# Chapitre 1.8a – Le MUA à plusieurs paliers

## Mouvement uniformément accéléré à plusieurs paliers

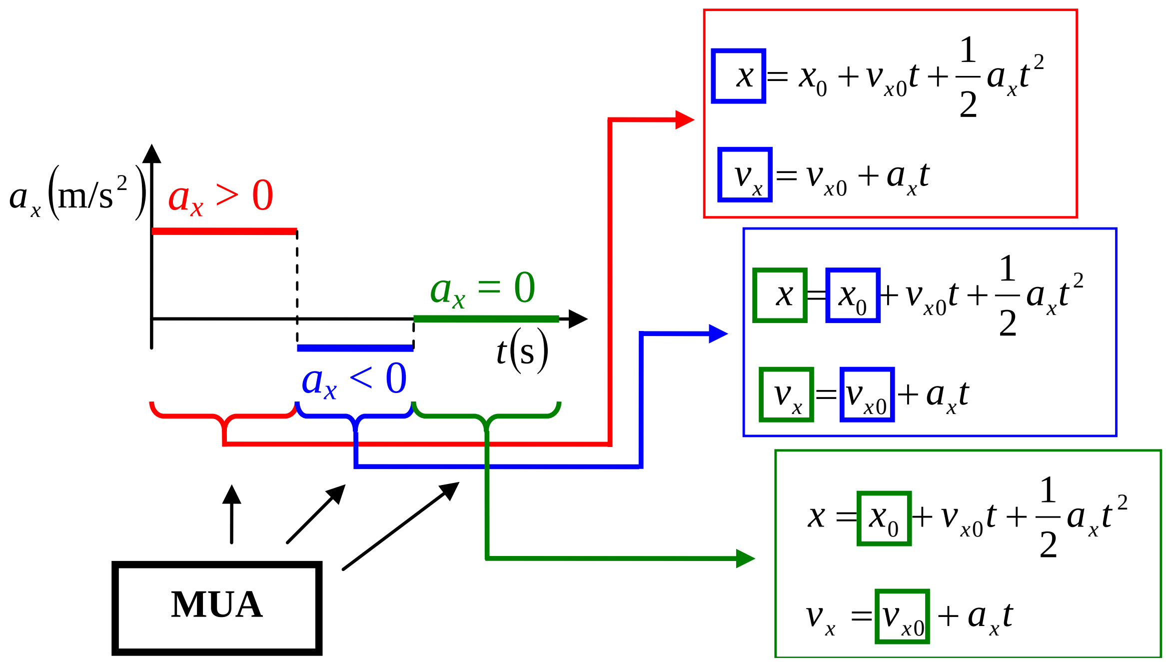
Les équations du MUA nous permettent de déterminer la position $x$ et la vitesse $v_x$ en fonction du temps $t$. L'accélération $a_x$ quant à elle doit être constante.

Si l'accélération n'est pas constante, mais varie brusquement d'une valeur constante à une autre valeur constante, nous pouvons décomposer l'ensemble du mouvement en plusieurs paliers à accélération constante :

- Il faudra découper le problème en plusieurs étapes et définir une position initiale $x_0$ et une vitesse initiale $v_{x0}$ pour chaque accélération $a_x$.
- Pour relier les paliers, la position et la vitesse finale d'un palier deviendront alors la position et la vitesse initiale du palier suivant.

<u>Exemple :</u>

Une auto **accélère** à un rythme de $5\ \text{m/s}^2$, **freine** légèrement à $2\ \text{m/s}^2$ et continue à **vitesse constante**.



**Situation 1 :** ***Entre deux arrêts.*** Un autobus se déplace en ligne droite entre deux arrêts espacés de 210 m. Au démarrage, il prend 3 secondes pour atteindre sa vitesse maximale de 54 km/h. Il roule ensuite à vitesse constante, puis, à la fin de sa course, il prend 5 secondes pour s'arrêter. Lors des phases de démarrage et de freinage, on suppose que sa vitesse en fonction du temps change à un taux constant. On désire déterminer, à l'aide du graphique $v_x(t)$, pendant combien de temps l'autobus a roulé à vitesse constante.

Évaluons notre vitesse en m/s :

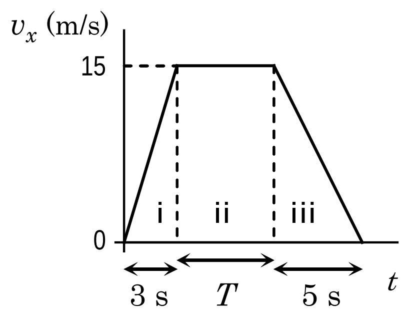
$$v_x = 54 \text{ km/h} \quad \Rightarrow \quad v_x = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}} * \frac{1000}{\text{k}} * \frac{1 \text{ h}}{60\text{min}} * \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ sec}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_x = 15 \text{ m/s}}$$

Voici la représentation graphique de la vitesse $v_x$ en fonction du temps de l'autobus pour les trois accélérations $a_x$ différentes :

Déplacement total :

$\Delta x = 210 \text{ m}$




Évaluons l'aire sous la courbe du graphique pour les régions i, ii et iii :

| Aire d'un triangle | Aire d'un rectangle | Aire d'un triangle |
|---|---|---|
| $\Delta x_{\text{i}} = \frac{1}{2}(3*15) = 22{,}5 \text{ m}$ | $\Delta x_{\text{ii}} = (T*15) = 15T$ | $\Delta x_{\text{iii}} = \frac{1}{2}(5*15) = 37{,}5 \text{ m}$ |

Évaluons le temps $T$ à partir de l'aire sous la courbe et du déplacement total $\Delta x$ :

$\Delta x = \Delta x_{\text{i}} + \Delta x_{\text{ii}} + \Delta x_{\text{iii}} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = (22{,}5) + (15T) + (37{,}5)$ (Remplacer $\Delta x_{\text{i}}$, $\Delta x_{\text{ii}}$ et $\Delta x_{\text{iii}}$)

$\Rightarrow \quad \Delta x = 60 + 15T$ (Simplifier)

$\Rightarrow \quad (210) = 60 + 15T$ (Remplacer $\Delta x = 210$)

$\Rightarrow \quad \boxed{T = 10 \text{ s}}$ (Isoler $T$)

# Exercices

**Exercice X : *Un 200 m.*** Sur un parcours de 200 m, une voiture initialement immobile accélère à $3\ \text{m/s}^2$ sur les premiers 100 m puis freine à $2\ \text{m/s}^2$ sur le reste du parcours. (a) Combien de temps dure le trajet? (b) Quelle est la vitesse de la voiture à la fin du parcours?

**1.8.9** ***C'est un départ.*** Une voiture démarre, accélère à $4\ \text{m/s}^2$ pendant un certain temps, puis roule à la vitesse constante $v_{xC}$. Si 10 secondes après son départ, la voiture a parcouru 128 m, que vaut $v_{xC}$ ?

# Solutions

**Exercice X : *Un 200 m.***

| Accélération : | Freinage : | |
|---|---|---|
| $a_{x(1)} = 3\ \text{m/s}^2$ | $a_{x(2)} = -2\ \text{m/s}^2$ | |
| $v_{x0(1)} = 0\ \text{m/s}$ | $v_{x0(2)} = v_{x(1)} = v$ | |
| $v_{x(1)} = v$ | $v_{x(2)} = ?$ | |
| $x_{0(1)} = 0\ \text{m}$ | $x_{0(2)} = 100\ \text{m}$ | |
| $x_{(1)} = 100\ \text{m}$ | $x_{(2)} = 200\ \text{m}$ | (selon les chiffres, il va se rendre!!!) |
| $t_{(1)} = ?$ | $t_{(2)} = ?$ | |

<u>1er mouvement : trouver la vitesse finale :</u>

$$v_{x(1)}{}^2 = v_{x0(1)}{}^2 + 2a_{x(1)}\left(x_{(1)} - x_{0(1)}\right) \quad \Rightarrow \quad (v)^2 = (0)^2 + 2(3)((100)-(0))$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = 600$$

$$\Rightarrow \quad v = \pm\ 24{,}5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 24{,}5\ \text{m/s}}$$ (acc. positive)

<u>1er mouvement : trouver le temps de parcours :</u>

$$v_{x(1)} = v_{x0(1)} + a_{x(1)} t_{(1)} \quad \Rightarrow \quad (24{,}5) = (0) + (3)t_{(1)}$$

$$\Rightarrow \quad 3t_{(1)} = 24{,}5$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t_{(1)} = 8{,}17\ \text{s}}$$

2$^{\text{ième}}$ mouvement : trouver le temps de parcours :

$$x_{0(2)} = x_{0(2)} + v_{x0(2)} t_{(2)} + \frac{1}{2} a_{x(2)} t_{(2)}^{\;2} \quad \Rightarrow \quad (200) = (100) + (24{,}5) t_{(2)} + \frac{1}{2}(-2) t_{(2)}^{\;2}$$

$$\Rightarrow \quad -t_{(2)}^{\;2} + 24{,}5 t_{(2)} - 100 = 0$$

Nous avons une équation du 2$^{\text{ième}}$ degré à résoudre :

$$t_{(2)} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad t_{(2)} = \frac{-(24{,}5) \pm \sqrt{(24{,}5)^2 - 4(-1)(-100)}}{2(-1)}$$

$$\Rightarrow \quad t_{(2)} = \frac{24{,}5 \pm \sqrt{200}}{2}$$

Premier temps

$$\Rightarrow \quad t_{(2)} = \{5{,}18 \;\; , \;\; 19{,}3\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{(2)} = 5{,}18 \;\; \text{s}}$$

2$^{\text{ième}}$ mouvement : trouver la vitesse finale :

$$v_{x(2)} = v_{x0(2)} + a_{x(2)} t_{(2)} \quad \Rightarrow \quad v_{x(2)} = (24{,}5) + (-2)(5{,}18)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{x(2)} = 14{,}1 \;\; \text{m/s}}$$

Répondre aux questions :

(a) Le temps de parcours est : $t = t_{(1)} + t_{(2)} = (8{,}17) + (5{,}18) = 13{,}35 \;\; \text{s}$

(b) La vitesse finale est : $v_{x(2)} = 14{,}1 \;\; \text{m/s}$

**$\boxed{1.8.9}$ *C'est un départ.***

Mouvement 1)

$a_{x(1)} = 4 \ \text{m/s}^2$

$v_{x0(1)} = 0 \ \text{m/s}$

$v_{x(1)} = v_{xC}$

$x_{0(1)} = 0 \ \text{m}$

$x_{(1)} = D_1$

$t_{(1)} = t_1$

Mouvement 2)

$a_{x(2)} = 0 \ \text{m/s}^2$

$v_{x0(2)} = v_{xC}$

$v_{x(2)} = v_{xC}$ (accélération nulle)

$x_{0(2)} = D_1 \ \text{m}$

$x_{(2)} = 128 \ \text{m}$

$t_{(2)} = t_2$

Voici nos équations :

$t_{(1)} + t_{(2)} = 10 \quad \Rightarrow \quad t_1 + t_2 = 10$ (**eq1**)

$x_{(1)} = x_{0(1)} + v_{x0(1)} t_{(1)} + \frac{1}{2} a_{x(1)} t_{(1)}^2 \quad \Rightarrow \quad D_1 = \frac{1}{2}(4) t_1^2 = 2 t_1^2$ (**eq2**)

$v_{x(1)} = v_{x0(1)} + a_{x(1)} t_{(1)} \quad \Rightarrow \quad v_{xC} = (4) t_1 = 4 t_1$ (**eq3**)

$x_{(2)} = x_{0(2)} + v_{x0(2)} t_{(2)} + \frac{1}{2} a_{x(2)} t_{(2)}^2 \quad \Rightarrow \quad 128 = D_1 + v_{xC} t_2$ (**eq4**)

Nous avons 4 équations et 4 inconnus :

**eq2** dans **eq4** $\Rightarrow \quad 128 = 2 t_1^2 + v_{xC} t_2$ (**eq5**)

**eq3** dans **eq5** $\Rightarrow \quad 128 = 2\left(\frac{v_{xC}}{4}\right)^2 + v_{xC} t_2$

$\Rightarrow \quad 128 = \frac{v_{xC}^2}{8} + v_{xC} t_2$ (**eq6**)

**eq1** dans **eq6** $\Rightarrow \quad 128 = \frac{v_{xC}^2}{8} + v_{xC}(10 - t_1)$

$\Rightarrow \quad 128 = \frac{v_{xC}^2}{8} + 10 v_{xC} - v_{xC} t_1$ (**eq7**)

**eq3** dans **eq7** $\Rightarrow \quad 128 = \frac{v_{xC}^2}{8} + 10 v_{xC} - v_{xC}\left(\frac{v_{xC}}{4}\right)$

$\Rightarrow \quad 128 = \frac{v_{xC}^2}{8} + 10 v_{xC} - \frac{v_{xC}^2}{4}$

$\Rightarrow \quad \boxed{0{,}125 v_{xC}^2 - 10 v_{xC} + 128 = 0}$

Nous avons une équation du 2ième degré à résoudre :

$$v_{xC} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad v_{xC} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(0{,}125)(128)}}{2(0{,}125)}$$

$$\Rightarrow \quad v_{xC} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{0{,}25}$$

$$\Rightarrow \quad v_{xC} = \frac{10 \pm 6}{0{,}25}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{xC} = \{16 \ , \ 64\}} \qquad \text{(Vitesses admissibles)}$$

Puisque nous avons résolu une équation du 2ième ordre, les mathématiques ne tiennent pas compte du signe de l'accélération. Nous garderons pour cette raison la vitesse de 16 m/s, car elle est plus logique avec notre situation. Pour atteindre 64 m/s avec notre accélération, il faut :

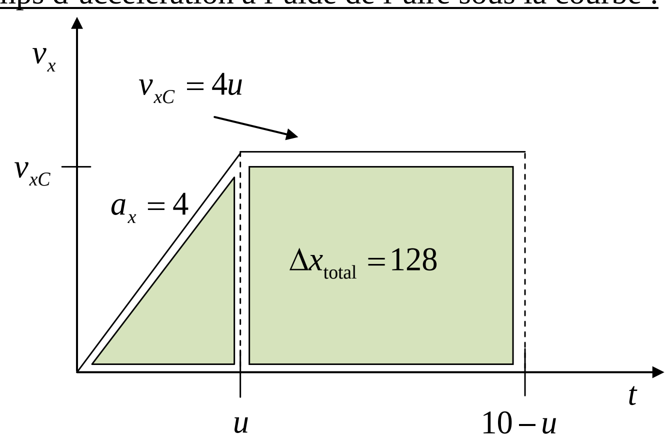
$$v_x = v_{x0} + a_x t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{v_x}{a_x} = \frac{64}{4} = 16 \ \text{s}$$

$\Rightarrow$ temps maximum est de 10 s, donc vitesse invalide.

Ainsi, nous avec une vitesse :

$$\boxed{v_{xC} = 16 \ \text{m/s}}$$

Solution pour évaluer le temps d'accélération à l'aide de l'aire sous la courbe :




$$\Delta x = \text{aire triangle} + \text{aire rectangle} \quad \Rightarrow \quad 128 = \frac{4u * u}{2} + (10 - u) * 4u$$

$$\Rightarrow \quad 128 = 2u^2 + 40u - 4u^2$$

$$\Rightarrow \quad -2u^2 + 40u - 128 = 0$$

$$\Rightarrow \quad u = \{4, 16\}$$

$\Rightarrow$ Choisir 4 s.