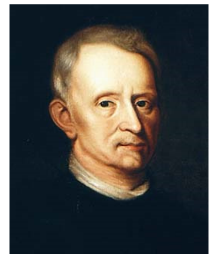
Chapitre 2.3b – La loi de Hooke

Le ressort idéal

En 1676, Robert Hooke (physicien anglais) établie un lien entre la déformation d'un objet et la volonté de l'objet à revenir à son état naturelle (non déformé). Pour ce faire, l'objet déformé doit appliquer une force sur son environnement qui le contraint à épouser une forme non stable. Dans le cas du ressort idéal, élasticité et linéaire, Hooke réalise qu'un ressort étiré ou comprimé applique une force proportionnelle à l'étirement ou à la compression du ressort. Cette force est alors appliquée sur les deux extrémités où le ressort est fixé. Lorsque le ressort possède sa longueur naturelle, il n'applique aucune force.



Robert Hooke
(1635-1703)

Pour un **ressort idéal** de **masse négligeable**, la force F_r appliquée par le ressort est égale à l'étirement ou à la compression e du ressort multiplié par la constante du ressort k (constante de Hooke):

$$F_r = ke$$

où F_r : Force appliquée par le ressort (N)
k : Constante de rappel du ressort (N/m)
e : Module de l'étirement ou de la compression du ressort (m)

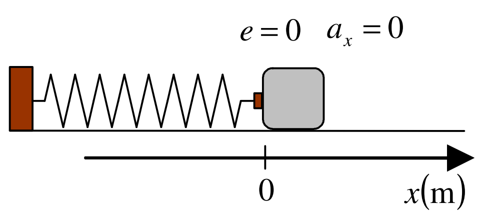
Ressort pour suspension
de voiture.

Les trois comportements du ressort

Le ressort peut appliquer aucune force, pousser ou tirer sur un objet en contact avec lui :

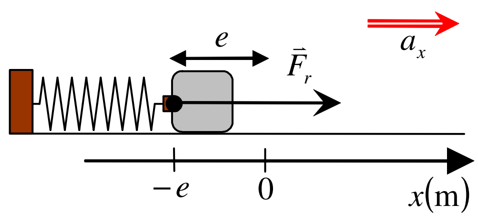
1) Lorsque le ressort possède sa longueur naturelle

   $\Rightarrow$ le ressort n'applique pas force



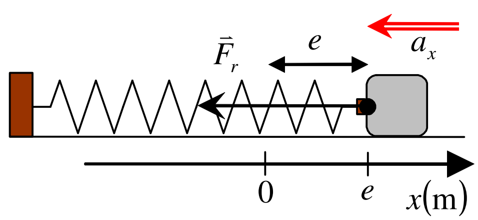
2) Lorsque le ressort est comprimé

   $\Rightarrow$ le ressort pousse



3) Lorsque le ressort est étiré

   $\Rightarrow$ le ressort tire



La définition vectorielle de la force du ressort

La force d'un ressort idéal peut être définie vectoriellement à l'aide du vecteur déformation $\vec{e}$ qui représente l'étirement ou la compression du ressort. Ce vecteur possède comme origine la position d'équilibre du ressort. On peut également utiliser l'axe x pour désigner la déformation du ressort. Si l'équilibre est atteinte à $x=0$ lorsque $e=0$, on peut faire l'association $e=x$:

Forme vectorielle	Forme selon l'axe x (équilibre à $x=0$)
$\vec{F}_r = -k\vec{e}$	$F_r = -kx$

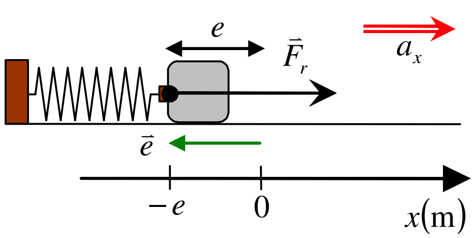
où $\vec{F}_r$: Force appliquée par le ressort (N)

k : Constante de rappel du ressort (N/m)

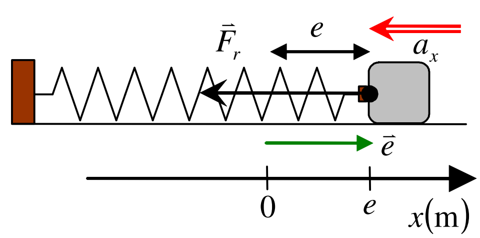
$\vec{e}$: Vecteur étirement ou compression du ressort (m)

x : Position de l'extrémité libre du ressort, $x=0$ est à la position d'équilibre (m)

<u>Compression du ressort :</u>



<u>Étirement du ressort :</u>

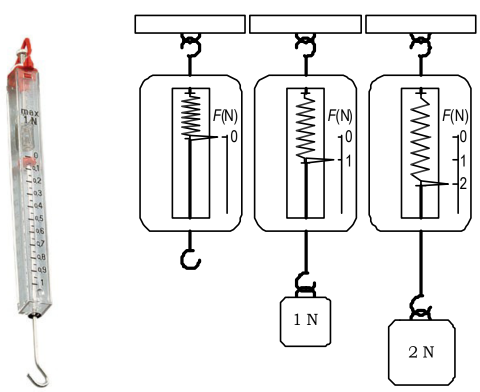


Le dynamomètre

Le **dynamomètre** est un outil qui permet de **mesurer** une **force appliquée** sur un objet à l'aide de la déformation d'un ressort.

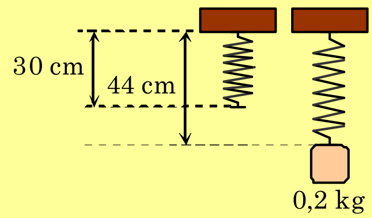
Puisque la déformation d'un ressort idéal est linéaire, alors la graduation sur le dynamomètre est linéaire (on double l'étirement, alors on double la force). On peut ainsi mesurer l'augmentation de la force appliquée par le dynamomètre ΔF_r par son augmentation de longueur Δe :

$$\Delta F_r = k\,\Delta e$$

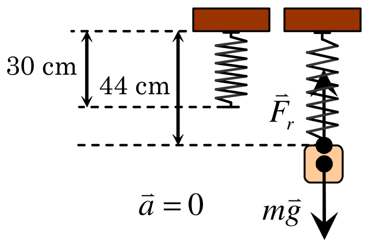


Dans cet exemple, la constante k = 1 N/m. Puisque la force augmente de 1 N, alors l'étirement du ressort augmente de 1 m.

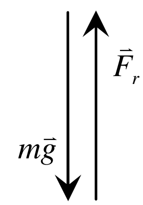
Situation 1 : ***Un ressort idéal.*** Un ressort idéal accroché au plafond possède une longueur naturelle de 30 cm. Lorsqu'un bloc de 0,2 kg est suspendu à son extrémité, sa longueur est de 44 cm (voir schéma ci-contre). On désire déterminer **(a)** la constante de rappel du ressort et **(b)** prévoir sa longueur lorsqu'on accroche un bloc de 0,5 kg à son extrémité.



Voici le schéma des forces de la situation :



Résolution de la 2^e loi de Newton graphiquement :



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{où} \quad \vec{F}_r + m\vec{g} = 0$$

Évaluons la constante du ressort à l'aide de la 2^e loi de Newton appliquée sur la masse $m = 0{,}2\ \text{kg}$:

$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_r + m\vec{g} = m\vec{a}$ (Remplacer $\sum \vec{F}$)

$\Rightarrow \quad \vec{F}_r + m\vec{g} = 0$ (Remplacer $\vec{a} = 0$)

$\Rightarrow \quad F_r - mg = 0$ (Décomposition des forces en y)

$\Rightarrow \quad F_r = mg$ (Isoler F_r)

$\Rightarrow \quad ke = mg$ (Remplacer $F_r = ke$)

$\Rightarrow \quad k = \dfrac{mg}{e}$ (Isoler k)

$\Rightarrow \quad k = \dfrac{(0{,}2)(9{,}8)}{(0{,}44 - 0{,}30)}$ (Remplacer valeurs numériques)

$\Rightarrow \quad \boxed{k = 14\ \text{N/m}}$ **(a)** (Évaluer k)

Pour évaluer la longueur du ressort lorsque l'on accroche un bloc $m = 0{,}5\ \text{kg}$, appliquons à nouveau la 2[e] loi de Newton sur la masse en utilisant la constante de rappel $k = 14\ \text{N/m}$:

$\sum \vec{F} = m\vec{a}$	$\Rightarrow$	$\vec{F}_r + m\vec{g} = m\vec{a}$	(Remplacer $\sum \vec{F}$)
	$\Rightarrow$	$\vec{F}_r + m\vec{g} = 0$	(Remplacer $\vec{a} = 0$)
	$\Rightarrow$	$F_r - mg = 0$	(Décomposition des forces en *y*)
	$\Rightarrow$	$F_r = mg$	(Isoler F_r)
	$\Rightarrow$	$ke = mg$	(Remplacer $F_r = ke$)
	$\Rightarrow$	$e = \dfrac{mg}{k}$	(Isoler *e*)
	$\Rightarrow$	$e = \dfrac{(0{,}5)(9{,}8)}{(14)}$	(Remplacer valeurs numériques)
	$\Rightarrow$	$\boxed{e = 0{,}35\ \text{m}}$	(Évaluer *e*)

Pour évaluer la longueur du ressort, utilisons l'équation $L = L_0 \pm e$ en utilisant le signe positif pour l'étirement :

$L = L_0 \pm e$	$\Rightarrow$	$L = L_0 + e$	(Équation en étirement)
	$\Rightarrow$	$L = (30\,\text{cm}) + (35\,\text{cm})$	(Remplacer valeurs numériques)
	$\Rightarrow$	$\boxed{L = 65\ \text{cm}}$ **(b)**	

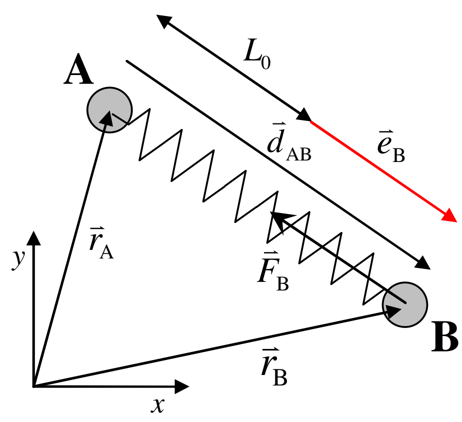
La force du ressort avec deux particules (complément informatique)

La force $\vec{F}_{\text{B}}$ qu'un ressort applique sur une particule **B** lorsque le ressort est relié à deux particules **A** et **B** dépend de l'étirement $\vec{e}_{\text{B}}$ du ressort selon la particule **B** et de la longueur naturelle L_0 du ressort :

$$\vec{F}_{\text{B}} = -k\,\vec{e}_{\text{B}}$$

tel que $$\vec{e}_{\text{B}} = \vec{d}_{\text{AB}}\left(1 - \frac{L_0}{\left|\vec{d}_{\text{AB}}\right|}\right)$$

et $$\vec{d}_{\text{AB}} = \vec{r}_{\text{B}} - \vec{r}_{\text{A}}$$



où $\vec{F}_{\text{B}}$: Force qu'exerce le ressort sur la particule **B** (N).

$\vec{e}_{\text{B}}$: Vecteur déformation du ressort selon **B** (m).

k : Constante du ressort (N/m).

L_0 : Longueur naturelle du ressort (m).

$\vec{d}_{\text{AB}}$: Déplacement de la particule **A** et **B** ce qui donne la longueur du ressort (m).

$\vec{r}_{\text{A}}$: Position de la particule **A** (m).

$\vec{r}_{\text{B}}$: Position de la particule **B** (m).

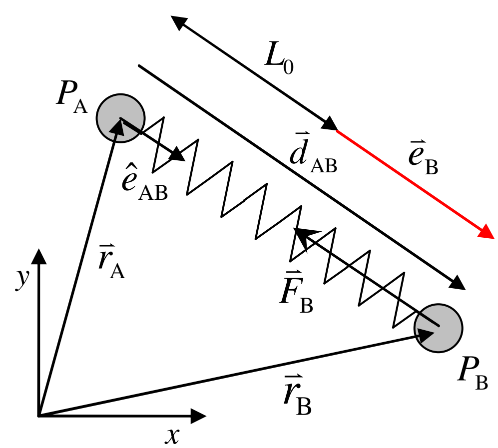
Preuve :

Considérons les deux particules P_{A} et P_{B} situés aux vecteurs positions $\vec{r}_{\text{A}}$ et $\vec{r}_{\text{B}}$. Le vecteur déplacement pour passer de la particule P_{A} à la particule P_{B} se calcul grâce à l'équation

$$\vec{d}_{\text{AB}} = \vec{r}_{\text{B}} - \vec{r}_{\text{A}}\,.$$

L'orientation du vecteur étirement $\hat{e}_{\text{AB}}$ du ressort selon la particule P_{B} sera dans la direction du vecteur déplacement $\vec{d}_{\text{AB}}$ et peut être évalué par le calcul

$$\hat{e}_{\text{AB}} = \frac{\vec{d}_{\text{AB}}}{\left|\vec{d}_{\text{AB}}\right|}\,.$$



Pour obtenir le vecteur déformation du ressort $\vec{e}_{\text{B}}$ selon la particule P_{B}, nous pouvons soustraire la longueur naturelle L_0 du ressort au vecteur déplacement $\vec{d}_{\text{AB}}$ par le calcul

$$\vec{e}_{\text{B}} = \vec{d}_{\text{AB}} - L_0\hat{e}_{\text{AB}}\,.$$

En développant l'expression de $\vec{e}_{\mathrm{B}}$, nous obtenons :

$$\vec{e}_{\mathrm{B}} = \vec{d}_{\mathrm{AB}} - L_0 \hat{e}_{\mathrm{AB}} \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_{\mathrm{B}} = \vec{d}_{\mathrm{AB}} - L_0 \left(\frac{\vec{d}_{\mathrm{AB}}}{\left| \vec{d}_{\mathrm{AB}} \right|} \right) \qquad \text{(Remplacer } \hat{e}_{\mathrm{AB}} = \frac{\vec{d}_{\mathrm{AB}}}{\left| \vec{d}_{\mathrm{AB}} \right|} \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_{\mathrm{B}} = \vec{d}_{\mathrm{AB}} \left(1 - \frac{L_0}{\left| \vec{d}_{\mathrm{AB}} \right|} \right) \qquad \text{(Factoriser } \vec{d}_{\mathrm{AB}} \text{)}$$

Ainsi, on obtient la force que le ressort applique sur la particule P_{B} par l'équation

$$\vec{F}_{\mathrm{B}} = -k\,\vec{e}_{\mathrm{B}} \ . \quad \blacksquare$$