

# Chapitre 1.X1 – L'intégrale numérique en cinématique

## La cinématique numérique

La cinématique numérique a pour objectif d'évaluer une position  $x$  et une vitesse  $v_x$  à partir d'une valeur initiale de position  $x_i$ , de vitesse  $v_{xi}$  et de temps  $t_i$ , de l'expression de l'accélération  $a_x$  et d'un écoulement de temps  $\Delta t$ . Par la suite, on effectue plusieurs itérations à partir des valeurs calculées précédemment pour déterminer les autres valeurs de positions et de vitesses futures.



Ordinateur portable

À l'aide de la dynamique, l'équation de l'**accélération**  $a_x = a_x(x, v_x, t)$  est une **fonction entièrement connue** qui dépend de  $x$  et  $v_x$  et  $t$  et elle est obtenue à partir du concept de force  $\vec{F}$  et de la 2<sup>ème</sup> loi de Newton<sup>1</sup> ( $\vec{F} = m\vec{a}$ ).

### Exemples :

- Chute libre verticale :

$$a_y = -g$$

où  $g$  : Accélération gravitationnelle constante (m/s<sup>2</sup>)

- Chute verticale avec résistance :

$$a_y = -g - \frac{b}{m} v_y \quad a_y = -g - \frac{b}{m} |v_y| v_y$$

(proportionnel à  $v_y$ )                      (proportionnel à  $v_y^2$ )

où  $g$  : Accélération gravitationnelle constante (m/s<sup>2</sup>)

$b$  : Coefficient de frottement (kg s<sup>-1</sup>, kg m<sup>-1</sup>)

$m$  : Masse de l'objet en chute (kg)

- Système masse-ressort :

$$a_x = -\omega_0^2 x \quad a_x = -\omega_0^2 x - \frac{b}{m} v_x + \frac{F_{\text{ext}}}{m} \cos(\omega_{\text{ext}} t)$$

(libre)                                      (amorti-entretenu)

où  $\omega_0$  : Fréquence naturelle d'oscillation (rad/s)      ( $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ,  $k$  : constante du ressort)

$b$  : Coefficient de frottement (kg s<sup>-1</sup>)

$F_{\text{ext}}$  : Force du mouvement entretenu en newton (N)

$\omega_{\text{ext}}$  : Fréquence de l'oscillation entretenu/forcée (rad/s)

$m$  : Masse du bloc en oscillation (kg)

<sup>1</sup> La 2<sup>ème</sup> loi de Newton sera présentée dans la section Chapitre 2.1 – Les lois du mouvement de Newton.

## Définition des termes

Voici la liste des termes importants à définir avant d'appliquer une technique d'intégration numérique pour évaluer une position  $x_f$  et une vitesse  $v_{xf}$  :

Terme connu	Terme facile à évaluer	Terme à évaluer
$x_i$ : Position initiale $v_{xi}$ : Vitesse initiale $t_i$ : Temps initial	$t_f$ : Temps final $a_{xi}$ : Accélération initiale	$x_f$ : Position finale $v_{xf}$ : Vitesse finale
Fonction entièrement connue		
$a_x = a_x(x, v_x, t)$ : Équation de l'accélération		
Pas d'intégration		
$\Delta t$ : Intervalle de temps de l'intégration numérique		

Remarque :

- Petit  $\Delta t \Rightarrow$  **Précision**  $\uparrow$  mais **calcul simulation**  $\uparrow$ .
- Grand  $\Delta t \Rightarrow$  **Précision**  $\downarrow$  mais **calcul simulation**  $\downarrow$ .
- Avec un bon algorithme, on peut maximiser la précision tout en gardant un  $\Delta t$  relativement grand ce qui réduit le temps calcul pour une longue simulation.

## L'intégration par la méthode d'Euler (ordre 1)

La méthode d'Euler propose d'utiliser uniquement les conditions initiales ( $x_i, v_{xi}$  et  $t_i$ ) pour évaluer la position finale  $x_f$  et la vitesse  $v_{xf}$  finale. Cette technique propose de déplacer l'objet à vitesse constante et d'évaluer la vitesse finale avec une accélération initiale  $a_{xi}$  constante.

Voici l'algorithme de la méthode d'Euler :

1. Affectation des données initiales :  $x_i, v_{xi}$  et  $t_i$
2. Évaluer l'accélération initiale :  $a_{xi} = a_x(x_i, v_{xi}, t_i)$
3. Évaluer la position finale :  $x_f = x_i + v_{xi}\Delta t$  (avec vitesse initiale)
4. Évaluer la vitesse finale :  $v_{xf} = v_{xi} + a_{xi}\Delta t$
5. Évaluer le temps final :  $t_f = t_i + \Delta t$

Avantage : Facile à implanter (méthode naïve) et très rapide à calculer.

Désavantage : Méthode de résolution qui entraîne beaucoup d'imprécision. La solution diverge très rapidement lorsque le  $\Delta t$  est grand.

## L'intégration par la méthode d'Euler semi-implicite (ordre 1)

La méthode d'Euler semi-implicite propose de calculer la vitesse finale  $v_{xf}$  avec l'accélération initiale  $a_{xi}$  constante et de déplacer l'objet avec une vitesse constante égale à la vitesse finale  $v_{xf}$ .

Voici l'algorithme de la méthode d'Euler inversé :

1. Identifier les données initiales :  $x_i, v_{xi}$  et  $t_i$
2. Évaluer l'accélération initiale :  $a_{xi} = a_x(x_i, v_{xi}, t_i)$
3. Évaluer la vitesse finale :  $v_{xf} = v_{xi} + a_{xi}\Delta t$
4. Évaluer la position finale :  $x_f = x_i + v_{xf}\Delta t$  (avec vitesse finale)
5. Évaluer le temps final :  $t_f = t_i + \Delta t$

Avantage : Facile à implanter et rapide à calculer. Plus de stabilité lorsqu'il y a des accélérations qui sont fonction de la position (comme un ressort) et propose des orbites fermées lors d'une accélération radiale en  $1/r^2$ .

Désavantage : Méthode de résolution qui diverge rapidement pour une grande majorité de problèmes comme ceux faisant intervenir la vitesse dans la définition de l'accélération (comme la force magnétique).

## L'intégration par la méthode Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4)

La méthode Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) propose d'évaluer une position et une vitesse intermédiaire afin de mieux estimer la position et la vitesse finale. Bien que cet algorithme ne soit pas unique, l'implantation suivante propose de calculer des valeurs intermédiaires à un temps  $t_i + \Delta t/2$  situées à mi-chemin dans l'itération :

Voici l'algorithme de la méthode RK4<sup>2</sup> :

### Calculs à la position initiale

1. Identifier les données initiales :  $x_i, v_{xi}$  et  $t_i$
2. Évaluer l'accélération initiale :  $a_{xi} = a_x(x_i, v_{xi}, t_i)$

---

<sup>2</sup> Dans la littérature, on utilise régulièrement la notation suivante :

$$k_1 = a_{x0}\Delta t, \quad k_2 = a_{xf(1)}\Delta t, \quad k_3 = a_{xmid}\Delta t \quad \text{et} \quad k_4 = a_{xf(2)}\Delta t$$

### Calculs à la 1<sup>ière</sup> position finale

3. Évaluer la position finale #1 :  $x_{f(1)} = x_i + v_{xi}\Delta t$  (sans  $a_{xi}$ )
4. Évaluer la vitesse finale #1 :  $v_{xf(1)} = v_{xi} + a_{xi}\Delta t$  (avec  $a_{xi}$ )
5. Évaluer le temps final #1 :  $t_{f(1)} = t_i + \Delta t$
6. Évaluer l'accélération finale #1 :  $a_{xf(1)} = a_x(x_{f(1)}, v_{xf(1)}, t_{f(1)})$

### Calculs à la position à demi-temps

7. Évaluer la position milieu :  $x_{mid} = x_i + v_{xi} \frac{\Delta t}{2} + \frac{1}{2} a_{xi} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2$  (avec  $a_{xi}$ )
8. Évaluer la vitesse milieu :  $v_{xmid} = v_{xi} + \left(\frac{3}{4} a_{xi} + \frac{1}{4} a_{xf(1)}\right) \frac{\Delta t}{2}$  (avec  $a_{xi}$ ,  $a_{xf(1)}$ )
9. Évaluer le temps milieu :  $t_{mid} = t_i + \frac{\Delta t}{2}$
10. Évaluer l'accélération milieu 2 :  $a_{xmid} = a_x(x_{mid}, v_{xmid}, t_{mid})$

### Calculs à la 2<sup>ième</sup> position finale

11. Évaluer la position finale #2 :  $x_{f(2)} = x_i + v_{xi}\Delta t + \frac{1}{2} a_{xi}\Delta t^2$  (avec  $a_{xi}$ )
12. Évaluer la vitesse finale #2 :  $v_{xf(2)} = v_{xi} + \left(\frac{1}{2} a_{xi} + \frac{1}{2} a_{xf(1)}\right) \Delta t$  (avec  $a_{xi}$ ,  $a_{xf(1)}$ )
13. Évaluer le temps final #2 :  $t_{f(2)} = t_i + \Delta t$
14. Évaluer l'accélération finale #2 :  $a_{xf(2)} = a_x(x_{f(2)}, v_{xf(2)}, t_{f(2)})$

### Calcul de la position finale avec pondération de l'accélération

15. Évaluer la position  $x_f$  :  $x_f = x_i + v_{xi}\Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} a_{xi} + \frac{2}{3} a_{xmid}\right) \Delta t^2$
16. Évaluer la vitesse  $v_{xf}$  :  $v_{xf} = v_{xi} + \left(\frac{1}{6} a_{xi} + \frac{4}{6} a_{xmid} + \frac{1}{6} a_{xf(2)}\right) \Delta t$
17. Évaluer le temps  $t_f$  :  $t_f = t_i + \Delta t$

Avantage : Algorithme qui converge vers la solution exacte beaucoup plus rapidement même avec un grand  $\Delta t$ .

Désavantage : Algorithme qui cause naturellement une atténuation lorsqu'il est utilisé lors d'oscillation comme dans la simulation d'un système masse-ressort.

Preuve : (terme 15 et 16)

Soit un objet situé à la position  $x_0$  se déplaçant à la vitesse  $v_{x0}$  au temps  $t_0 = 0$ . À l'aide de la 2<sup>ème</sup> loi de Newton

$$\sum F_x = ma_x$$

nous pouvons établir une relation

$$a_x = a_x(x, v_x, t)$$

nous permettant d'évaluer l'accélération  $a_{x0}$  à  $t_0 = 0$ . Évaluons la position  $x$ , la vitesse  $v_x$  et l'accélération  $a_x$  à un temps  $t = \Delta t$  en approximant l'expression de  $x$ ,  $v_x$  et  $a_x$  à l'aide d'un développement en série de Taylor

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n)}(0)}{n!} \Delta t^n, \quad v_x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_x^{(n)}(0)}{n!} \Delta t^n \quad \text{et} \quad a_x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_x^{(n)}(0)}{n!} \Delta t^n$$

où

$$x^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n}{dt^n} x \right|_{t=0}, \quad v_x^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n}{dt^n} v_x \right|_{t=0} \quad \text{et} \quad a_x^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n}{dt^n} a_x \right|_{t=0}.$$

Réduisons l'expression de  $x$  à un polynôme du 5<sup>ème</sup> ordre

$$x = \frac{x(0)}{1} + \frac{x^{(1)}(0)}{1} \Delta t + \frac{x^{(2)}(0)}{2} \Delta t^2 + \frac{x^{(3)}(0)}{6} \Delta t^3 + \frac{x^{(4)}(0)}{24} \Delta t^4 + O(\Delta t^5)$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$x = x_0 + v_{x0} \Delta t + \frac{1}{2} a_{x0} \Delta t^2 + \frac{1}{6} x^{(3)}(0) \Delta t^3 + \frac{1}{24} x^{(4)}(0) \Delta t^4 + O(\Delta t^5)$$

avec

$$x_0 = x^{(0)}(0), \quad v_{x0} = x^{(1)}(0) \quad \text{et} \quad a_{x0} = x^{(2)}(0).$$

Réduisons l'expression de  $v_x$  à un polynôme du 4<sup>ème</sup> ordre

$$v_x = \frac{v_x^{(0)}(0)}{1} + \frac{v_x^{(1)}(0)}{1} \Delta t + \frac{v_x^{(2)}(0)}{2} \Delta t^2 + \frac{v_x^{(3)}(0)}{6} \Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$v_x = v_{x0} + a_{x0} \Delta t + \frac{1}{2} x^{(3)}(0) \Delta t^2 + \frac{1}{6} x^{(4)}(0) \Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

avec

$$v_{x0} = v_x^{(0)}(0) \quad \text{et} \quad a_{x0} = \left. \frac{dv_x}{dt} \right|_{t=0} = v_x^{(1)}(0)$$

Ainsi que

$$x^{(3)}(0) = v_x^{(2)}(0) \quad \text{et} \quad x^{(4)}(0) = v_x^{(3)}(0) \quad \text{puisque} \quad v_x = \frac{dx}{dt}.$$

Réduisons l'expression de  $a_x$  à un polynôme du 3<sup>ième</sup> ordre

$$a_x = \frac{a_x^{(0)}(0)}{1} + \frac{a_x^{(1)}(0)}{1} \Delta t + \frac{a_x^{(2)}(0)}{2} \Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$a_x = a_0 + x^{(3)}(0) \Delta t + \frac{1}{2} x^{(4)}(0) \Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

avec

$$a_{x0} = a_x^{(0)}(0)$$

Ainsi que

$$x^{(3)}(0) = a_x^{(1)}(0) \quad \text{et} \quad x^{(4)}(0) = a_x^{(2)}(0) \quad \text{puisque} \quad a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Dans les trois expressions  $x$ ,  $v_x$  et  $a_x$  correspondant à une approximation des équations exactes, nous retrouvons les fonctions  $x^{(3)}(0)$  et  $x^{(4)}(0)$  qui sont inconnues. Effectuons le changement de variable  $A = x^{(3)}(0)$  et  $B = x^{(4)}(0)$  afin d'alléger la notation ce qui nous donne les expressions suivantes :

- $x = x_0 + v_{x0} \Delta t + \frac{1}{2} a_{x0} \Delta t^2 + \frac{1}{6} A \Delta t^3 + \frac{1}{24} B \Delta t^4$
- $v_x = v_{x0} + a_{x0} \Delta t + \frac{1}{2} A \Delta t^2 + \frac{1}{6} B \Delta t^3$
- $a_x = a_{x0} + A \Delta t + \frac{1}{2} B \Delta t^2$

Établissons des conditions de raccordement à un temps  $t = \Delta t / 2$  et à un temps  $t = \Delta t$  à l'expression de  $a_x$  ce qui nous donne les équations suivantes :

$a_x(\Delta t / 2) = a_{x0} + A(\Delta t / 2) + \frac{1}{2} B(\Delta t / 2)^2$	$a_x(\Delta t) = a_{x0} + A(\Delta t) + \frac{1}{2} B(\Delta t)^2$
$\Rightarrow a_x(\Delta t / 2) = a_{x0} + \frac{1}{2} A \Delta t + \frac{1}{8} B \Delta t^2$	$\Rightarrow a_x(\Delta t) = a_{x0} + A \Delta t + \frac{1}{2} B \Delta t^2$
$\Rightarrow 8a_x(\Delta t / 2) = 8a_{x0} + 4A \Delta t + B \Delta t^2$	$\Rightarrow 2a_x(\Delta t) = 2a_{x0} + 2A \Delta t + B \Delta t^2$
$\Rightarrow \boxed{4A \Delta t + B \Delta t^2 = 8a_x(\Delta t / 2) - 8a_{x0}}$	$\Rightarrow \boxed{2A \Delta t + B \Delta t^2 = 2a_x(\Delta t) - 2a_{x0}}$

Les conditions de raccordement proposent le système d'équations suivant qui sera à résoudre :

$$4A \Delta t + B \Delta t^2 = 8a_x (\Delta t / 2) - 8a_{x0} \quad (1)$$

$$2A \Delta t + B \Delta t^2 = 2a_x (\Delta t) - 2a_{x0} \quad (2)$$

En effectuant (1) - (2), nous obtenons le résultat suivant :

$$[4A \Delta t + B \Delta t^2] - [2A \Delta t + B \Delta t^2] = [8a_x (\Delta t / 2) - 8a_{x0}] - [2a_x (\Delta t) - 2a_{x0}]$$

$$\Rightarrow 2A \Delta t = -6a_{x0} + 8a_x (\Delta t / 2) - 2a_x (\Delta t)$$

$$\Rightarrow \boxed{A \Delta t = -3a_{x0} + 4a_x (\Delta t / 2) - a_x (\Delta t)}$$

En effectuant (1) - 2\*(2), nous obtenons le résultat suivant :

$$[4A \Delta t + B \Delta t^2] - 2[2A \Delta t + B \Delta t^2] = [8a_x (\Delta t / 2) - 8a_{x0}] - 2[2a_x (\Delta t) - 2a_{x0}]$$

$$\Rightarrow -B \Delta t^2 = -4a_{x0} + 8a_x (\Delta t / 2) - 4a_x (\Delta t)$$

$$\Rightarrow \boxed{B \Delta t^2 = 4a_{x0} - 8a_x (\Delta t / 2) + 4a_x (\Delta t)}$$

Avec les expressions de  $A \Delta t$  et  $B \Delta t^2$ , nous pouvons les remplacer dans  $x$ ,  $v_x$  et obtenir les équations suivantes :

$$\text{(Position)} \quad x = x_0 + v_{x0} \Delta t + \frac{1}{2} a_{x0} \Delta t^2 + \frac{1}{6} A \Delta t^3 + \frac{1}{24} B \Delta t^4$$

$$\Rightarrow x = x_0 + v_{x0} \Delta t + \frac{1}{2} a_{x0} \Delta t^2 + \frac{1}{6} (-3a_{x0} + 4a_x (\Delta t / 2) - a_x (\Delta t)) \Delta t^2 + \frac{1}{24} (4a_{x0} - 8a_x (\Delta t / 2) + 4a_x (\Delta t)) \Delta t^2$$

$$\Rightarrow x = x_0 + v_{x0} \Delta t + \frac{1}{2} a_{x0} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \left( -a_{x0} + \frac{4}{3} a_x (\Delta t / 2) - \frac{1}{3} a_x (\Delta t) \right) \Delta t^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} a_{x0} - \frac{2}{3} a_x (\Delta t / 2) + \frac{1}{3} a_x (\Delta t) \right) \Delta t^2$$

$$\Rightarrow x = x_0 + v_{x0} \Delta t + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} a_{x0} + \frac{2}{3} a_x (\Delta t / 2) \right) \Delta t^2 \quad \blacksquare (1)$$

$$\text{(Vitesse)} \quad v_x = v_{x0} + a_{x0} \Delta t + \frac{1}{2} A \Delta t^2 + \frac{1}{6} B \Delta t^3$$

$$\Rightarrow v_x = v_{x0} + a_{x0} \Delta t + \frac{1}{2} (-3a_{x0} + 4a_x (\Delta t / 2) - a_x (\Delta t)) \Delta t + \frac{1}{6} (4a_{x0} - 8a_x (\Delta t / 2) + 4a_x (\Delta t)) \Delta t$$

$$\begin{aligned}
v_x &= v_{x0} + a_{x0}\Delta t \\
\Rightarrow & + \left( -\frac{9}{6}a_{x0} + \frac{12}{6}a_x(\Delta t/2) - \frac{3}{6}a_x(\Delta t) \right)\Delta t + \left( \frac{4}{6}a_{x0} - \frac{8}{6}a_x(\Delta t/2) + \frac{4}{6}a_x(\Delta t) \right)\Delta t \\
\Rightarrow & v_x = v_{x0} + \left( \frac{1}{6}a_{x0} + \frac{4}{6}a_x(\Delta t/2) + \frac{1}{6}a_x(\Delta t) \right)\Delta t \quad \blacksquare (2)
\end{aligned}$$

**Remarque :**

Dans cette notation, nous avons la correspondance

$$a_{xmid} = a_x(\Delta t/2) \quad \text{et} \quad a_{xf(2)} = a_x(\Delta t) .$$

Ces deux accélérations se doivent d’être évaluées avec des expressions  $x$  et  $v_x$  développées en série de Taylor au 3<sup>ième</sup> ordre ce qui donne des expressions comme

$$v_{xmid} = v_{x0} + \left( \frac{3}{4}a_{x0} + \frac{1}{4}a_{xf(1)} \right)\frac{\Delta t}{2} \quad \text{et} \quad v_{xf(2)} = v_{x0} + \left( \frac{1}{2}a_{x0} + \frac{1}{2}a_{xf(1)} \right)\Delta t$$

dont la démonstration des coefficients est laissée à la discrétion du lecteur.

## Comparaison des méthodes numériques avec la solution analytique

Voici trois problèmes ayant été solutionnés analytiquement (solution algébrique exacte) et numériquement par les trois algorithmes précédents.

**La chute libre :**

Accélération :

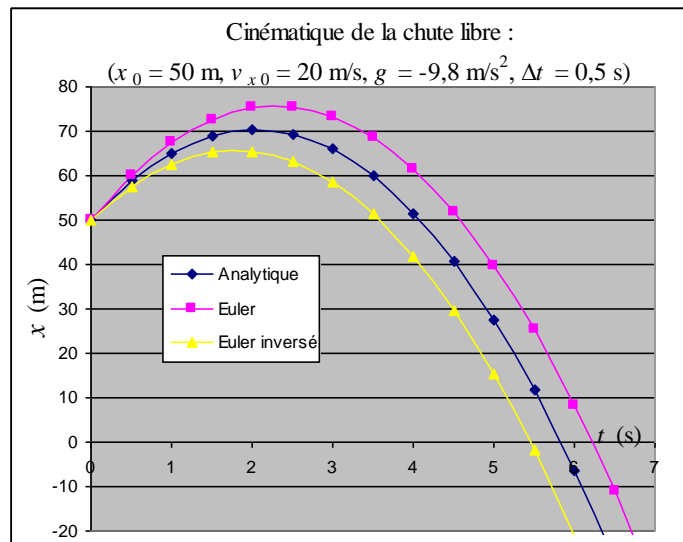
$$a_x = -g$$

Solution analytique<sup>3</sup> (MUA) :

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

**Conclusion :**

Les deux algorithmes d’Euler convergent vers la solution analytique lorsque l’accélération est constante et l’écart diminue rapidement lorsqu’on diminue l’intervalle de temps  $\Delta t$ .



<sup>3</sup> La preuve de cette solution analytique est disponible au chapitre NYA – Chapitre 1.6.



La chute avec résistance proportionnelle à  $v_y$  :

Accélération :

$$a_y = -g - \frac{b}{m} v_y$$

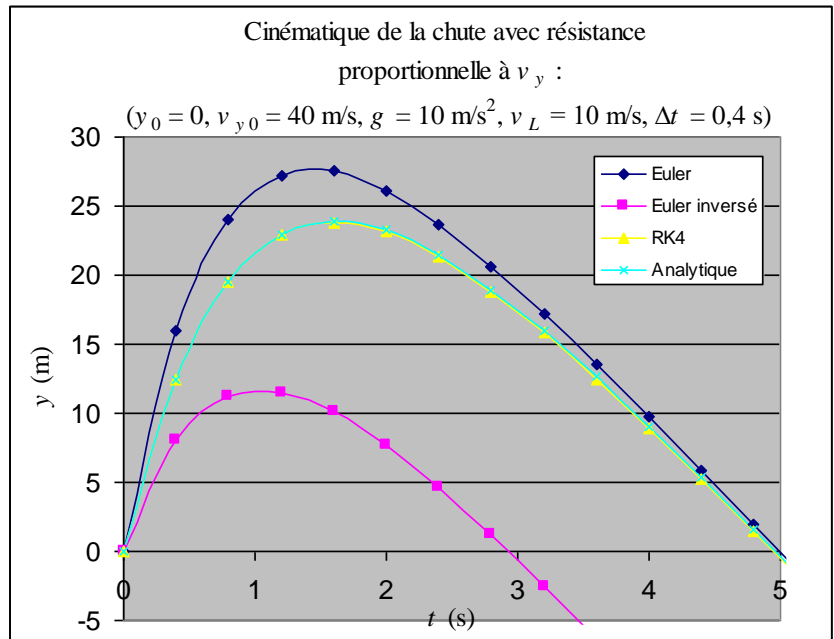
Solution analytique<sup>4</sup> :

$$y = y_0 - v_L t + (v_L + v_{y0}) \frac{v_L}{g} \left( 1 - e^{-\frac{gt}{v_L}} \right)$$

où  $v_L = mg / b$

Conclusion :

Les trois méthodes numériques se comportent adéquatement lorsque la vitesse limite est atteinte, mais la méthode RK4 permet d'évaluer avec beaucoup plus de précision le comportement de la fonction lorsque la vitesse de l'objet  $v_y$  est supérieure à la vitesse limite  $v_L$ .



Système masse-ressort :

Accélération :

$$a_x = -\omega_0^2 x$$

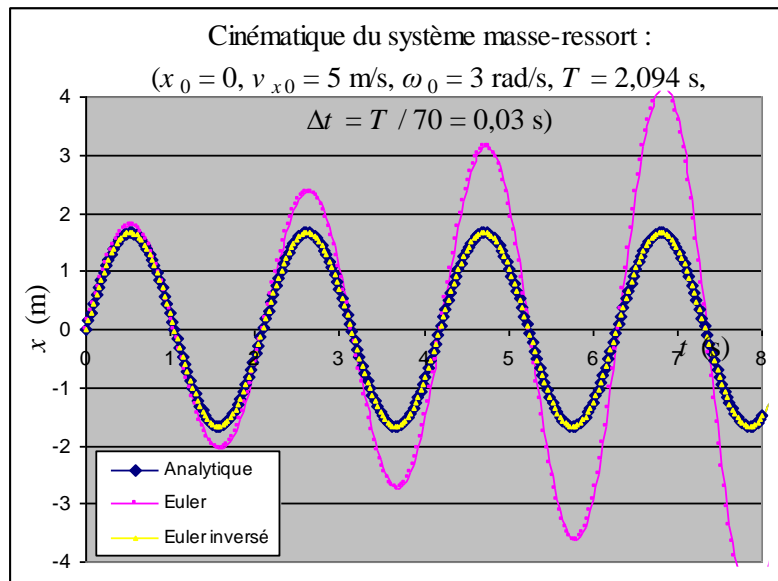
Solution analytique<sup>5</sup> (MHS) :

$$x = A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

où  $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{x0}^2}{\omega_0^2}}$   
 $\phi = \sin^{-1}(x_0 / A)$

Conclusion :

La méthode d'Euler diverge très rapidement. La méthode d'Euler inversé semble mieux adaptée à ce type de problème.

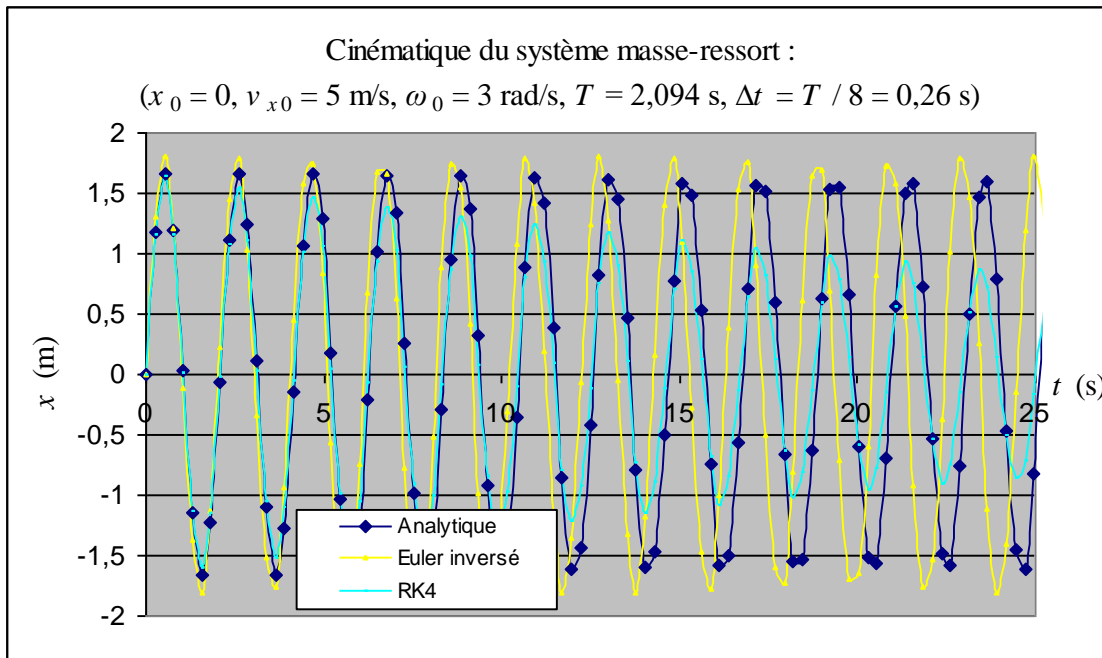


Période d'oscillation :  $T = 2\pi / \omega_0 = 3,1416 \text{ s}$

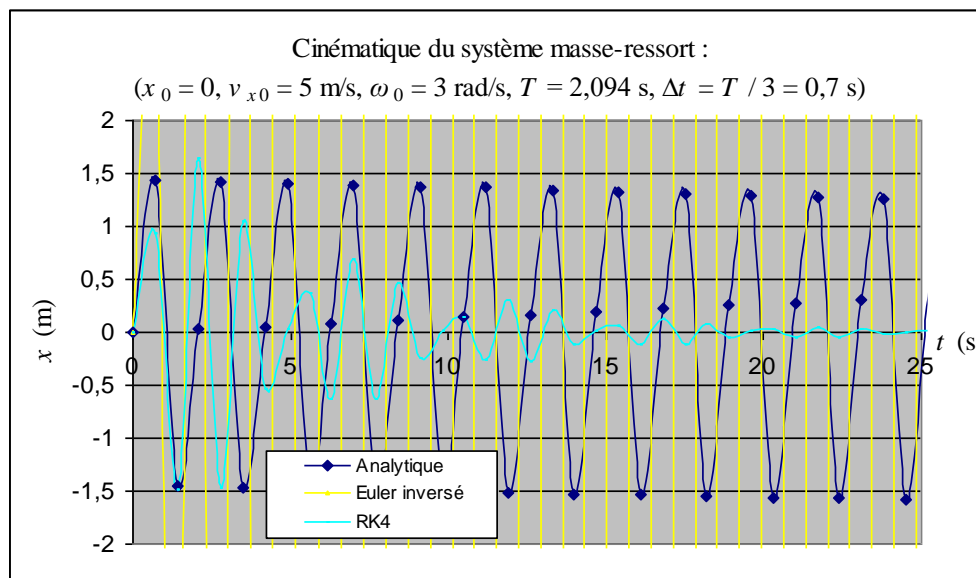
<sup>4</sup> La preuve de cette solution analytique est disponible au chapitre NYA – Chapitre 2.X1.

<sup>5</sup> La preuve de cette solution analytique est disponible au chapitre NYC – Chapitre 1.1c.

En appliquant la méthode de RK4, on réalise que cette méthode, bien qu'elle soit plus précise que la méthode d'Euler inversé pour la grande majorité des problèmes, commence à générer de **l'atténuation aux oscillations** lorsque l'intervalle de temps  $\Delta t$  est supérieur à  $1/20$  de la période  $T$  d'oscillation (usage de moins de 20 points pour estimer un mouvement sinusoïdale).



Lorsque  $\Delta t = T/4$ , la méthode d'Euler inversé diverge en « explosant ». La méthode RK4 demeure stable avec atténuation lorsque  $T/20 < \Delta t < T/3$  et diverge en « explosant » lorsque  $\Delta t > T/3$ . Cela semble raisonnable, car il est difficile d'approximer une fonction sinusoïdale avec moins de 4 points par cycle complet.



Système masse-ressort amorti :

Accélération :

$$a_x = -\omega_0^2 x - \frac{b}{m} v_x$$

Solution analytique<sup>6</sup> :

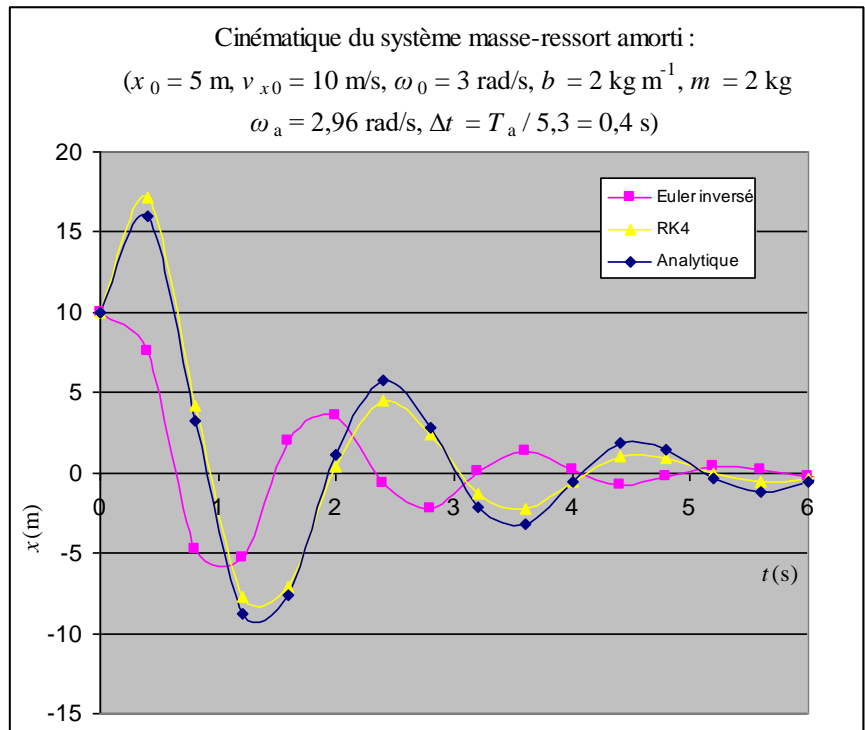
$$x = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \sin(\omega_a t + \phi)$$

où

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{\left(v_{x0} - \frac{b}{2m}x_0\right)^2}{\omega_a^2}}$$

$$\phi = \sin^{-1}(x_0 / A)$$

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$



Période d'oscillation :  $T_a = 2\pi / \omega_a$

Conclusion :

L'algorithme RK4 permet de maintenir les oscillations à la fréquence  $\omega_a$  adéquatement tout en préservant une bonne estimation de l'amplitude et de la phase et ce malgré « l'atténuation naturelle » causée par l'algorithme.

**Stabilité des algorithmes en une dimension**

Voici un petit bilan des conclusions obtenues par l'application des différentes méthodes d'intégrations numériques à différents types de problèmes :

Algorithme	Accélération <sup>7</sup> $a_x = a_0 t^n$	Accélération $a_x = a_x(x)$	Accélération $a_x = a_x(v_x)$	Accélération $a_x = a_x(x, v_x)$
Euler	<b>stable</b>	<b>instable</b>	<b>instable</b>	<b>instable</b>
Euler inversé	<b>stable</b>	<b>stable</b>	<b>instable</b>	<b>instable</b>
RK4	<b>stable</b>	<b>stable</b>	<b>stable</b>	<b>stable</b>

<sup>6</sup> La preuve de cette solution analytique est disponible au chapitre NYC – Chapitre 1.7.

<sup>7</sup> Bien que l'exemple présenté dans ce document fait l'objet d'une accélération constante ( $n = 0$ ), il est possible de démontrer numériquement que l'algorithme d'Euler converge adéquatement lorsque l'accélération dépend uniquement d'une fonction polynomiale du temps.

# Comparaison des méthodes numériques avec la solution analytique pour un mouvement en deux dimensions

Les différents algorithmes présentés peuvent être implémentés vectoriellement. Il suffit de définir un vecteur pour l'ensemble des paramètres :

Position	Vitesse	Accélération
$x \rightarrow \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$	$v_x \rightarrow \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$	$a_x \rightarrow \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

## Particule chargée dans un champ magnétique constant selon l'axe z :

Force magnétique :

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Accélération :

$$a_x = \frac{qB_z}{m} v_y \quad \text{et} \quad a_y = -\frac{qB_z}{m} v_x$$

Solution analytique<sup>8</sup> :

$$x(t) = x_0 + R(\sin(\omega t - \phi) + \sin(\phi))$$

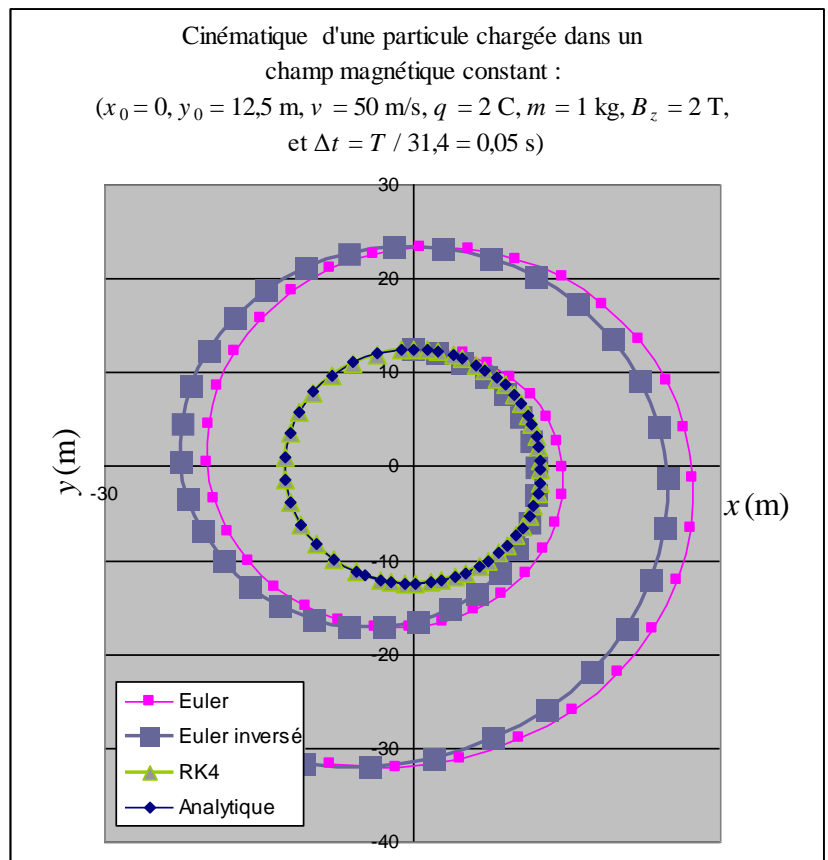
$$y(t) = y_0 + R(\cos(\omega t - \phi) - \cos(\phi))$$

où  $v = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}$

$$R = \frac{mv}{qB_z}$$

$$\phi = \arctan(v_{y0} / v_{x0})$$

$$\omega = \frac{qB_z}{m}$$



Période d'oscillation :  $T = 2\pi / \omega = 2\pi m / qB_z$

## Conclusion :

L'algorithme RK4 peut converger vers la solution analytique seulement lorsqu'il y a un minimum de 30 points pour approximer la trajectoire circulaire (converge si  $\Delta t < T/30$ ). Lorsqu'on utilise un pas d'itération trop grand, l'algorithme RK4 tend à produire une trajectoire circulaire qui « entre » dans la trajectoire analytique (trajectoire contraire à celles des algorithmes d'Euler qui augmentent la taille du cercle).

<sup>8</sup> La preuve de cette solution analytique est disponible au chapitre NYB – Chapitre 4.2d.







