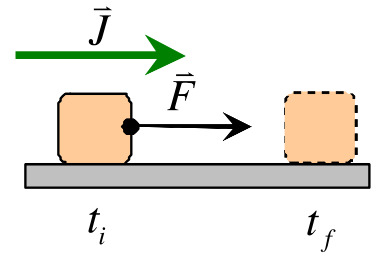
Chapitre 3.10a – L'impulsion et la quantité de mouvement

L'impulsion d'une force constante

L'impulsion correspond au transfert de quantité de mouvement causé par une force $\vec{F}$ appliquée durant un intervalle de temps Δt :

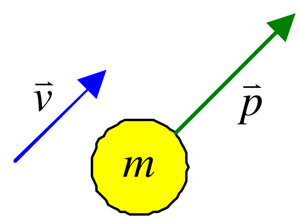


$$\vec{J} = \vec{F}\,\Delta t$$

où $\vec{J}$: Impulsion appliquée sur un objet (Ns)
$\vec{F}$: Force qui effectue l'impulsion (N)
Δt : Durée d'application de la force ($\Delta t = t_f - t_i$) (s)

La quantité de mouvement

La quantité de mouvement est une mesure de l'état de mouvement d'un objet ayant une vitesse de translation $\vec{v}$ et une masse m. On définit classiquement[1] la quantité de mouvement de la façon suivante :



$$\vec{p} = m\vec{v}$$

où $\vec{p}$: La quantité de mouvement associé à un objet ($\text{kg} \cdot \text{m/s}$)
m : La masse de l'objet (kg)
$\vec{v}$: La vitesse de l'objet (m/s)

Théorème de la quantité de mouvement

Le **théorème** de la quantité de mouvement nous permet d'affirmer que **l'impulsion** est **l'agent** qui fait **<u>varier</u> la quantité de mouvement** dans le **temps** :

Puisque qu'une impulsion produit une variation de la quantité de mouvement, nous pouvons ajouter ce terme à notre théorème de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{p}_f = \vec{p}_i + \vec{J}$$

où $\vec{p}_f$: Quantité de mouvement final (Ns ou $\text{kg} \cdot \text{m/s}$)
$\vec{p}_i$: Quantité de mouvement initiale (Ns ou $\text{kg} \cdot \text{m/s}$)
$\vec{J}$: Impulsion totale extérieure appliquée (Ns)

Unité : $\text{Ns} = \dfrac{\text{kg m}}{\text{s}^2}\text{s} = \dfrac{\text{kg m}}{\text{s}} = \text{kg}\dfrac{\text{m}}{\text{s}}$

---

[1] En mécanique relativiste, la quantité de mouvement est égale à $\vec{p} = \dfrac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$.

Preuve :

À partir de la 2ième loi de Newton, appliquons une force durant un intervalle de temps (impulsion $\vec{J}$) afin de produire une variation de la quantité de mouvement $\vec{p}$:

$\vec{F} = m\vec{a}$	$\Rightarrow$	$\vec{F} = m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$	(Remplacer $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$)
	$\Rightarrow$	$\vec{F}\mathrm{d}t = m\,\mathrm{d}\vec{v}$	(Multiplier par $\mathrm{d}t$)
	$\Rightarrow$	$\vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}(m\vec{v})$	(Distribuer m dans la dérivée)
	$\Rightarrow$	$\vec{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\vec{p}$	(Remplacer $\vec{p} = m\vec{v}$)
	$\Rightarrow$	$\vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p}$	(Relaxer notation $\mathrm{d} \to \Delta$)
	$\Rightarrow$	$\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$	(Remplacer $\vec{J} = \vec{F}\Delta t$)
	$\Rightarrow$	$\vec{p}_f = \vec{p}_i + \vec{J}$ ■	(Réécriture)

Situation A : *On pousse une boîte*. Une boîte 2 kg ayant une vitesse initiale de 2 m/s selon l'axe négatif des x est poussée à l'aide d'une force de 5 N selon l'axe positif des x pendant 3 secondes. On désire déterminer la vitesse de la boîte après 3 secondes de poussée.

Appliquons le théorème de la quantité de mouvement selon l'axe x afin d'évaluer la vitesse de la boîte après 3 secondes de poussée constante :

$p_{xf} = p_{xi} + J_x$	$\Rightarrow$	$(mv_{xf}) = (mv_{xi}) + J_x$	(Remplacer $p_x = mv_x$)
	$\Rightarrow$	$mv_{xf} = mv_{xi} + (F_x\Delta t)$	(Remplacer $J_x = F_x\Delta t$)
	$\Rightarrow$	$(2)v_{xf} = (2)(-2) + (5)(3)$	(Remplacer valeurs num.)
	$\Rightarrow$	$2v_{xf} = -4 + 15$	(Calcul)
	$\Rightarrow$	$\boxed{v_{xf} = 5{,}5 \ \text{m/s}}$	(Évaluer v_{xf})

La 2ième loi de Newton avec la quantité de mouvement

La 2ième loi de Newton peut être réécrite à l'aide de la définition de la quantité de mouvement $\vec{p}$. Sous cette forme[2], cette loi permet plus facilement de mette en relation l'influence d'une force et la modification de l'état de mouvement d'un objet :

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

où $\vec{F}$: La force appliquée en newton (N)

$\vec{p}$: Quantité de mouvement associé à un objet ($\text{kg}\cdot\text{m/s}$)

t : Le temps en seconde (s)

[2] C'est plutôt sous cette forme qu'Isaac Newton a énoncé sa 2ième loi.

Preuve :

À partir de la 2ième loi de Newton, effectuons une réécriture de cette loi introduisant la notion de quantité de mouvement $\vec{p}$:

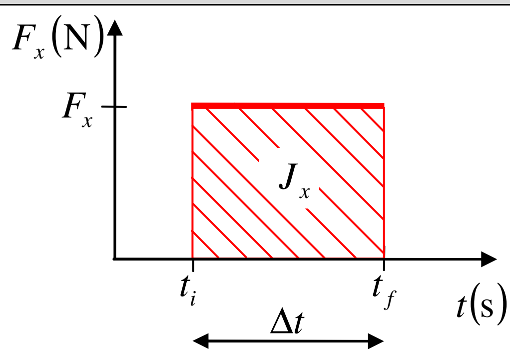
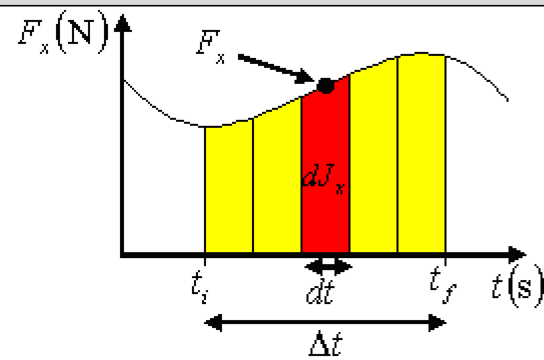
$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Définition de l'accélération, } \vec{a} = \mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Entrer la constante } m \text{ dans la dérivée)}$$

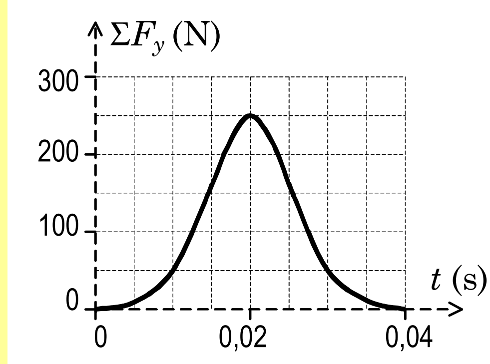
$$\Rightarrow \quad \vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} \quad \blacksquare \qquad \text{(Remplacer } \vec{p} = m\vec{v}\text{)}$$

L'impulsion d'une force non constante

Pour évaluer l'impulsion $\vec{J}$ d'une force $\vec{F}$, nous avons besoin d'évaluer **l'aire sous la courbe** d'un graphique de **force** en **fonction** du temps t. Ce calcul peut s'effectuer grâce à **l'intégrale** d'une fonction $F_x(t)$:

Force constante	Force non constante
	
$J_x = F_x \Delta t$	(selon l'axe x) $J_x = \int_{t=t_i}^{t_f} F_x \, \mathrm{d}t$ (vectoriel) $\vec{J} = \int_{t=t_i}^{t_f} \vec{F} \, \mathrm{d}t$

Chapitre 3.12 - Situation 1 : ***Une balle rebondit.*** Une balle de 0,1 kg rebondit sur le sol. L'interaction entre le sol et la balle dure 0,04 s. Pendant cet intervalle de temps, la force résultante agissant sur la balle (selon un axe *y* dont le sens positif est orienté vers le haut) est donnée par le graphique ci-contre. Immédiatement avant le début de l'interaction, la vitesse de la balle est égale à $-20\ \vec{j}$ m/s. On désire déterminer sa vitesse immédiatement après la fin de l'interaction.

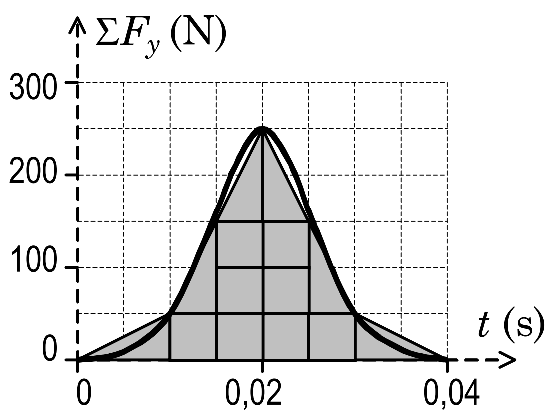


Évaluons la quantité de mouvement avant l'impact :

$\vec{p}_i = m\vec{v}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_i = (0,1)(-20\vec{j}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{p}_i = -2\ \vec{j}\ \text{Ns}}$

Évaluons l'impulsion donnée par le sol :

$1\ \text{carré} = 1\,\text{un} = 50\,\text{N} \times 0{,}005\,\text{s} = 0{,}25\,\text{Ns}$



Avec :

$$\vec{J} = \int_{t=t_i}^{t_f} \vec{F}\ dt = \text{aire sous la courbe}$$

$\Rightarrow \quad \vec{J} = 8\,\text{carrés}\,(1\,\text{un})\,\vec{j} + 6\,\text{triangles}\,(1\,\text{un})\,\vec{j}$

$\Rightarrow \quad \vec{J} = 14 \times 0{,}25\,\vec{j}$

$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{J} = 3{,}5\ \vec{j}\ \text{Ns}}$

Nous pouvons évaluer la quantité de mouvement finale à partir de la conservation de la quantité de mouvement :

$\vec{p}_f = \vec{p}_i + \vec{J} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_f = (-2\vec{j}) + (3{,}5\vec{j})$ (Remplacer num.)

$\Rightarrow \quad \vec{p}_f = 1{,}5\ \vec{j}$ (Calcul)

$\Rightarrow \quad m\vec{v}_f = 1{,}5\ \vec{j}$ (Quantité de mouvement, $\vec{p} = m\vec{v}$)

$\Rightarrow \quad (0{,}1)\vec{v}_f = 1{,}5\vec{j}$ (Remplacer num.)

$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_f = 15\ \vec{j}\ \text{m/s}}$ (Isoler la vitesse finale $\vec{v}_f$)

L’énergie cinétique avec la quantité de mouvement

À partir de la quantité de mouvement $\vec{p}$ d’une particule, nous pouvons établir la relation classique[3] suivante avec l’énergie cinétique K :

$$K = \frac{p^2}{2m}$$

où K : L’énergie cinétique de la particule (J)
p : La quantité de mouvement de la particule ($\text{kg} \cdot \text{m/s}$)
m : La masse de la particule (kg)

Preuve :

À partir de l’expression de l’énergie cinétique, introduisons la référence à la quantité de mouvement :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}mv^2\frac{m}{m} \qquad \text{(Multiplier par } m/m\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2m}(mv)^2 \qquad \text{(Réorganisation des termes)}$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{p^2}{2m} \quad \blacksquare \qquad \text{(Remplacer } p = mv\text{)}$$

[3] Lorsque la particule voyage à une vitesse de l’ordre de la vitesse de la lumière ($\approx 3\times10^8$ m/s), alors l’expression classique doit être adaptée à la mécanique relativiste.