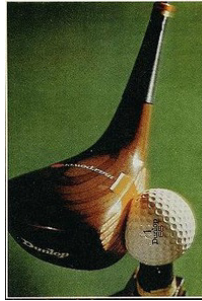


Chapitre 3.10b – La conservation de la quantité de mouvement

La collision

Lors d'une collision entre deux objets, puisque les objets ne peuvent occuper le même espace au même moment, il se produit des **forces de contact** entre les objets que nous avons nommées **forces normales**. Ces forces de nature électrique peuvent être appliquées pendant de très court intervalle de temps. Ces forces permettent aux objets de ralentir, s'immobiliser ou changer de direction.



<http://pages.videotron.com/sellig01/saviezvous/saviez1.html>

Une balle de golf se déforme à la collision.



<http://www.foozine.com/photo/automoto/3844-petit-carambolage/>

Un carambolage représente plusieurs collisions à plusieurs corps.

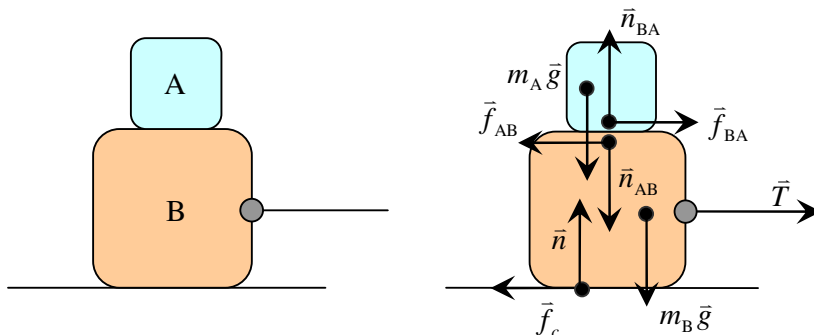
Puisque la **force normale** est difficile à étudier, car elle est **non-constante** pendant la durée de **l'impact** et qu'elle est habituellement difficile à mesurer, la 2^e loi de Newton ($\vec{F} = m\vec{a}$) semble être un chemin difficile à prendre pour résoudre un tel problème.

Force interne et force externe

Une **force interne** est une force appliquée sur un objet d'un système qui est **jumelée** à une autre force appliquée sur un autre objet pour former une **paire action-réaction**. Des forces internes ne propulsent pas le système, car la somme des forces internes d'un système est toujours égale à zéro par la 3^{ème} loi de Newton ($\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$).

Une **force externe** est une force appliquée sur un objet d'un système dont la **source de la force ne fait pas partie du système**. Il n'y a donc pas d'association de paire action-réaction avec ces forces. Ce sont les forces externes qui sont responsable de la propulsion du système par la 2^e loi de Newton ($\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m_{\text{sys}} \vec{a}$).

Exemple : Le système de bloc A et B frotte contre le sol et est tiré par une corde.



Forces internes de somme nulle :

$$\vec{f}_{AB} + \vec{f}_{BA} + \vec{n}_{AB} + \vec{n}_{BA} = 0$$

Forces externes de somme nulle :

$$m_A \vec{g} + m_B \vec{g} + \vec{n} = 0$$

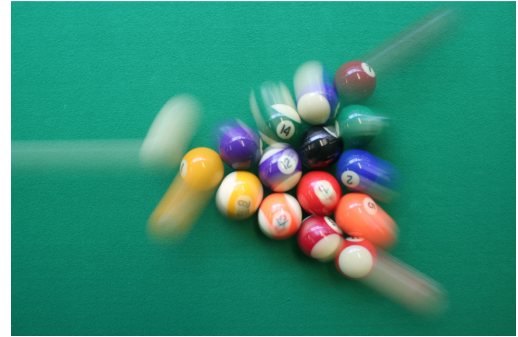
Forces externes résiduelles :

$$\vec{f}_c + \vec{T} = (m_A + m_B) \vec{a}$$

(supposant que les blocs A et B restent collés)

La conservation de la quantité de mouvement

Lorsqu'un système de masses est parfaitement isolé de toutes formes de force externe ou que la somme des forces externes est égale à zéro en tout temps, il y a conservation de la quantité de mouvement \vec{p} dans le temps pour l'ensemble du système :



<http://fr.wikipedia.org/wiki/Billard>

Une casse au billard est un bon exemple de conservation de la quantité de mouvement, car il n'y a que des forces normales de contact en jeu (force internes) si l'on néglige le frottement de contact durant la collision (force externe).

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0 \Leftrightarrow \sum \vec{p} = \text{constante}$$

$$\Rightarrow \sum \vec{p}_f = \sum \vec{p}_i$$

où $\sum \vec{p}_i$: Somme de la quantité de mouvement avant la collision (kg · m/s)

$\sum \vec{p}_f$: Somme de la quantité de mouvement après la collision (kg · m/s)

Preuve :

Considérons un système à deux corps A et B. Appliquons la 2^e loi de Newton dans la condition où la somme des forces externes est égale à zéro afin de démontrer la conservation de la quantité de mouvement dans une telle situation :

$$\sum \vec{F}_A = \frac{d\vec{p}_A}{dt} \quad \text{et} \quad \sum \vec{F}_B = \frac{d\vec{p}_B}{dt} \quad (2^{\text{e}} \text{ loi de Newton sur A et B})$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F}_A + \sum \vec{F}_B = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} \quad (\text{Créer le système en add. nos deux éq.})$$

$$\Rightarrow (\vec{F}_{A\text{ext}} + \vec{F}_{BA}) + (\vec{F}_{B\text{ext}} + \vec{F}_{AB}) = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} \quad (\text{Remplacer } \sum \vec{F} = \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{int}})$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{AB} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} \quad (\text{Supposer } \vec{F}_{A\text{ext}} = 0 \text{ et } \vec{F}_{B\text{ext}} = 0)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} \quad (3^{\text{ième}} \text{ loi Newton : } \vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA})$$

$$\Rightarrow d\vec{p}_A + d\vec{p}_B = 0 \quad (\text{Indépendante du temps, simplifier } dt)$$

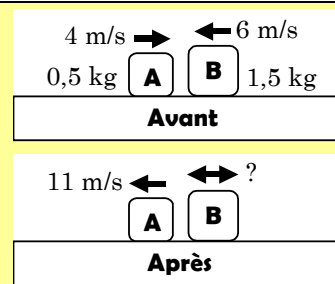
$$\Rightarrow \Delta\vec{p}_A + \Delta\vec{p}_B = 0 \quad (\text{Différentielle relaxée, } d \rightarrow \Delta)$$

$$\Rightarrow (\vec{p}_{Bf} - \vec{p}_{Bi}) + (\vec{p}_{Af} - \vec{p}_{Ai}) = 0 \quad (\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i)$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{Af} + \vec{p}_{Bf} = \vec{p}_{Ai} + \vec{p}_{Bi} \quad (\text{Séparer terme initial et final})$$

$$\Rightarrow \sum_{A,B} \vec{p}_f = \sum_{A,B} \vec{p}_i \quad \blacksquare \quad (\text{Remplacer par une sommation})$$

Situation 4 : Deux blocs entrent en collision. Les blocs **A** (0,5 kg) et **B** (1,5 kg) entrent en collision. Immédiatement avant la collision, A voyage vers la droite à 4 m/s et B voyage vers la gauche à 6 m/s. Immédiatement après la collision, le bloc **A** voyage vers la gauche à 11 m/s. On désire déterminer la vitesse du bloc **B** après la collision ainsi que la quantité d'énergie cinétique perdue lors de la collision.



Voici les informations de notre situation : (axe x positif vers la droite)

Vitesse initiale : $v_{xAi} = 4 \text{ m/s}$ $v_{xBi} = -6 \text{ m/s}$

Vitesse finale : $v_{xAf} = -11 \text{ m/s}$ $v_{xBf} = ?$

Appliquons la conservation de la quantité de mouvement au système :

$$\begin{aligned} \sum \vec{p}_f &= \sum \vec{p}_i && \Rightarrow \sum p_{xf} = \sum p_{xi} && \text{(Selon l'axe } x) \\ &&& \Rightarrow p_{xAf} + p_{xBf} = p_{xAi} + p_{xBi} && \text{(Développer éq.)} \\ &&& \Rightarrow m_A v_{xAf} + m_B v_{xBf} = m_A v_{xAi} + m_B v_{xBi} && (p_x = mv_x) \\ &&& \Rightarrow (0,5)(-11) + (1,5)v_{xBf} = (0,5)(4) + (1,5)(-6) && \text{(Remplacer num.)} \\ &&& \Rightarrow -5,5 + 1,5v_{xBf} = 2 - 9 && \text{(Calcul)} \\ &&& \Rightarrow 1,5v_{xBf} = -1,5 && \text{(Isoler } v_{xBf}) \\ &&& \Rightarrow \boxed{v_{xBf} = -1 \text{ m/s}} && \text{(Évaluer } v_{xBf}) \end{aligned}$$

Évaluons l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} K_i &= K_{Ai} + K_{Bi} && \Rightarrow K_i = \frac{1}{2} m_A v_{Ai}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{Bi}^2 \\ &&& \Rightarrow K_i = \frac{1}{2} (0,5)(4)^2 + \frac{1}{2} (1,5)(6)^2 && \Rightarrow \boxed{K_i = 31 \text{ J}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_f &= K_{Af} + K_{Bf} && \Rightarrow K_f = \frac{1}{2} m_A v_{Af}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{Bf}^2 \\ &&& \Rightarrow K_f = \frac{1}{2} (0,5)(11)^2 + \frac{1}{2} (1,5)(1)^2 && \Rightarrow \boxed{K_f = 31 \text{ J}} \end{aligned}$$

Évaluons la variation de l'énergie cinétique :

$$\Delta K = K_f - K_i \quad \Rightarrow \quad \Delta K = (31) - (31) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta K = 0 \text{ J}}$$

Nous avons ici une **collision élastique**.

Collision élastiques, inélastiques et parfaitement inélastiques

Puisque la conservation de la quantité de mouvement est toujours applicable dans tous les problèmes de collision, nous pouvons distinguer deux grandes familles de collision :

Collision	Quantité de mouvement conservée ($\vec{p}_f = \vec{p}_i$)	Énergie cinétique conservée ($K_f = K_i$)	Objets restent collés après la collision
Élastique	Oui	Oui	Non
Inélastique	Oui	Non	Possiblement
Parfaitement inélastique (sous catégorie)	Oui	Non	Oui

N.B. Lors d'une **collision inélastique**, l'énergie cinétique initiale n'est pas perdue mais prend une forme autre qu'en mouvement (ex : chaleur, déformation permanente d'un objet, bruit, émission de lumière).

Situation 5 : Une interaction explosive. Une carabine **C** à injection de 4 kg initialement immobile expulse un dard **D** tranquilisant de 20 g avec une vitesse horizontale de 1000 m/s. On désire déterminer la vitesse de recul de la carabine et comparer les énergies cinétiques du dard et de la carabine immédiatement après le tir.

Voici les informations de la situation : (x positif vers la droite)

Notation	Vitesse initiale	Vitesse finale
<ul style="list-style-type: none"> • C : Carabine • D : Dart 	<ul style="list-style-type: none"> • $v_{xCi} = 0$ • $v_{xDi} = 0$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $v_{xCf} = ?$ • $v_{xDf} = 1000\text{m/s}$

Appliquons la conservation de la quantité de mouvement :

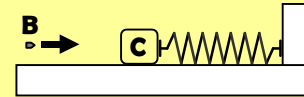
$$\begin{aligned} \sum p_{xf} &= \sum p_{xi} &\Rightarrow & p_{xCf} + p_{xDf} = p_{xCi} + p_{xDi} && \text{(Développer éq.)} \\ & &\Rightarrow & m_C v_{xCf} + m_D v_{xDf} = m_C v_{xCi} + m_D v_{xDi} && (p_x = mv_x) \\ & &\Rightarrow & (4)v_{xCf} + (0,02)(1000) = (4)(0) + (0,02)(0) && \text{(Remplacer num.)} \\ & &\Rightarrow & \boxed{v_{xCf} = -5 \text{ m/s}} && \text{(Isoler } \vec{v}_{Cf} \text{)} \end{aligned}$$

Énergie cinétique :

$$\begin{aligned} K_{Cf} &= \frac{1}{2} m_C v_{Cf}^2 &\Rightarrow & K_{Cf} = \frac{1}{2} (4)(5)^2 &\Rightarrow & \boxed{K_{Cf} = 50 \text{ J}} \\ K_{Df} &= \frac{1}{2} m_D v_{Df}^2 &\Rightarrow & K_{Df} = \frac{1}{2} (0,02)(1000)^2 &\Rightarrow & \boxed{K_{Df} = 10000 \text{ J}} \end{aligned}$$

Nous avons **200 fois** plus d'énergie cinétique dans le dard que dans la carabine.

Situation 6 : Une situation, deux principes de conservation. Sur une surface horizontale sans frottement, un cube de bois **C** de 2 kg est placé contre un ressort horizontal dont la constante de rappel vaut 500 N/m. Une balle de fusil **B** de 20 g voyageant horizontalement à 800 m/s pénètre dans le bloc et s'y incruste. On désire déterminer la compression maximale du ressort.



Avec la conservation de la quantité de mouvement selon l'axe x , nous pouvons déterminer la vitesse du groupe cube + balle après l'impact en utilisant la collision parfaitement inélastique :

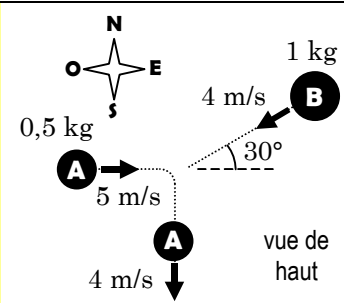
$$\begin{aligned} \sum p_{xf} &= \sum p_{xi} &\Rightarrow & p_{xCf} + p_{xBf} = p_{xCi} + p_{xBi} && \text{(Développer éq.)} \\ & &\Rightarrow & m_C v_{xCf} + m_B v_{xBf} = m_C v_{xCi} + m_B v_{xBi} && (p_x = mv_x) \\ & &\Rightarrow & (m_C + m_B) v_{xf} = m_C v_{xCi} + m_B v_{xBi} && (v_{xCf} = v_{xBf} = v_{xf}) \\ & &\Rightarrow & ((2) + (0,02)) v_{xf} = (2)(0) + (0,02)(800) && \text{(Remplacer num.)} \\ & &\Rightarrow & \boxed{v_{xf} = 7,92 \text{ m/s}} && \text{(Isoler et évaluer } v_{xf} \text{)} \end{aligned}$$

Avec la conservation de l'énergie, nous pouvons évaluer la compression maximale du ressort : ($W_{nc} = 0$)

$$\begin{aligned} E_f &= E_i + W_{nc} &\Rightarrow & K_f + U_f = K_i + U_i + (0) && \text{(Développer éq.)} \\ & &\Rightarrow & (0) + \frac{1}{2} k e_f^2 = \frac{1}{2} (m_B + m_C) v_i^2 + (0) && (U_f = U_{rf}, K_i = K_{iB} + K_{iC}) \\ & &\Rightarrow & e_f^2 = \frac{(m_B + m_C) v_i^2}{k} && \text{(Isoler } e_f^2 \text{)} \\ & &\Rightarrow & e_f^2 = \frac{((0,02) + (2))(7,92)^2}{(500)} && \text{(Remplacer, } v_i = v_{xf} \text{)} \\ & &\Rightarrow & \boxed{e_f = \pm 0,503 \text{ m}} && \text{(Évaluer } e_f \text{)} \end{aligned}$$

La compression maximale du ressort est de **0,503 m**.

Situation 7 : Une collision en deux dimensions. Sur une table horizontale sans frottement, deux rondelles rebondissent l'une sur l'autre. Avant la collision, la rondelle **A**, dont la masse est égale à 500 g, se déplace à 5 m/s vers l'est et la rondelle **B**, dont la masse est égale à 1 kg, se déplace à 4 m/s à 30° au sud de l'ouest. Après la collision, la rondelle **A** se déplace à 4 m/s vers le sud. On désire (a) déterminer la vitesse de la rondelle **B** après la collision ainsi que (b) la quantité d'énergie cinétique perdue lors de la collision.



Vitesse en x :	Vitesse en y :	Résolution graphique :
<ul style="list-style-type: none"> • $v_{xAi} = 5 \text{ m/s}$ • $v_{xBi} = -4 \cos(30^\circ) \text{ m/s}$ • $v_{xAf} = 0 \text{ m/s}$ • $v_{xBf} = ?$ 	<ul style="list-style-type: none"> • $v_{yAi} = 0 \text{ m/s}$ • $v_{yBi} = -4 \sin(30^\circ) \text{ m/s}$ • $v_{yAf} = -4 \text{ m/s}$ • $v_{yBf} = ?$ 	

Appliquons la conservation de la quantité de mouvement selon l'axe x :

$$\begin{aligned} \sum p_{xf} &= \sum p_{xi} &\Rightarrow & p_{xAf} + p_{xBf} = p_{xAi} + p_{xBi} && \text{(Développer } \sum p_x \text{)} \\ & &\Rightarrow & m_A v_{xAf} + m_B v_{xBf} = m_A v_{xAi} + m_B v_{xBi} && \text{(Remplacer } p_x = mv_x \text{)} \\ & &\Rightarrow & (0,5)(0) + (1)v_{xBf} = (0,5)(5) + (1)(-4 \cos(30^\circ)) && \text{(Remplacer val. num.)} \\ & &\Rightarrow & \boxed{v_{xBf} = -0,964 \text{ m/s}} && \text{(Évaluer } v_{xBf} \text{)} \end{aligned}$$

Appliquons la conservation de la quantité de mouvement selon l'axe y :

$$\begin{aligned} \sum p_{yf} &= \sum p_{yi} &\Rightarrow & p_{yAf} + p_{yBf} = p_{yAi} + p_{yBi} && \text{(Développer } \sum p_y \text{)} \\ & &\Rightarrow & m_A v_{yAf} + m_B v_{yBf} = m_A v_{yAi} + m_B v_{yBi} && \text{(Remplacer } p_y = mv_y \text{)} \\ & &\Rightarrow & (0,5)(-4) + (1)v_{yBf} = (0,5)(0) + (1)(-4 \sin(30^\circ)) && \text{(Remplacer val. num.)} \\ & &\Rightarrow & \boxed{v_{yBf} = 0 \text{ m/s}} && \text{(Évaluer } v_{yBf} \text{)} \end{aligned}$$

Évaluons le module de la vitesse finale de la rondelle **B** :

$$\begin{aligned} v_{Bf} &= \sqrt{v_{xBf}^2 + v_{yBf}^2} &\Rightarrow & v_{Bf} = \sqrt{(-0,964)^2 + (0)^2} && \text{(Remplacer val. num.)} \\ & &\Rightarrow & \boxed{v_{Bf} = 0,964 \text{ m/s}} && \text{(Évaluer } v_{Bf} \text{)} \end{aligned}$$

Évaluons l'orientation de la vitesse finale de la rondelle **B** par rapport à l'axe x positif (l'est) :

$$\begin{aligned} \tan(\theta) &= \frac{v_{yB f}}{v_{xB f}} & \Rightarrow & \theta = \arctan\left(\frac{v_{yB f}}{v_{xB f}}\right) \\ & & \Rightarrow & \theta = \arctan\left(\frac{0}{(-0,964)}\right) \\ & & \Rightarrow & \theta = \{ 0^\circ, 180^\circ \} \\ & & \Rightarrow & \boxed{\theta = 180^\circ} \quad (\text{car vitesse selon l'axe } y \text{ négatif}) \end{aligned}$$

(a) Notre rondelle **B** se déplace vers l'ouest à $0,964 \text{ m/s}$ en raison de $\theta = 180^\circ$ par rapport à l'est.

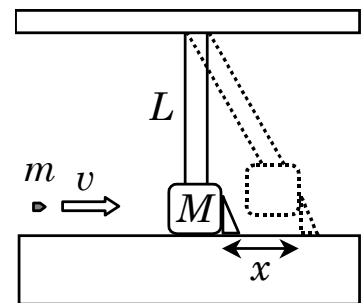
Évaluons nos énergies cinétiques :

- $K_i = \frac{1}{2}m_A v_{A i}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B i}^2 = \frac{1}{2}(0,5)(5)^2 + \frac{1}{2}(1)(4)^2 = 6,25 + 8 \Rightarrow \boxed{K_i = 14,25 \text{ J}}$
- $K_f = \frac{1}{2}m_A v_{A f}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B f}^2 = \frac{1}{2}(0,5)(4)^2 + \frac{1}{2}(1)(0,964)^2 = 4 + 0,48 \Rightarrow \boxed{K_f = 4,48 \text{ J}}$

(b) Nous avons perdu $14,25 - 4,48 = 9,77 \text{ J}$ ce qui représente $9,77/14,25 = 0,686 = 68,6 \%$ de l'énergie cinétique initiale.

Exercices

3.10.11 *Un pendule balistique.* Un pendule balistique représenté sur le schéma ci-contre sert à déterminer expérimentalement le module de la vitesse v d'une balle de fusil. La balle de masse m pénètre et s'incruste dans un bloc de bois de masse M accroché à deux cordes de longueur L (on utilise deux cordes pour éviter que le bloc ne tourne sur lui-même après l'impact). Une petite cale de masse négligeable est placée en arrière du bloc et se déplace d'une distance x lorsque le pendule atteint sa hauteur maximale. Si $x = 20 \text{ cm}$, $L = 80 \text{ cm}$, $M = 5 \text{ kg}$ et $m = 0,01 \text{ kg}$, déterminez v .



3.10.12 *Deux rondelles rebondissent l'une sur l'autre, en deux dimensions.* Deux rondelles entrent en collision sur une surface horizontale. Immédiatement avant la collision, la rondelle **A**, dont la masse est de 500 g , se déplace à 3 m/s vers l'est et la rondelle **B**, dont la masse est de 800 g , se déplace à 4 m/s vers le sud. Immédiatement après la collision, la rondelle **A** se déplace à 2 m/s vers le sud. Déterminez (a) le module et l'orientation de la vitesse de la rondelle **B** immédiatement après la collision et (b) le pourcentage d'énergie cinétique perdue lors de la collision.

Solutions

3.10.11 Un pendule balistique.

Déterminons l'angle d'élévation du bloc :

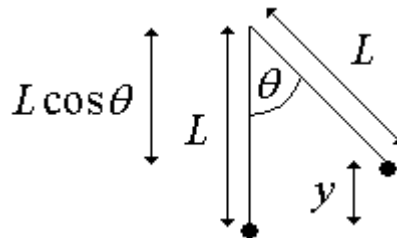
$$\sin(\theta) = \frac{x}{L} = \frac{(0,20)}{(0,80)} \Rightarrow \boxed{\theta = 14,48^\circ}$$

Déterminons la hauteur d'élévation du bloc :

$$y = L - L \cos \theta = L(1 - \cos \theta)$$

$$\Rightarrow y = (0,80)(1 - \cos(14,48^\circ))$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 0,025 \text{ m}}$$



Déterminons la vitesse du système balle + bloc après l'impact par conservation de l'énergie : (prenons $y = 0$ au point d'impact entre la balle et le bloc)

$$\begin{aligned} E_f &= E_i + W_{nc} &\Rightarrow K_f + U_{gf} &= K_i + U_{gi} + W_{nc} \\ &&\Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f &= \frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i + W_{nc} \\ &&\Rightarrow mgy_f &= \frac{1}{2}mv_i^2 \quad (y_i = 0, v_f = 0, W_{nc} = 0) \\ &&\Rightarrow v_i &= \sqrt{2gy_f} = \sqrt{2(9,8)(0,025)} \\ &&\Rightarrow v_i &= \pm 0,7 \text{ m/s} \\ &&\Rightarrow \boxed{v_i = 0,7 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

Utilisons la vitesse après l'impact pour évaluer la vitesse initiale de la balle avant l'impact par conservation de la quantité de mouvement : (prenons l'axe x positif vers la droite)

$$\begin{aligned} \sum \vec{p}_f &= \sum \vec{p}_i &\Rightarrow \vec{p}_{balle\ f} + \vec{p}_{bloc\ f} &= \vec{p}_{balle\ i} + \vec{p}_{bloc\ i} \\ &&\Rightarrow m_{balle}v_{balle\ f} + m_{bloc}v_{bloc\ f} &= m_{balle}v_{balle\ i} + m_{bloc}v_{bloc\ i} \quad (\text{selon l'axe } x) \\ &&\Rightarrow (m_{balle} + m_{bloc})v_f &= m_{balle}v_{balle\ i} + m_{bloc}v_{bloc\ i} \quad (\text{collision p. iné.}) \\ &&\Rightarrow (m_{balle} + m_{bloc})v_f &= m_{balle}v_{balle\ i} \quad (v_{bloc\ i} = 0) \\ &&\Rightarrow v_{balle\ i} &= \frac{(m_{balle} + m_{bloc})v_f}{m_{balle}} = \frac{(m + M)}{m}v_f \\ &&\Rightarrow v_{balle\ i} &= \frac{((0,01) + (5))(0,7)}{(0,01)} \\ &&\Rightarrow \boxed{v_{balle\ i} = 350,7 \text{ m/s}} \end{aligned}$$