Chapitre 1.8b – Le MUA à deux mobiles

Mouvement à deux mobiles

Un mouvement à deux mobiles consiste à étudier le **mouvement** de **deux objets simultanément**, mais **individuellement**. Chaque objet **A** et **B** aura ses propres équations du mouvement

$$x_{\mathrm{A}}(t_{\mathrm{A}})\ ,\ v_{x\mathrm{A}}(t_{\mathrm{A}}) \quad \text{et} \quad x_{\mathrm{B}}(t_{\mathrm{B}})\ ,\ v_{x\mathrm{B}}(t_{\mathrm{B}})$$

pour décrire son mouvement, mais ces **équations** seront **reliées** par certains critères.

Par exemple, une collision aura lieu lorsque

$$x_{\mathrm{A}} = x_{\mathrm{B}}$$

au même moment.

https://www.franceabris.com/278-carport-2-voitures-structures-en-bois-metal-ou-toile-tendue

Pour faire la cinématique de deux voitures, il faut utiliser une équation du mouvement pour chaque voiture.

Situation 5 (Chapitre 1.6) : *Béatrice double un camion.* Un camion roule à la vitesse constante de 90 km/h. dans la voie de droite de l'autoroute. Béatrice roule à la même vitesse dans la voie de gauche, 100 m *en arrière* du camion (on ne tient pas compte de la distance latérale). À $t = 0$, Béatrice se met à accélérer à $1\ \mathrm{m/s^2}$. On désire déterminer à quel instant t la voiture de Béatrice sera 50 m *en avant* du camion et quelle sera sa vitesse à cet instant.

Évaluons la vitesse en m/s et les données de base :

$$90\ \mathrm{km/h} = 90\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} * \frac{1000}{\mathrm{k}} * \frac{1\ \mathrm{h}}{60\ \mathrm{min}} * \frac{1\ \mathrm{min}}{60\ \mathrm{s}} = 25\ \mathrm{m/s}$$

<u>Camion :</u> (C)		<u>Voiture de Béatrice :</u> (V)	
$x_{\mathrm{C}0} = 0\ \mathrm{m}$	(camion à l'origine à t = 0)	$x_{\mathrm{V}0} = -100\ \mathrm{m}$	(100 m derrière le camion)
$x_{\mathrm{C}} = x$		$x_{\mathrm{V}} = x + 50$	(50 m en avant du camion)
$v_{x\mathrm{C}0} = 25\ \mathrm{m/s}$		$v_{x\mathrm{V}0} = 25\ \mathrm{m/s}$	
$v_{x\mathrm{C}} = v_{x\mathrm{C}0} = 25\ \mathrm{m/s}$		$v_{x\mathrm{V}} = v$	
$a_{x\mathrm{C}} = 0\ \mathrm{m/s^2}$		$a_{x\mathrm{V}} = 1\ \mathrm{m/s^2}$	
$t_{\mathrm{C}} = t$		$t_{\mathrm{V}} = t$	

P.S. x : position du camion après t secondes

Évaluons l'équation de la position du camion (C) à l'aide du MUA :

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad \Rightarrow \quad (x_{\mathrm{C}}) = (0) + (25)t + \frac{1}{2}(0)t^2 \qquad \text{(Remplacer } x_0, v_{x0} \text{ et } a_x\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_{\mathrm{C}} = 25t} \qquad \text{(Position du camion)}$$

Évaluons l'équation de la position de la voiture de Béatrice (V) à l'aide du MUA :

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad \Rightarrow \quad (x_V) = (-100) + (25)t + \frac{1}{2}(1)t^2 \qquad \text{(Remplacer } x_0, v_{x0} \text{ et } a_x\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_V = -100 + 25t + 0{,}5t^2} \qquad \text{(Position voiture de Béatrice)}$$

Remplaçons la position finale du camion x_C et la position finale de la voiture de Béatrice x_V par leur expression définie auparavant :

$$x_C = x : \qquad x_C = 25t \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 25t} \qquad \textbf{(1)}$$

$$x_V = x + 50 : \qquad x_V = -100 + 25t + 0{,}5t^2 \quad \Rightarrow \quad (x + 50) = -100 + 25t + 0{,}5t^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = -150 + 25t + 0{,}5t^2} \qquad \textbf{(2)}$$

Égalisons la position x du camion introduite dans les deux équations de position **(1)** et **(2)** puis isolons le temps t :

$$\textbf{(1)} = \textbf{(2)} \quad \Rightarrow \quad 25t = -150 + 25t + 0{,}5t^2 \qquad \text{(Égalisation de la variable } x\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -150 + 0{,}5t^2 \qquad \text{(Simplification)}$$

$$\Rightarrow \quad 300 = t^2 \qquad \text{(Isoler } t^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad t = \pm\sqrt{300} \qquad \text{(Isoler } t\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t = 17{,}3 \text{ s}} \qquad \text{(Évaluer } t\text{, temps physique)}$$

Évaluons la vitesse de la voiture à 17,3 s :

$$v_x = v_{x0} + a_x t \quad \Rightarrow \quad v_x = (25) + (1)(17{,}3) \qquad \text{(Remplacer valeurs numériques)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_x = 42{,}3 \text{ m/s}} \qquad \text{(Évaluer } v_x\text{)}$$

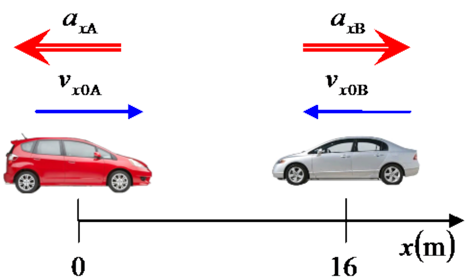
Évaluons la vitesse en km/h :

$$42{,}3 \text{ m/s} = 42{,}3 \ \frac{\text{m}}{\text{s}} * \frac{1 \text{ k}}{1000} * \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} * \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} = 152{,}3 \text{ km/h}$$

Situation 3 : *Face à face*. Deux voitures jouet téléguidées se déplaçant le long de l'axe des x foncent l'une vers l'autre : la voiture **A** se déplace à 5 m/s dans le sens positif et la voiture **B** se déplace à 3 m/s dans le sens négatif. À $t = 0$, les voitures sont séparées de 16 m et elles se mettent à freiner à $1\ \text{m/s}^2$. On désire déterminer s'il y a collision et le cas échéant, à quel instant t elle se produit. (On suppose bien sûre qu'une fois qu'une voiture s'arrête, elle demeure arrêtée.)

Représentation graphique des conditions initiales :

Voiture A	Voiture B
$a_{xA} = -1\ \text{m/s}^2$	$a_{xB} = 1\ \text{m/s}^2$
$v_{x0A} = 5\ \text{m/s}$	$v_{x0B} = -3\ \text{m/s}$
$x_{0A} = 0\ \text{m}$	$x_{0B} = 16\ \text{m}$



S'il y a collision : $x_A = x_B = x$ (les voitures se retrouvent)

S'il n'y a pas de collision : $v_{xA} = v_{xB} = 0$ (les voitures s'immobilisent)

Afin d'éviter les erreurs de logique physique dans le problème (une voiture recule), calculons quelques éléments préliminaires :

1) Temps immobilisation

$$v_x = v_{x0} + a_x t \quad \Rightarrow \quad t_{\text{imm}} = \frac{v_x - v_{x0}}{a_x} = \frac{(0) - v_{x0}}{a_x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{\text{imm}} = -\frac{v_{x0}}{a_x}}$$

Voiture A : $$t_{\text{imm }A} = -\frac{v_{x0A}}{a_x} = -\frac{(5)}{(-1)} = 5\ \text{s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{\text{imm }A} = 5\ \text{s}}$$

Voiture B : $$t_{\text{imm }B} = -\frac{v_{x0B}}{a_x} = -\frac{(-3)}{1} = 3\ \text{s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{\text{imm }B} = 3\ \text{s}}$$

2) Distance de parcours avant immobilisation

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad \Rightarrow \quad x_{\text{imm}} = x_0 + v_{x0}t_{\text{imm}} + \frac{1}{2}a_x t_{\text{imm}}{}^2$$

Voiture A : $$x_{\text{imm }A} = x_{0A} + v_{x0A}t_{\text{imm }A} + \frac{1}{2}a_{xA}t_{\text{imm }A}{}^2 = (0) + (5)(5) + \frac{1}{2}(-1)(5)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{\text{imm }A} = 12{,}5\ \text{m}}$$

Voiture B : $$x_{\text{imm }B} = x_{0B} + v_{x0B}t_{\text{imm }B} + \frac{1}{2}a_{xB}t_{\text{imm }B}{}^2 = (16) + (-3)(3) + \frac{1}{2}(1)(3)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{\text{imm }B} = 11{,}5\ \text{m}}$$

Conclusion :

A : $0 \rightarrow 12{,}5$ en 5 s

B : $16 \rightarrow 11{,}5$ en 3 s

- Il y a sûrement une collision, car il y a croisement dans les positions.
- La voiture B sera peut-être immobilisée lors de la collision.

Puisque c’est la **voiture B** qui **s’immobilise en premier**, évaluons la position de la voiture A au moment où la voiture B est immobile :

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad \Rightarrow \quad x_A = x_{0A} + v_{x0A}\left(t_{\text{imm }B}\right) + \frac{1}{2}a_{xA}\left(t_{\text{imm }B}\right)^2 \qquad \text{(Reformulation)}$$

$$\Rightarrow \quad x_A = (0) + (5)(3) + \frac{1}{2}(-1)(3)^2 \qquad \text{(Remplacer valeur num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_A = 10{,}5 \text{ m}} \qquad \text{(Évaluer } x_A\text{)}$$

A : $0 \rightarrow 10{,}5 \text{ en } 3 \text{ s}$

B : $16 \rightarrow 11{,}5 \text{ en } 3 \text{ s}$

- Il manque 1 m à la voiture A pour atteindre la voiture B.
- La collision sera effectuée avec la voiture B immobile.

Puisque la **position d’arrêt** de la **voiture B** est le **lieu de la collision**, on peut évaluer le temps avant la collision :

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad \Rightarrow \quad x_{col} = x_{0A} + v_{x0A}\left(t_{col}\right) + \frac{1}{2}a_{xA}\left(t_{col}\right)^2 \qquad \text{(Reformulation)}$$

$$\Rightarrow \quad (11{,}5) = (0) + (5)t_{col} + \frac{1}{2}(-1)t_{col}{}^2 \qquad \text{(Remplacer valeur num.)}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = -11{,}5 + 5t_{col} - 0{,}5t_{col}{}^2 \qquad \text{(Évaluer } x_A\text{)}$$

Nous avons une équation du $2^{\text{ième}}$ degré à résoudre :

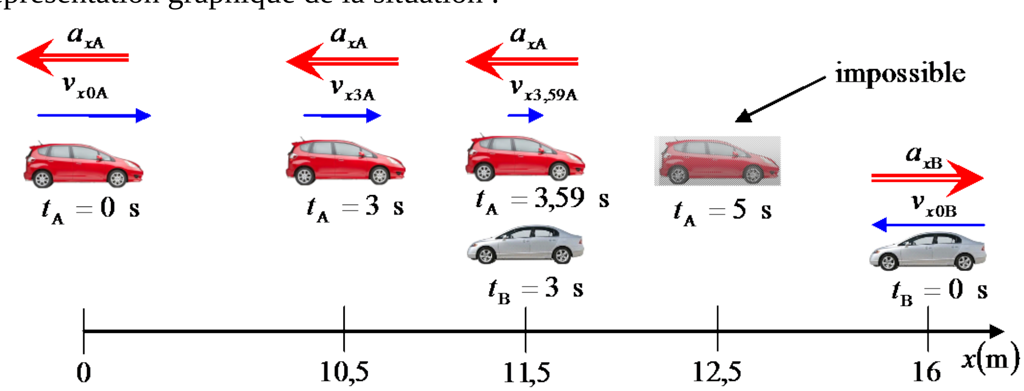
$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad t_{col} = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4(-0{,}5)(-11{,}5)}}{2(-0{,}5)} \qquad \text{(Remplacer } a, b \text{ et } c\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad t_{col} = \frac{5 \pm \sqrt{2}}{1} \qquad \text{(Simplification)}$$

$$\Rightarrow \quad t = \{3{,}59 \;,\; 6{,}41\} \qquad \text{(Deux solutions)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t = 3{,}59 \text{ s}} \qquad \text{(Choisir le } 1^{\text{ier}} \text{ temps)}$$

Voici une représentation graphique de la situation :



Exercices

1.8.2 ***Un chauffeur impoli.*** Un chauffeur d'autobus ferme la porte au nez de Béatrice, démarre et accélère à $1\ \text{m/s}^2$. Prise au dépourvu, Béatrice reste immobile pendant 2 secondes, puis elle se met à courir à la vitesse constante de 5 m/s pour rattraper l'autobus. Quelle distance doit-elle parcourir pour rejoindre la porte de l'autobus et faire une grimace au chauffeur?

1.8.15 ***Le délai maximal.*** Considérez de nouveau la situation de l'exercice **1.8.2** **:** ***Un chauffeur impoli***. Si Béatrice reste immobile pendant trop longtemps, elle ne pourra jamais rejoindre la porte de l'autobus. Quelle est la durée maximale pendant laquelle elle peut se permettre de demeurer immobile?

Solutions

1.8.2 ***Un chauffeur impoli.***

Autobus	Béatrice	
$a_{xA} = 1\ \text{m/s}^2$	$a_{xB} = 0\ \text{m/s}^2$	
$v_{x0A} = 0\ \text{m/s}$	$v_{x0B} = 5\ \text{m/s}$	
$v_{xA} = v\ \text{m/s}$	$v_{xB} = 5\ \text{m/s}$	
$x_{0A} = 0\ \text{m}$	$x_B = 0\ \text{m}$	
$x_A = X\ \text{m}$	$x_B = X\ \text{m}$	(X : position de rencontre)

Relation dans le temps : $t_A = 2 + t_B$ (Béatrice part 2 secondes plus tard)

P.S. Puisque Béatrice débute son mouvement à $t_B = 0$, alors l'autobus aura déjà bougé pendant 2 secondes lorsque Béatrice débutera sa course (2 secondes de retard).

Équations :

Autobus :
$$x_A = x_{0A} + v_{x0A} t_A + \frac{1}{2} a_{xA} t_A^{\ 2} \quad \Rightarrow \quad (X) = (0) + (0) t_A + \frac{1}{2}(1) t_A^{\ 2}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{X = 0{,}5 t_A^{\ 2}}$$

Béatrice :
$$x_B = x_B + v_{xB} t_B + \frac{1}{2} a_{xB} t_B^{\ 2} \quad \Rightarrow \quad (X) = (0) + (5) t_B + \frac{1}{2}(0) t_B^{\ 2}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{X = 5 t_B}$$

On égalise les deux équations et l'on utilise la relation dans le temps :

$$0{,}5t_A^{\,2} = 5t_B \quad \Rightarrow \quad 0{,}5t_A^{\,2} - 5t_B = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}5t_A^{\,2} - 5(t_A - 2) = 0$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}5t_A^{\,2} - 5t_A + 10 = 0$$

Nous avons une équation du 2$^{\text{ième}}$ degré à résoudre :

$$t_A = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad t_A = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(0{,}5)(10)}}{2(0{,}5)}$$

$$\Rightarrow \quad t_A = 5 \pm \sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t_A = \{2{,}76 \ \ , \ \ 7{,}24\}}$$

Avec la relation du temps $t_A = 2 + t_B$, évaluons le temps associé à la course de Béatrice :

$$t_A = \{2{,}76 \ \ , \ \ 7{,}24\} \quad \Rightarrow \quad 2 + t_B = \{2{,}76 \ \ , \ \ 7{,}24\} \qquad \text{(Remplacer } t_A = 2 + t_B\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t_B = \{0{,}76 \ \ , \ \ 5{,}24\}} \qquad \text{(Isoler } t_B\text{)}$$

Béatrice possède deux moments pour faire ça grimace. Le premier temps sera :

$$\boxed{t_B = 0{,}76 \ \text{s}}$$

Ainsi, elle doit parcourir :

$$X = 5t_B \quad \Rightarrow \quad X = 5(0{,}76)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{X = 3{,}8 \ \text{m}}$$

1.8.15 ***Le délai maximal.***

Autobus	Béatrice	
$a_{xA} = 1 \ \text{m/s}^2$	$a_{xB} = 0 \ \text{m/s}^2$	
$v_{x0A} = 0 \ \text{m/s}$	$v_{xSB} = 5 \ \text{m/s}$	
$v_{xA} = v \ \text{m/s}$	$v_{xB} = 5 \ \text{m/s}$	
$x_{0A} = 0 \ \text{m}$	$x_{SB} = 0 \ \text{m}$	
$x_A = X \ \text{m}$	$x_B = X \ \text{m}$	(position de rencontre)

Relation dans le temps : $t_A = S + t_B$ (Béatrice part S secondes plus tard)

Équations :

<u>Autobus :</u> $x_A = x_{0A} + v_{x0A} t_A + \frac{1}{2} a_{xA} t_A{}^2 \Rightarrow (X) = (0) + (0) t_A + \frac{1}{2}(1) t_A{}^2$

$\Rightarrow \boxed{X = 0{,}5 t_A{}^2}$

<u>Béatrice :</u> $x_B = x_B + v_{xB} t_B + \frac{1}{2} a_{xB} t_B{}^2 \Rightarrow (X) = (0) + (5) t_B + \frac{1}{2}(0) t_B{}^2$

$\Rightarrow \boxed{X = 5 t_B}$

On égalise les deux équations et l'on utilise la relation dans le temps :

$0{,}5 t_A{}^2 = 5 t_B \Rightarrow 0{,}5 t_A{}^2 - 5 t_B = 0$

$\Rightarrow 0{,}5 t_A{}^2 - 5(t_A - S) = 0$

$\Rightarrow 0{,}5 t_A{}^2 - 5 t_A + 5S = 0$

Nous avons une équation du 2[ième] degré à résoudre :

$$t_A = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow t_A = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(0{,}5)(5S)}}{2(0{,}5)}$$

$$\Rightarrow t_A = 5 \pm \sqrt{25 - 10S}$$

Pour avoir une <u>**valeur réelle**</u> de temps, il faut que :

$$S \le 2{,}5$$

Évaluons la valeur limite lorsque $S = 2{,}5$ et $\sqrt{25 - 10S} = 0$:

$t_A = 5 \pm \sqrt{25 - 10S} \Rightarrow t_A = 5 \pm \sqrt{0}$

$\Rightarrow \boxed{t_A = 5 \text{ s}}$

Essayons ce temps d'attente dans nos équations du mouvement :

Autobus : $X = 0{,}5 t_A{}^2 = 0{,}5(5)^2 = 12{,}5 \text{ m}$

Béatrice : $X = 5 t_B = 5(t_A - S) = 5(5 - 2{,}5) = 12{,}5 \text{ m}$

Nous vérifions ici que le temps limite d'attente est de : $\boxed{S = 2{,}5 \text{ s}}$