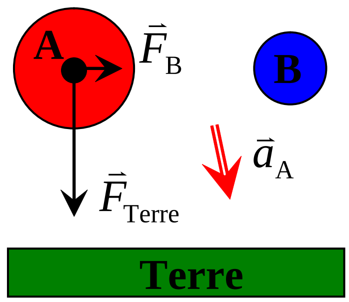
Chapitre 2.2 – La force gravitationnelle

La force gravitationnelle (le poids)

La **force gravitationnelle** est une interaction physique qui cause une **attraction** entre des **objets** ayant une **masse**. Tout objet ayant une masse est attiré grâce à la force gravitationnelle vers les autres masses. Cette force d'attraction s'effectue à distance.

Situation : Objet A situé près d'un objet B et de la surface de la Terre.



$\vec{F}_{\mathrm{B}}$: Force gravitationnelle résultant que **A** est attiré vers **B**.

$\vec{F}_{\mathrm{Terre}}$: Force gravitationnelle résultant que **A** est attiré vers la **Terre**.

Puisque la force gravitationnelle est une force très faible, il faut beaucoup de masse pour observer un effet observable. Ainsi, la force $\vec{F}_{\mathrm{B}}$ est négligeable. Habituellement, ce n'est que les astres (comme la Terre) qui applique une force gravitationnelle suffisamment imposante sur les objets pour être considérée dans une situation.

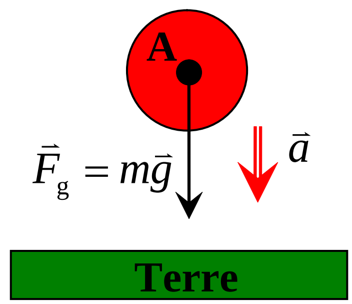
Voici la définition de la **force gravitationnelle** appliquée par un astre, une planète ou une étoile :

$$\vec{F}_g = m\vec{g}$$

où $\vec{F}_g$: Force gravitationnelle appliquée sur l'objet (N)

m : Masse de l'objet qui subit la force (kg)

$\vec{g}$: Accélération gravitationnelle que subit l'objet sous l'influence de l'astre en chute libre ($\mathrm{m/s^2}$)



Preuve :

Supposons un objet subissant uniquement une force gravitationnelle appliquée par un astre. Alors, démontrons l'expression de la force gravitationnelle à l'aide de la 2$^{\text{ième}}$ loi de Newton et de l'accélération en chute libre à la surface de l'astre :

$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_g = m\vec{a}$ (Une seule force en jeu, $\vec{F}_g$)

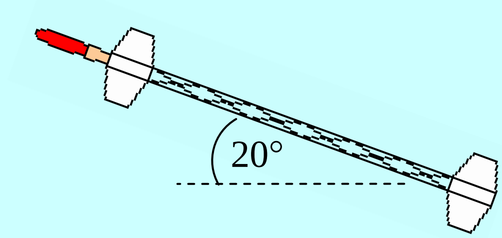
$\Rightarrow \quad \vec{F}_g = m\left(-g\,\vec{j}\right)$ (Accélération en chute libre, $\vec{a} = -g\,\vec{j}$ ($a_y = -g$))

$\Rightarrow \quad \vec{F}_g = m\vec{g} \quad \blacksquare$ (Accélération gravitationnelle, $\vec{g} = -g\,\vec{j}$)

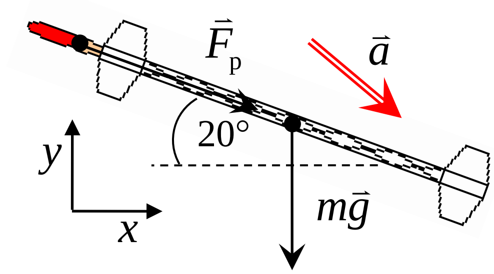
Remarque :

- La force gravitationnelle appliquée par une planète selon un système d'axe *xy* où *y* est positif vers le haut se décompose de la façon suivante : $\vec{F}_g = m\vec{g} = -mg\;\vec{j}$
- La masse gravitationnelle (utilisée dans la force gravitationnelle) est égale à la masse d'inertie (utilisée dans la 2$^{\text{ième}}$ loi de Newton).

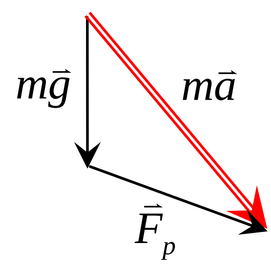
Situation A : *L'écrasement de l'Altaïr.* L'*Altaïr* est un vaisseau de 8×10^5 kg qui est propulsé par un moteur qui exerce une force de $2{,}4\times10^6$ N parallèlement au vaisseau. Pour des raisons toujours inconnues, l'*Altaïr* s'est écrasé à la surface de la lune ($g = 1{,}6\ \text{m/s}^2$) avec un angle de 20° par rapport à la surface. On désire évaluer le module de l'accélération de l'*Altaïr* tout juste avant l'écrasement.



Voici le schéma des forces de la situation :



Résolution de la 2e loi de Newton graphiquement :



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{où} \quad \vec{F}_p + m\vec{g} = 0$$

Évaluons l'accélération en *x* et *y* à partir de la somme des forces appliquées sur l'*Altaïr* selon le système d'axe *xy* et de la 2ième loi de Newton :

$$\sum F_x = ma_x \quad \Rightarrow \quad F_p \cos(20°) = ma_x \qquad \text{(Remplacer } \textstyle\sum F_x \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad (2{,}4\times10^6)\cos(20°) = (8\times10^5)a_x \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_x = 2{,}819\ \text{m/s}^2} \qquad \text{(Évaluer } a_x\text{)}$$

$$\sum F_y = ma_y \quad \Rightarrow \quad -F_p \sin(20°) - mg = ma_y \qquad \text{(Remplacer } \textstyle\sum F_y \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad -(2{,}4\times10^6)\sin(20°) - (8\times10^5)(1{,}6) = (8\times10^5)a_y \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a_y = -2{,}626\ \text{m/s}^2} \qquad \text{(Évaluer } a_y\text{)}$$

Évaluons le module de l'accélération :

$$a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2}} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{(2{,}819)^2 + (-2{,}626)^2} \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a = 3{,}853\ \text{m/s}^2} \qquad \text{(Évaluer } a\text{)}$$

La gravitation universelle

La plus grande réalisation d’Isaac Newton fut d’unifier le concept de force gravitationnelle terrestre à celui de la force gravitationnelle céleste. À partir des trois lois de Kepler[1] obtenus expérimentalement par l’observation du mouvement des astres par Johannes Kepler en 1609 et 1618, Newton découvrit[2] en 1687 une expression plus générale à la force gravitationnelle ce qui lui a permis de démontrer théoriquement les lois de Kepler. Cette force était principalement fondée sur l’attraction à distance des masses.

Johannes Kepler
(1571-1630)

Isaac Newton
(1643-1727)

Voici les quatre constatations de Newton :

1) $F_g \propto m$: La force gravitationnelle sur Terre ($\vec{F}_g = m\vec{g}$) est proportionnelle à la masse qui subit la force. Ceci devrait être valable également dans l’espace.

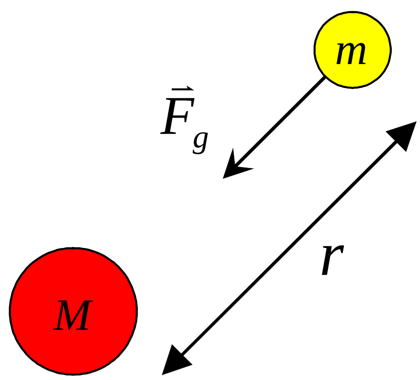
2) $F_g \propto M$: Puisque la force gravitationnelle est la conséquence de l’attraction des masses, alors la masse qui applique la force doit faire partie de l’expression de la force gravitationnelle.

3) $F_g \propto 1/r^2$: La trajectoire elliptique des astres autour du soleil à différentes vitesses dans l’espace impose une restriction au niveau de l’efficacité de la force gravitationnelle. Pour que le tout soit cohérent, il faut que la force gravitationnelle entre l’astre qui applique la force et l’astre qui subit la force diminue en fonction du carré de la distance.

4) $F_g \propto G$: Afin d’obtenir une équation ayant comme unité le newton[3], le tout doit être multiplié par une constance de proportionnalité.

Voici l’expression scalaire de la force gravitationnelle :

$$F_g = G\frac{mM}{r^2}$$



où
- F_g : La force gravitationnelle d’attraction (N)
- G : Constante de la gravitation universelle ($G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$)
- m : Masse qui subit la force (kg)
- M : Masse qui applique la force (kg)
- r : Distance entre les deux masses M et m (m)

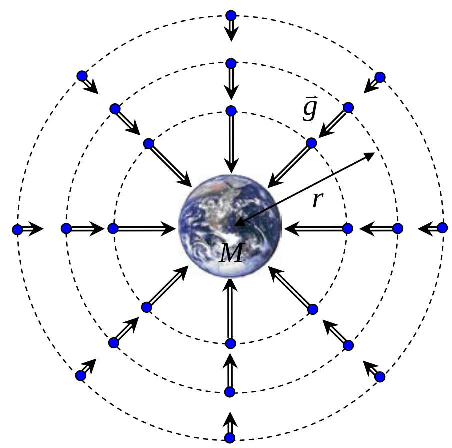
---

[1] Les trois lois de Kepler sont les suivantes : loi des orbites elliptiques, loi des aires et loi des périodes.
[2] Plusieurs historiens affirment que Newton avait pris connaisse des travaux de Robert Hooke au sujet du facteur $1/r^2$ avant de publier son ouvrage sans y faire référence puisqu’il était en compétition avec lui.
[3] La constante G fut déterminée grâce aux résultats de l’expérience de Cavendish (pendule de torsion, 1793). À l’époque de Newton, la force gravitationnelle n’était pas évaluée en newton et la constante G était égale à l.

Le champ gravitationnel

En physique, un **champ** représente une **zone d'influence** dans l'espace susceptible d'appliquer une **force** à distance sur un objet. Puisque la force gravitationnelle est justement une force à distance, on peut définir un champ associé à la force gravitationnelle.

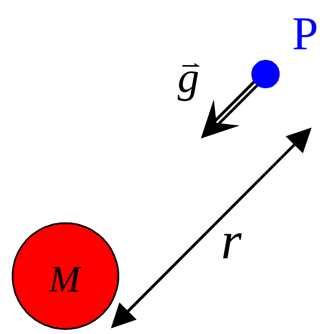
Tout objet ayant une masse M produit un champ gravitationnel autour de lui, car l'objet doit interagir gravitationnellement à distance avec des objets de masse m autour de lui. Le champ gravitationnel $\vec{g}$ associé à une masse M est radial, orienté vers la masse M et diminue en fonction du carré de la distance r ($g \propto 1/r^2$).



Mathématiquement, on utilise un vecteur pour représenter le module et l'orientation du champ gravitationnel $\vec{g}$ en un point de l'espace.

Voici l'équation permettant d'évaluer le module du champ gravitationnel g produit par une masse M à un endroit P de l'espace situé à une distance r de la masse M. Cette équation s'applique uniquement pour les objets sphériques de masse volumique uniforme :

$$g = G\frac{M}{r^2}$$



où
- g : Le champ gravitationnel radial vers M (N /kg)
- G : Constante de la gravitation universelle ($G = 6{,}67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$)
- M : Masse qui produit le champ gravitationnel (kg)
- r : Distance entre M et le point **P** (m)

Remarque : Évaluer le champ gravitationnel est équivalent à évaluer l'accélération en chute libre d'un objet à un endroit donné (champ g surface de la Terre : $9{,}8\ \mathrm{N/kg}$).

Preuve :

Évaluons l'expression du champ gravitationnel g à partir des deux expressions de la force gravitationnelle que nous avons.

$$F_g = mg \quad \Rightarrow \quad G\frac{mM}{r^2} = mg \qquad \text{(Remplacer } F_g = G\frac{mM}{r^2}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad g = G\frac{M}{r^2} \quad \blacksquare \qquad \text{(Simplifier } m\text{)}$$

Situation X : *Albert sur Mars*. La masse d'Albert est égale à 90 kg. La masse de la planète Mars est égale à $6{,}42\times10^{23}$ kg et son rayon est égal à 3397 km. On désire déterminer **(a)** la masse et **(b)** le poids d'Albert sur Mars. (On suppose que la planète Mars est sphérique et que sa masse volumique est uniforme)

Voici nos données de base :

- $m = 90\ \text{kg}$ (Masse qui subit la force)
- $M = 6{,}42\times10^{23}\,\text{kg}$ (Masse qui applique la force)
- $r = 3397\times10^{3}\,\text{m}$ (Distance entre le centre de la Mars et la surface)

Évaluons le champ gravitationnel à la surface de la planète Mars :

$$g = G\frac{M}{r^2} \quad\Rightarrow\quad g = \left(6{,}67\times10^{-11}\right)\frac{\left(6{,}42\times10^{23}\right)}{\left(3397\times10^{3}\right)^2} \quad\Rightarrow\quad \boxed{g = 3{,}71\ \text{N/kg}}$$

(a) Puisque la masse est une caractéristique de l'objet qui subit la force, elle ne dépend pas de son environnement. Ainsi :

masse : 90 kg

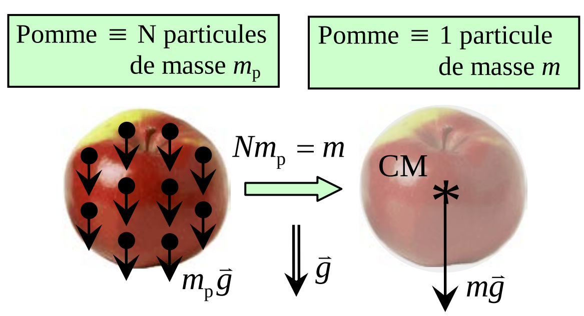
(b) Le poids est le synonyme de la force gravitationnelle qui dépend du champ et de la masse qui subit la force. Ainsi :

$$\text{le poids : } F_g = mg = (90)(3{,}71) = 333{,}9\ \text{N}$$

La force gravitationnelle et le centre de masse

Lorsqu'un corps ne peut pas être considéré comme étant ponctuelle (comme dans le **chapitre 4 : Mécanique des corps**), il faut savoir où appliquer la force gravitationnelle sur le corps. La force gravitationnelle résultante est toujours appliquée sur un corps à la position du centre de masse (voir **chapitre 4.3 : Le centre de masse**).

Le **centre de masse** CM (symbole : $*$) est un point de référence imaginaire situé à la **position moyenne** de la **masse** d'un corps. Dans un corps symétrique et homogène, le centre de masse est situé au centre géométrique du corps.



Application de la force gravitationnelle au centre de masse CM d'un corps.

Si l'on considère un corps comme étant un regroupement de N particules de masse m_p, on peut étudier la dynamique de translation des N particules comme étant qu'une seul particule de masse m subissant une force gravitationnelle résultante appliquée au centre de masse du corps et calculer l'accélération de ce centre de masse par la 2ième loi de Newton.

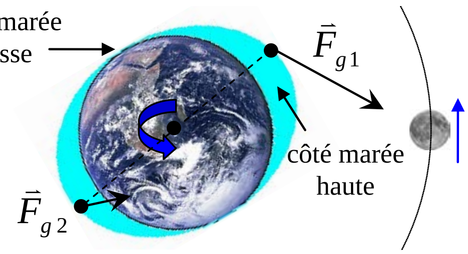
Les marées

Le phénomène des marées est une conséquence de la force gravitationnelle qu'applique la Lune sur la Terre. Bien que le phénomène des marées soit assez complexe à décrire, on peut le simplifier et le justifié par une différence de force gravitationnelle qu'applique la Lune aux deux extrémités de la Terre.


Port à marée basse


Route à marée haute

Cette différence de force gravitationnelle déforme les océans en forme d'ovale (sans Lune, la forme serait sphérique comme celle de la Terre). L'axe de l'ovale n'est pas aligné[4] sur l'axe Terre-Lune. Puisque la Terre tourne sur elle-même plus rapidement que la rotation de la Lune autour de la Terre, la rotation de la Terre provoque la rencontre de la marée haute et basse. Puisque la Terre n'effectue qu'un seul tour sur elle-même par jour, il y a donc deux marées complètes par jours, car il y a deux pointes à la forme ovale des océans.



Rotation de la Terre sur elle-même : ≈ 24 h

Rotation de la Lune autour de la Terre : $\approx 27{,}3$ jours

Force gravitationnelle sous forme vectorielle

Puisque la force gravitationnelle est une force radiale d'attraction. On peut la représenter vectoriellement à l'aide du vecteur unitaire radial $\hat{r}$ désignant l'orientation radiale de la force. On introduit un signe négatif afin de représenter la nature attractive de la force :

Force gravitationnelle avec champ $\vec{g}$	Champ gravitationnelle	Force gravitationnelle générale
$\vec{F}_g = m\vec{g}$	$\vec{g} = -G\dfrac{M}{r^2}\hat{r}$	$\vec{F}_g = -G\dfrac{mM}{r^2}\hat{r}$

où $\vec{F}_g$: Force gravitationnelle subit par m (N)

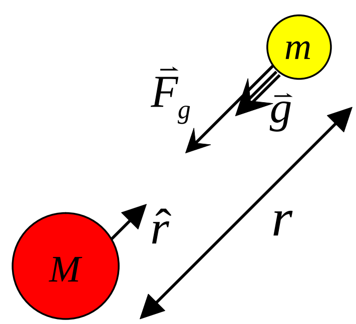
$\vec{g}$: Champ gravitationnel produit par M (N/kg)

M : Masse qui produit le champ gravitationnel (kg)

m : Masse qui subit l'influence du champ gravitationnel (kg)

G : Constante de la gravitation universelle ($6{,}67\times10^{-11}\ \mathrm{N\cdot m^2/kg^2}$)

$\hat{r}$: Vecteur unitaire de M (source) à m (cible)



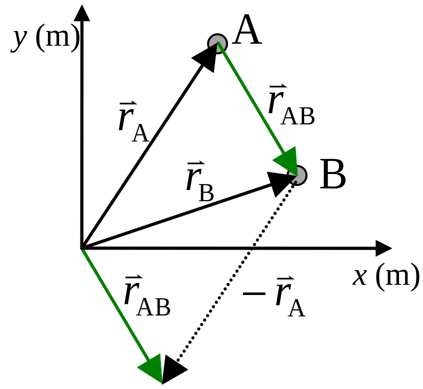
Rappel : $\hat{r}$ $\Rightarrow$ orientation du champ gravitationnel

signe négatif $\Rightarrow$ champ gravitationnel attractif

[4] L'axe n'est pas aligné en raison du frottement des marées.

Le vecteur déplacement à partir de deux positions

Un vecteur déplacement $\vec{r}_{\mathrm{AB}}$ pour passer d'une coordonnée A à une coordonnée B peut être évalué à partir de deux vecteurs positions $\vec{r}_{\mathrm{A}}$ et $\vec{r}_{\mathrm{B}}$. Le module de $\vec{r}_{\mathrm{AB}}$ permet d'obtenir la distance r_{AB} entre les deux coordonnées et l'orientation de $\vec{r}_{\mathrm{AB}}$ ce vecteur permet d'obtenir le sens du déplacement $\hat{r}_{\mathrm{AB}}$:

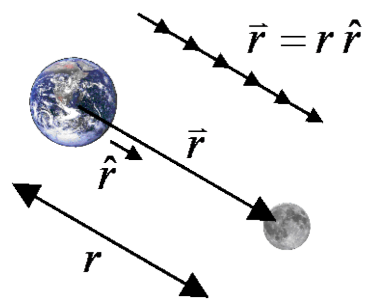


$$\vec{r}_{\mathrm{AB}} = \vec{r}_{\mathrm{B}} - \vec{r}_{\mathrm{A}}$$

où $\vec{r}_{\mathrm{AB}}$: Vecteur déplacement pour passer de la coordonnée A à B.
$\vec{r}_{\mathrm{A}}$: Vecteur position de la coordonnée A.
$\vec{r}_{\mathrm{B}}$: Vecteur position de la coordonnée B.

Le vecteur orientation $\hat{r}$

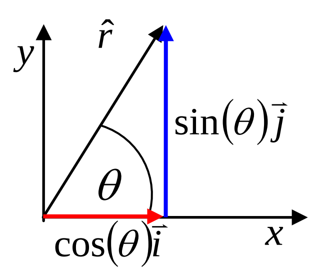
Le vecteur orientation $\hat{r}$ permet d'obtenir le sens d'un déplacement sans considérer le module de celui-ci. Il est important de ne pas confondre ce vecteur avec la notion de déplacement $\vec{r}$ et de distance r. Cependant, toutes ces notions sont reliées mathématiquement par l'équation suivante :



$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \qquad \text{et} \qquad \vec{r} = r\,\hat{r}$$

où $\hat{r}$: Vecteur unitaire orientation.
$\vec{r}$: Vecteur déplacement entre deux coordonnées.
r : Distance entre deux points ($r = |\vec{r}|$).

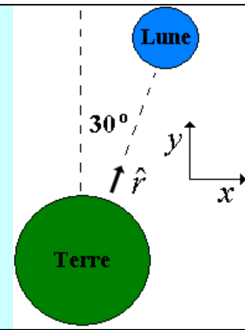
Dans un système d'axe *xy*, le vecteur unitaire $\hat{r}$ peut être décomposé de la façon suivante :



$$\hat{r} = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$$

où θ : Angle entre le vecteur $\hat{r}$ et l'axe x

Situation A : ***Force gravitationnelle sous force vectorielle.*** Dans un plan cartésien *xy*, la Lune est positionnée par rapport à la Terre à un angle de -30° par rapport à l'axe *y* tel qu'illustré sur le schéma ci-contre. On désire évaluez (**a**) la force gravitationnelle sous forme vectorielle appliquée par la Terre sur la Lune et (**b**) le module du champ gravitationnel à l'endroit où la lune est située.



Voici quelques données importantes :

$$m_{\text{Terre}} = 5{,}98\times10^{24}\ \text{kg}\,,\qquad m_{\text{Lune}} = 7{,}36\times10^{22}\ \text{kg}\,,\qquad r_{\text{Terre-Lune}} = 3{,}84\times10^{8}\ \text{m}$$

Voici les termes de l'équation générale à définir :

$$M = m_{\text{Terre}} \qquad\qquad m = m_{\text{Lune}} \qquad\qquad r = r_{\text{Terre-Lune}}$$

Considérons la Terre à l'origine du système d'axe *xy*. Ainsi, on peut facilement évaluer le vecteur unitaire $\hat{r}$ désignant l'orientation de la force gravitationnelle :

$$\hat{r} = \sin(30°)\ \vec{i} + \cos(30°)\ \vec{j}$$

Évaluons le champ gravitationnel produit par la Terre sur le Lune :

$$\vec{g} = -G\frac{M}{r^2}\hat{r} \quad\Rightarrow\quad \vec{g} = -\left(6{,}67\times10^{-11}\right)\frac{\left(5{,}98\times10^{24}\right)}{\left(3{,}84\times10^{8}\right)^2}\left(\sin(30°)\vec{i} + \cos(30°)\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \vec{g} = -2{,}7\times10^{-3}\left(\sin(30°)\vec{i} + \cos(30°)\vec{j}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\vec{g} = \left(-1{,}35\ \vec{i} - 2{,}34\ \vec{j}\right)\times10^{-3}\ \text{N/kg}}$$

Évaluons la force gravitationnelle appliquée par la Terre sur la Lune :

$$\vec{F}_g = m\vec{g} \quad\Rightarrow\quad \vec{F}_g = \left(7{,}36\times10^{22}\right)\left(-1{,}35\ \vec{i} - 2{,}34\ \vec{j}\right)\times10^{-3}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\vec{F}_g = \left(-0{,}99\ \vec{i} - 1{,}72\ \vec{j}\right)\times10^{20}\ \text{N}} \qquad \textbf{(a)}$$

Évaluons le module du champ gravitationnel produit par la Terre à l'endroit de la lune :

$$g = \left|\vec{g}\right| \quad\Rightarrow\quad g = \sqrt{g_x^{\,2} + g_y^{\,2}} \qquad\qquad \text{(Module d'un vecteur)}$$

$$\Rightarrow\quad g = \sqrt{\left(-1{,}35\times10^{-3}\right)^2 + \left(-2{,}34\times10^{-3}\right)^2}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{g = 2{,}70\times10^{-3}\ \text{N/kg}} \qquad \textbf{(b)}$$