-2v_{xA\,i} + m_{B/A} v_{xB\,f} + v_{xB\,f} = 0 \qquad \text{(Ligne précédente)}$$

$$\Rightarrow \quad m_{B/A} v_{xB\,f} + v_{xB\,f} = 2v_{xA\,i} \qquad \text{(Isoler } 2v_{xA\,i}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_{xB\,f}\left(1 + m_{B/A}\right) = 2v_{xA\,i} \qquad \text{(Factoriser } v_{xB\,f}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{xB\,f} = \frac{2}{1 + m_{B/A}} v_{xA\,i}} \quad \blacksquare\ (1) \qquad \textbf{(3)} \qquad \text{(Isoler } v_{xB\,f}\text{)}$$

On remplacer **(3)** dans **(1)** afin d'obtenir une expression pour $v_{xA\,f}$:

$$v_{xA\,i} = v_{xA\,f} + m_{B/A} v_{xB\,f} \qquad \text{(De (1))}$$

$$\Rightarrow \quad v_{xA\,i} = v_{xA\,f} + m_{B/A}\left(\frac{2}{1 + m_{B/A}} v_{xA\,i}\right) \qquad \text{(Remplacer (3))}$$

$$\Rightarrow \quad v_{xA\,i} - \frac{2m_{B/A}}{1 + m_{B/A}} v_{xA\,i} = v_{xA\,f} \qquad \text{(Isoler } v_{xA\,f}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(1 - \frac{2m_{B/A}}{1 + m_{B/A}}\right) v_{xA\,i} = v_{xA\,f} \qquad \text{(Factoriser } v_{xA\,i}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1 + m_{B/A} - 2m_{B/A}}{1 + m_{B/A}}\right) v_{xA\,i} = v_{xA\,f} \qquad \text{(Dénomi. commun)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{xA\,f} = \left(\frac{1 - m_{B/A}}{1 + m_{B/A}}\right) v_{xA\,i}} \quad \blacksquare\ (2) \qquad \text{(Simplifier termes } m_{B/A}\text{)}$$

Exercice

3.11.1 ***Une collision élastique en une dimension.*** Un bloc de 3 kg qui se déplace à 4 m/s vers la gauche subit une collision élastique frontale avec un bloc de 5 kg immobile. Calculez les vitesses des blocs immédiatement après la collision (module et orientation).

Solution

3.11.1 *Une collision élastique en une dimension.*

Information initiale : (l'axe *x* est positif vers la gauche)

$\vec{v}_{A\,i} = -4\ \vec{i}\ \text{ m/s}$

$K_{A\,i} = \dfrac{1}{2} m_A {v_{A\,i}}^2 = \dfrac{1}{2}(3)(4)^2 = 24\ \text{ J}$ $\qquad\qquad$ $\vec{p}_{A\,i} = m_A \vec{v}_{A\,i} = (3)\left(-4\ \vec{i}\right) = -12\ \vec{i}\ \text{ kg}\cdot\text{m/s}$

$\vec{v}_{B\,i} = 0\ \text{ m/s}$

$K_{B\,i} = 0\ \text{ J}$ $\qquad\qquad$ $\vec{p}_{B\,i} = 0\ \text{ kg}\cdot\text{m/s}$

Avec nos deux lois de la conservation :

$$\sum \vec{p}_f = \sum \vec{p}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{A\,f} + \vec{p}_{B\,f} = \vec{p}_{A\,i} + \vec{p}_{B\,i}$$

$$\Rightarrow \quad m_A \vec{v}_{A\,f} + m_B \vec{v}_{B\,f} = \left(-12\ \vec{i}\right) + (0)$$

$$\Rightarrow \quad (3) v_{A\,f}\vec{i} + (5) v_{B\,f}\vec{i} = -12\ \vec{i} \qquad \text{(Collision frontale)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{3v_{A\,f} + 5v_{B\,f} = -12} \qquad \textbf{(1)}$$

$$K_f = K_i \quad \Rightarrow \quad K_{A\,f} + K_{B\,f} = K_{A\,f} + K_{B\,f}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m_A {v_{A\,f}}^2 + \frac{1}{2} m_B {v_{B\,f}}^2 = (24) + (0)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(3) {v_{A\,f}}^2 + \frac{1}{2}(5) {v_{B\,f}}^2 = (24) + (0)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{1{,}5 {v_{A\,f}}^2 + 2{,}5 {v_{B\,f}}^2 = 24} \qquad \textbf{(2)}$$

Remplaçons **(1)** dans **(2)** et isolons $v_{A\,f}$:

$$3v_{A\,f} + 5v_{B\,f} = -12 \quad \Rightarrow \quad v_{A\,f} = \frac{-12 - 5v_{B\,f}}{3} \qquad \text{(Isoler } v_{A\,f}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_{A\,f} = -\frac{12 + 5v_{B\,f}}{3} \qquad \text{(Factoriser le négatif)}$$

$$\Rightarrow \quad \left(v_{A\,f}\right)^2 = \left(-\frac{12 + 5v_{B\,f}}{3}\right)^2 \qquad \text{(Mettre au carré)}$$

$$\Rightarrow \quad {v_{A\,f}}^2 = \frac{144 + 120 v_{B\,f} + 25 {v_{B\,f}}^2}{9} \qquad \text{(Développer le numérateur)}$$

Remplaçons l'expression de $v_{A\,f}^{\,2}$ dans l'équation **(2)** :

$$1{,}5v_{A\,f}^{\,2} + 2{,}5v_{B\,f}^{\,2} = 24 \quad \Rightarrow \quad 1{,}5\left(\frac{144 + 120v_{B\,f} + 25v_{B\,f}^{\,2}}{9}\right) + 2{,}5v_{B\,f}^{\,2} = 24$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{18}\left(144 + 120v_{B\,f} + 25v_{B\,f}^{\,2}\right) + 2{,}5v_{B\,f}^{\,2} = 24$$

$$\Rightarrow \quad 3\left(144 + 120v_{B\,f} + 25v_{B\,f}^{\,2}\right) + 45v_{B\,f}^{\,2} = 432$$

$$\Rightarrow \quad 432 + 360v_{B\,f} + 75v_{B\,f}^{\,2} + 45v_{B\,f}^{\,2} = 432$$

$$\Rightarrow \quad 360v_{B\,f} + 120v_{B\,f}^{\,2} = 0$$

$$\Rightarrow \quad 3 + v_{B\,f} = 0$$

$$\Rightarrow \quad v_{B\,f} = -3 \ \text{m/s}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_{B\,f} = -3\ \vec{i} \ \text{m/s}}$$

Évaluons la vitesse $v_{A\,f}$ avec l'équation **(1)** :

$$3v_{A\,f} + 5v_{B\,f} = -12 \quad \Rightarrow \quad 3v_{A\,f} + 5(-3) = -12$$

$$\Rightarrow \quad 3v_{A\,f} = 3$$

$$\Rightarrow \quad v_{A\,f} = 1 \ \text{m/s}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_{A\,f} = 1\ \vec{i} \ \text{m/s}}$$