Chapitre 2.X1 – La dynamique différentielle

L'équation différentielle

Une équation différentielle est une relation entre plusieurs fonctions et leurs dérivées. À partir de cette équation, on peut parfois déduire par des techniques mathématiques ou par intuition les fonctions qui vérifient l'équation différentielle en question. Autrement, il faut procéder de façon numérique à l'aide d'algorithme comme ceux présentés dans le **Chapitre 1.X1 : Intégrale numérique en cinématique**.

Voici quelques équations différentielles connues en physique :

La chute libre :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + g = 0$$

La chute avec résistance au mouvement du 1$^{\text{er}}$ degré :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{b}{m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + g = 0$$

L'oscillateur harmonique simple :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$$

L'oscillateur harmonique simple amorti :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \eta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0{}^2 x = 0$$

L'oscillateur harmonique simple amorti-entretenu :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \eta\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0{}^2 x = A\cos(\omega t)$$

L'équation d'onde :

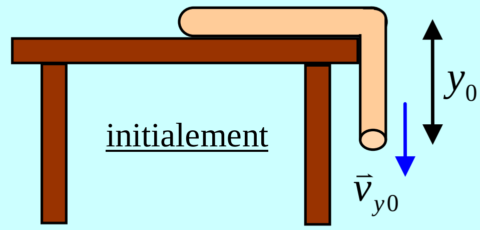
$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - v^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = 0$$

Toutes ces équations ressemblent quelque peu à l'équation quadratique

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ,$$

mais les résoudre est beaucoup plus difficile. Leurs solutions ne sont pas des nombres réels x mais plutôt des fonctions du temps $x(t)$ qui peuvent prendre différentes formes équivalentes.

Situation 1 : *La corde sur le bord de la table.* Une corde de longueur L et de masse m glisse sans frottement sur le bord d'une table horizontale. Initialement, l'extrémité pendante de la corde est située à une hauteur y_0 sous la table et se déplace à une vitesse v_{y0} (voir schéma ci-contre).



On désire **(a)** faire un schéma des forces et définir la 2$^{\text{ième}}$ loi de Newton pour cette situation, **(b)** écrire l'équation différentielle associée à la situation et **(c)** évaluer l'équation de la vitesse $v_y(y)$ de l'extrémité de la corde en résolvant l'équation différentielle dans le domaine compris entre $y = y_0$ et $y = L$.

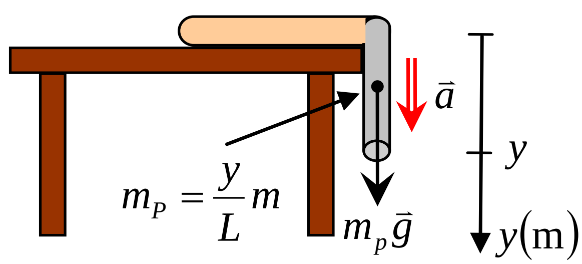
Effectuons le schéma des forces et écrivons l'expression de la 2$^{\text{ième}}$ loi de Newton selon l'axe <u>y positif vers le bas</u>. Il est important de noter que <u>seulement la portion de corde qui est à la verticale</u> m_P va appliquer une force gravitationnelle pour pousser l'ensemble de la corde :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad m_p \vec{g} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad m_p g = m a_y$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{y}{L} mg = m a_y} \quad \textbf{(a)}$$



(sans les forces sur la partie de corde horizontale)

À partir de la 2$^{\text{ième}}$ loi de Newton et de la définition de l'accélération, écrivons l'équation différentielle de la situation :

$$\frac{y}{L} mg = m a_y \quad \Rightarrow \quad \frac{y}{L} g = a_y \qquad \text{(Simplifier } m\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad a_y - \frac{y}{L} g = 0 \qquad \text{(Mettre l'équation égale à zéro)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{g}{L} y = 0} \quad \textbf{(b)} \qquad \left(\text{Remplacer } a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\right)$$

Résolvons l'équation différentielle en évaluant la fonction de la vitesse $v_y(y)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{g}{L} y = 0 \qquad \text{(Équation différentielle)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{g}{L} y \qquad \text{(Isoler terme en } y\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{g}{L} y \qquad \left(\text{Remplacer } \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} = \frac{g}{L} y \qquad \left(\text{Multiplier par 1, } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} = 1\right)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}v_y \frac{v_y}{\mathrm{d}y} = \frac{g}{L} y \qquad \left(\text{Remplacer } v_y = \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad v_y \,\mathrm{d}v_y = \frac{g}{L} y \,\mathrm{d}y \qquad \text{(Regrouper terme en } y \text{ et } v_y\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{v_y = v_{y0}}^{v_y} v_y \,\mathrm{d}v_y = \int_{y = y_0}^{y} \frac{g}{L} y \,\mathrm{d}y \qquad \text{(Poser l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{v_y = v_{y0}}^{v_y} v_y \,\mathrm{d}v_y = \frac{g}{L} \int_{y = y_0}^{y} y \,\mathrm{d}y \qquad \text{(Factoriser les constantes)}$$

$$\Rightarrow \quad \left[\frac{v_y{}^2}{2}\right]_{v_{y0}}^{v_y} = \frac{g}{L}\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y_0}^{y} \qquad \left(\text{Résoudre l'intégrale : } \int x\,\mathrm{d}x = x^2/2 + C\right)$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{(v_y)^2}{2} - \frac{(v_{y0})^2}{2}\right) = \frac{g}{L}\left(\frac{(y)^2}{2} - \frac{(y_0)^2}{2}\right) \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad v_y{}^2 - v_{y0}{}^2 = \frac{g}{L}\left(y^2 - y_0{}^2\right) \qquad \text{(Simplifier le facteur 2)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_y = \sqrt{\frac{g}{L}\left(y^2 - y_0{}^2\right) + v_{y0}{}^2}} \quad \textbf{(c)} \qquad \text{(Isoler } v_y\text{)}$$

<u>Condition limite :</u>

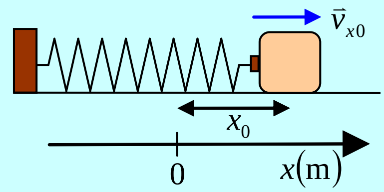
- $y \le L$, car la position ne peut pas dépasser L, sinon la corde est complètement tombée.)
- Si $y \ge L$, l'équation différentielle change de forme et la solution de l'équation du mouvement change également. Il y a donc changement de palier vers une chute libre tel que

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - g = 0 \qquad \text{et} \qquad v_y = v_{y0} + g\,t$$

Équation différentielle de la chute libre où est y positif vers le bas.

Équation du mouvement de type MUA où y positif vers le bas.

Situation 2 : *Le système masse-ressort.* Un bloc de masse m fixé à un ressort de constante de rappel k oscille horizontalement. Le bloc est situé initialement à la coordonnée x_0 par rapport au point d'équilibre et qu'il se déplace à la vitesse initiale v_{x0}.



On désire **(a)** faire un schéma des forces et définir la 2$^{\text{ième}}$ loi de Newton pour cette situation, **(b)** écrire l'équation différentielle associée à la situation et **(c)** évaluer l'équation de la position $x(t)$ du bloc en résolvant l'équation différentielle.

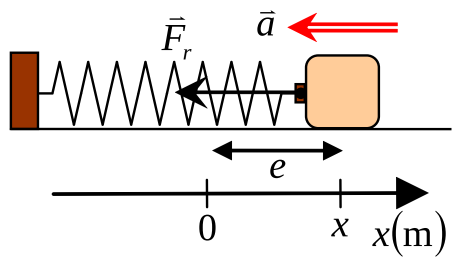
Effectuons le schéma des forces et écrivons l'expression de la 2$^{\text{ième}}$ loi de Newton selon l'axe x positif vers la droite. Puisque le système masse-ressort à l'horizontale est à l'équilibre lorsque le ressort n'est pas déformé ($e = 0$), nous pouvons affirmer que la déformation du ressort e est égale à la position x du bloc ($x = 0$) :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_r = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad -ke = ma_x \qquad (F_r = -ke)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{-kx = ma_x} \quad \textbf{(a)}$$



(sans les forces verticales)

À partir de la 2$^{\text{ième}}$ loi de Newton et de la définition de l'accélération, écrivons l'équation différentielle de la situation :

$$-kx = ma_x \quad \Rightarrow \quad -\frac{k}{m}x = a_x \qquad \text{(Diviser par } m\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad a_x + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \text{(Mettre l'équation égale à zéro)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0} \quad \textbf{(b)} \qquad \left(\text{Remplacer } a_x = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\right)$$

Résolvons l'équation différentielle en évaluant la fonction de la position $x(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \text{(Équation différentielle)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0 \qquad \text{(Remplacer } \omega^2 = k/m\text{, fréquence angulaire)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x \qquad \text{(Séparer les termes)}$$

Exprimons la dérivée seconde de la position en fonction de la dérivée première de la vitesse :

	$\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$	(Équation précédente)
$\Rightarrow$	$\dfrac{dv_x}{dt} = -\omega^2 x$	(Remplacer $\dfrac{d^2x}{dt^2} = \dfrac{d\,v_x}{dt}$)
$\Rightarrow$	$dv_x = -\omega^2 x\, dt$	(Isoler dv_x)
$\Rightarrow$	$dv_x = -\omega^2 x\, dt \dfrac{dx}{dx}$	(Multiplier par $1 = \dfrac{dx}{dx}$)
$\Rightarrow$	$dv_x = -\omega^2 x\, dx \dfrac{dt}{dx}$	(Manipulation)
$\Rightarrow$	$dv_x = -\omega^2 x\, dx \dfrac{1}{v_x}$	(Remplacer $v_x = \dfrac{dx}{dt}$ donc $\dfrac{1}{v_x} = \dfrac{dt}{dx}$)
$\Rightarrow$	$v_x\, dv_x = -\omega^2 x\, dx$	(Multiplier par v_x)
$\Rightarrow$	$\displaystyle\int_{v_x = v_{x0}}^{v_x} v_x\, dv_x = \int_{x = x_0}^{x} -\omega^2 x\, dx$	(Effectuer l'intégrale entre $t = 0$ et t)
$\Rightarrow$	$\displaystyle\int_{v_x = v_{x0}}^{v_x} v_x\, dv_x = -\omega^2 \int_{x = x_0}^{x} x\, dx$	(Factoriser les constantes)
$\Rightarrow$	$\left[\dfrac{{v_x}^2}{2}\right]_{v_{x0}}^{v_x} = -\omega^2 \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_{x_0}^{x}$	(Résoudre l'intégrale : $\int x\, dx = x^2/2 + C$)
$\Rightarrow$	$\left(\dfrac{(v_x)^2}{2} - \dfrac{(v_{x0})^2}{2}\right) = -\omega^2 \left(\dfrac{(x)^2}{2} - \dfrac{(x_0)^2}{2}\right)$	(Évaluer l'intégrale)
$\Rightarrow$	${v_x}^2 - {v_{x0}}^2 = -\omega^2 \left(x^2 - {x_0}^2\right)$	(Simplifier ½)
$\Rightarrow$	${v_x}^2 = -\omega^2 \left(x^2 - {x_0}^2\right) + {v_{x0}}^2$	(Isoler ${v_x}^2$)
$\Rightarrow$	${v_x}^2 = -\omega^2 \left(x^2 - {x_0}^2 - \dfrac{{v_{x0}}^2}{\omega^2}\right)$	(Mettre ${v_{x0}}^2$ dans la parenthèse)
$\Rightarrow$	${v_x}^2 = -\omega^2 \left(x^2 - \left({x_0}^2 + \dfrac{{v_{x0}}^2}{\omega^2}\right)\right)$	(Factoriser signe négatif)
$\Rightarrow$	${v_x}^2 = -\omega^2 \left(x^2 - A^2\right)$	(Remplacer $A^2 = {x_0}^2 + \dfrac{{v_{x0}}^2}{\omega^2}$, amplitude)

Afin d'éviter les nombres complexes ($i=\sqrt{-1}$) lorsqu'on appliquera la racine carré pour isoler v_x, il faudra entrer le signe négatif devant l'expression de droite dans la parenthèse :

	$v_x^{\ 2}=-\omega^2\left(x^2-A^2\right)$	(Expression précédente)
$\Rightarrow$	$v_x^{\ 2}=\omega^2\left(A^2-x^2\right)$	(Distribuer négatif afin d'éviter $i=\sqrt{-1}$)
$\Rightarrow$	$\boxed{v_x=\omega\sqrt{A^2-x^2}}$	(Effectuer la racine carrée, on obtient $v_x(x)$)
$\Rightarrow$	$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\omega\sqrt{A^2-x^2}$	(Remplacer $v_x=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$)
$\Rightarrow$	$\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A^2-x^2}}=\omega\,\mathrm{d}t$	(Mettre les termes en x ensemble)
$\Rightarrow$	$\displaystyle\int_{x=x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A^2-x^2}}=\int_{t=0}^{t}\omega\,\mathrm{d}t$	(Effectuer l'intégrale entre $t=0$ et t)
$\Rightarrow$	$\left[\arcsin(x/A)\right]_{x_0}^{x}=\omega[t]_0^t$	(Résoudre l'intégrale : $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{A^2-x^2}}=\arcsin(x/A)$)
$\Rightarrow$	$\arcsin(x/A)-\arcsin(x_0/A)=\omega t$	(Évaluer l'intégrale)
$\Rightarrow$	$\arcsin(x/A)=\omega t+\arcsin(x_0/A)$	(Isoler le terme $\arcsin(x/A)$)
$\Rightarrow$	$\arcsin(x/A)=\omega t+\phi$	(Remplacer $\phi=\arcsin(x_0/A)$, phase)
$\Rightarrow$	$x/A=\sin(\omega t+\phi)$	(Appliquer le sinus : $\sin(\arcsin(x))=x$)
$\Rightarrow$	$\boxed{x=A\sin(\omega t+\phi)}$ **(c)**	(Isoler x)

<u>Rappel :</u>

- $\omega=\sqrt{k/m}$ (Fréquence angulaire des oscillations)
- $A=\sqrt{x_0^{\ 2}+\dfrac{v_{x0}^{\ 2}}{\omega^2}}$ (Amplitude des oscillations)
- $\phi=\arcsin(x_0/A)$ (Constante de phase)

<u>Condition limite :</u>

- $A^2-x^2>0$ (La position x ne peut pas être supérieure à l'amplitude A.)

Situation 3 : *Une bille tombe à l'eau.* Une bille de masse m tombe verticalement à l'eau et se déplace à une vitesse initiale v_{v0} lorsqu'elle est complètement submergée dans l'eau. Durant sa chute, la résistance de l'eau exerce sur la bille une force $\vec{f}_{\text{eau}} = -b\vec{v}$ qui dépend de la vitesse de la bille. On désire **(a)** faire un schéma des forces et définir la 2ième loi de Newton pour cette situation, **(b)** écrire l'équation différentielle associée à la situation, **(c)** évaluer l'équation de la vitesse $v_v(t)$ en résolvant l'équation différentielle et **(d)** évaluer l'équation de la position $y(t)$. On néglige la force d'Archimède qu'applique l'eau sur la bille.

Effectuons le schéma des forces et écrivons l'expression de la 2ième loi de Newton selon l'axe y positif vers le haut :

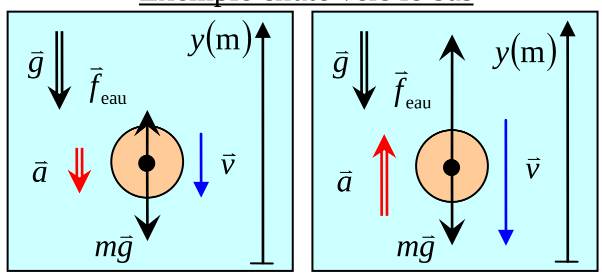
$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad m\vec{g} + \vec{f}_{\text{eau}} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \quad m\vec{g} - b\vec{v} = m\vec{a} \qquad (\vec{f}_{\text{eau}} = -b\vec{v})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{-mg - bv_y = ma_y} \qquad \textbf{(a)}$$

Exemple chute vers le bas



(à faible vitesse) (à grande vitesse)

À partir de la 2ième loi de Newton et de la définition de l'accélération, écrivons l'équation différentielle de la situation :

$$-mg - bv_y = ma_y \quad \Rightarrow \quad -g - \frac{b}{m}v_y = a_y \qquad \text{(Simplifier } m\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad a_y + \frac{b}{m}v_y + g = 0 \qquad \text{(Écrire termes du même côté)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} + \frac{b}{m}v_y + g = 0} \quad \textbf{(b)} \qquad \left(\text{Remplacer } a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\right)$$

Résolvons l'équation différentielle en évaluant la fonction de la vitesse $v_y(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} + \frac{b}{m}v_y + g = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -g - \frac{b}{m}v_y \qquad \left(\text{Isoler le terme } \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -g\left(1 + \frac{b}{mg}v_y\right) \qquad \text{(Factoriser } g\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -g\left(1 + \frac{v_y}{v_L}\right)} \qquad \text{(Remplacer}^{1}\ v_L = mg/b\text{)}$$

[1] Le changement de variable $v_L = mg/b$ correspond à la vitesse limite car $[v_L] = \text{m/s}$.

Continuons à développer notre expression en isolant les deux composantes infinitésimales :

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -g\left(1+\frac{v_y}{v_L}\right) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{d}v_y = -g\left(1+\frac{v_y}{v_L}\right)\mathrm{d}t \qquad \text{(Isoler } dv_y\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad g\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}v_y}{1+v_y/v_L} \qquad \text{(Regrouper terme en } v_y\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{t=0}^{t} g\,\mathrm{d}t = -\int_{v_y=v_{y0}}^{v_y} \frac{\mathrm{d}v_y}{1+v_y/v_L} \qquad \text{(Poser l'intégrale avec les bornes)}$$

$$\Rightarrow \quad g\int_{t=0}^{t} \mathrm{d}t = -\int_{v_y=v_{y0}}^{v_y} \frac{\mathrm{d}v_y}{1+v_y/v_L} \qquad \text{(Factoriser la constante } g\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{g\,t = -\int_{v_y=v_{y0}}^{v_y} \frac{\mathrm{d}v_y}{1+v_y/v_L}} \qquad \text{(Résoudre l'intégrale sur } t\text{)}$$

Effectuons le changement de variable

$$u = 1+v_y/v_L$$

afin de résoudre notre intégrale sur v_y. Ce changement nous donne les relations différentielles

$$du = dv_y/v_L \qquad \text{et} \qquad dv_y = v_L du \ .$$

Les bornes de l'intégrale prennent les valeurs suivantes :

$$v_y \to v_{y0} \qquad \Rightarrow \qquad u \to u_0 = 1+v_{y0}/v_L$$

$$v_y \to v_y \qquad \Rightarrow \qquad u \to u = 1+v_y/v_L$$

Ainsi :

$$g\,t = -\int_{v_y=v_{y0}}^{v_y} \frac{\mathrm{d}v_y}{1+v_y/v_L} \quad \Rightarrow \quad g\,t = -\int_{u=u_0}^{u} \frac{v_L\mathrm{d}u}{u} \qquad \text{(Remplacer } v_y \text{ et } \mathrm{d}v_y\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad g\,t = -v_L\int_{u=u_0}^{u} \frac{\mathrm{d}u}{u} \qquad \text{(Factoriser constante } -v_L\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad g\,t = -v_L\left[\ln|u|\right]_{u_0}^{u} \qquad \text{(Résoudre l'intégrale : } \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad g\,t = -v_L\left(\ln|u| - \ln|u_0|\right) \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad g\,t = -v_L \ln\left|\frac{u}{u_0}\right| \qquad \text{(Identité : } \ln(A)-\ln(B)=\ln(A/B)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{-\frac{g\,t}{v_L} = \ln\left|\frac{u}{u_0}\right|} \qquad \text{(Isoler terme ln)}$$

Appliquons la fonction exponentielle de chaque côté afin d'isoler u qui contient une référence à la vitesse v_y recherchée :

$$-\frac{g\,t}{v_L} = \ln\left|\frac{u}{u_0}\right| \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{gt}{v_L}} = \frac{u}{u_0} \qquad \text{(Appliquer l'exponentiel : } e^{\ln x} = x \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad u_0 e^{-\frac{gt}{v_L}} = u \qquad \text{(Isoler } u\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad (1 + v_{y0}/v_L)e^{-\frac{gt}{v_L}} = 1 + v_y/v_L \qquad \text{(Remplacer } u \text{ et } u_0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad (1 + v_{y0}/v_L)e^{-\frac{gt}{v_L}} = \frac{v_L + v_y}{v_L} \qquad \text{(Dénominateur commun)}$$

$$\Rightarrow \quad v_L(1 + v_{y0}/v_L)e^{-\frac{gt}{v_L}} = v_L + v_y \qquad \text{(Multiplier par } v_L\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_y = v_L(1 + v_{y0}/v_L)e^{-\frac{gt}{v_L}} - v_L \qquad \text{(Isoler } v_y\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_y = (v_L + v_{y0})e^{-\frac{gt}{v_L}} - v_L} \quad \textbf{(c)} \qquad \text{(Distribuer } v_L\text{)}$$

On réalise que l'équation de la vitesse v_y tend vers la valeur $-v_L$ lorsque $t \to \infty$ ce qui représente la vitesse limite de la chute avec la résistance de l'eau :

$$-v_L = \lim_{t\to\infty} v_y(t) \quad \Rightarrow \quad -v_L = \lim_{t\to\infty}\left((v_L + v_{y0})e^{-\frac{gt}{v_L}} - v_L\right) \qquad \text{(Remplacer } v_y\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad -v_L = -v_L + \lim_{t\to\infty}(v_L + v_{y0})e^{-\frac{gt}{v_L}} \qquad \text{(Sortir constante de la limite)}$$

$$\Rightarrow \quad -v_L = -v_L + (v_L + v_{y0})\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{gt}{v_L}} \qquad \text{(Factoriser constante de la limite)}$$

$$\Rightarrow \quad -v_L = -v_L + \lim_{t\to\infty}(v_L + v_{y0})e^{-\infty}$$

$$\Rightarrow \quad -v_L = -v_L \quad \blacksquare$$

<u>Rappel :</u>

- $v_L = mg/b$ (Vitesse limite de la chute)

Évaluons l'équation de la position $y(t)$ de la bille à partir de son équation $v_y(t)$:

$$v_y = (v_L + v_{y0})e^{-\frac{gt}{v_L}} - v_L \qquad \text{(Expression de } v_y\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (v_L + v_{y0})e^{-\frac{gt}{v_L}} - v_L \qquad \text{(Remplacer } v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}y = \left[(v_L + v_{y0})e^{-\frac{gt}{v_L}} - v_L\right]\mathrm{d}t \qquad \text{(Isoler d}y\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{y=y_0}^{y}\mathrm{d}y = \int_{t=0}^{t}\left[(v_L + v_{y0})e^{-\frac{gt}{v_L}} - v_L\right]\mathrm{d}t \qquad \text{(Poser l'intégrale avec les bornes)}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{y=y_0}^{y}\mathrm{d}y = \int_{t=0}^{t}(v_L + v_{y0})e^{-\frac{gt}{v_L}}dt + \int_{t=0}^{t}-v_L\mathrm{d}t \qquad \text{(Distribuer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad \int_{y=y_0}^{y}\mathrm{d}y = (v_L + v_{y0})\int_{t=0}^{t}e^{-\frac{gt}{v_L}}\mathrm{d}t - v_L\int_{t=0}^{t}\mathrm{d}t \qquad \text{(Factoriser constante)}$$

$$\Rightarrow \quad [y]_{y_0}^{y} = (v_L + v_{y0})\int_{t=0}^{t}e^{-\frac{gt}{v_L}}\mathrm{d}t - v_L[t]_0^t \qquad \text{(Résoudre l'intégrale : } \int\mathrm{d}y = y,\ \int\mathrm{d}t = t\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad (y - y_0) = (v_L + v_{y0})\int_{t=0}^{t}e^{-\frac{gt}{v_L}}dt - v_L(t - 0) \qquad \text{(Évaluer les intégrales)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = y_0 - v_L t + (v_L + v_{y0})\int_{t=0}^{t}e^{-\frac{gt}{v_L}}\mathrm{d}t} \qquad \text{(Isoler } y\text{)}$$

Résolvons l'intégrale restante avec le changement de variable u :

$$I = \int e^{-\frac{gt}{v_L}}dt \qquad \text{avec} \qquad u = -\frac{gt}{v_L} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}u = -\frac{g}{v_L}\mathrm{d}t$$

$$\text{tel que} \qquad \mathrm{d}t = -\frac{v_L}{g}\mathrm{d}u$$

$$I = \int e^{-\frac{gt}{v_L}}\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad I = \int -\frac{v_L}{g}e^u\mathrm{d}u \qquad \text{(Changement de variable)}$$

$$\Rightarrow \quad I = -\frac{v_L}{g}\int e^u\mathrm{d}u \qquad \text{(Factoriser constante)}$$

$$\Rightarrow \quad I = -\frac{v_L}{g}e^u \qquad \text{(Résoudre l'intégrale : } \int e^u\mathrm{d}u = e^u\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = -\frac{v_L}{g}e^{-\frac{gt}{v_L}}} \qquad \text{(Remplacer } u = -\frac{gt}{v_L}\text{)}$$

Évaluons les bornes de l'intégrale entre $t = 0 \to t$:

$$I_{évalué} = \int_{t=0}^{t} e^{-\frac{gt}{v_L}}\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad I_{évalué} = \left[-\frac{v_L}{g} e^{-\frac{gt}{v_L}} \right]_0^t \qquad \text{(Résoudre l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad I_{évalué} = \left(-\frac{v_L}{g} e^{-\frac{gt}{v_L}} \right) - \left(-\frac{v_L}{g} e^{-\frac{g(0)}{v_L}} \right) \qquad \text{(Évaluer l'intégrale)}$$

$$\Rightarrow \quad I_{évalué} = -\frac{v_L}{g} e^{-\frac{gt}{v_L}} + \frac{v_L}{g} \qquad \text{(Simplifier et } e^0 = 1\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_{évalué} = \frac{v_L}{g}\left(1 - e^{-\frac{gt}{v_L}} \right)} \qquad \text{(Factoriser } \frac{v_L}{g}\text{)}$$

Évaluons la position $y(t)$ à partir des calculs précédents :

$$y = y_0 - v_L t + (v_L + v_{y0}) \int_{t=0}^{t} e^{-\frac{gt}{v_L}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{(Équation précédente)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = y_0 + v_L t + (v_L + v_{y0}) \frac{v_L}{g}\left(1 - e^{-\frac{gt}{v_L}} \right)} \qquad \textbf{(d)} \qquad \text{(Remplacer } \int_{t=0}^{t} e^{-\frac{gt}{v_L}}\,\mathrm{d}t\text{)}$$