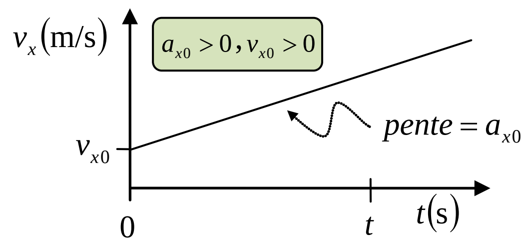
Chapitre 1.6 – Le mouvement uniformément accéléré

L'équation de la vitesse avec une accélération constante

L'équation de la vitesse $v_x(t)$ d'un objet subissant une accélération constante a_{x0} est égal à l'expression suivante :

$$v_x(t) = v_{x0} + a_{x0}t$$



où $v_x(t)$: Équation de la vitesse en fonction du temps (m/s) ($v_x \equiv v_x(t)$)

v_{x0} : Vitesse lorsque $t = 0$ (m/s) ($v_{x0} = v_x(t = 0)$)

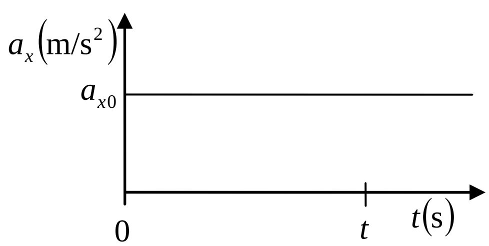
a_{x0} : Accélération constante (m/s^2) ($a_{x0} = a_x(t = 0)$)

t : Temps écoulé dans le mouvement (s)

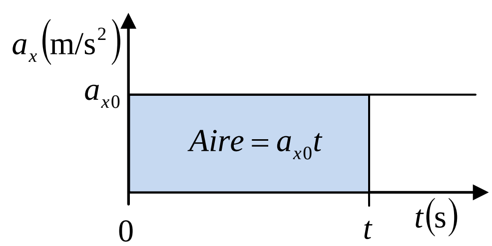
<u>Preuve :</u>

Considérons un objet subissant une accélération constante a_{x0} et se déplaçant à $t = 0$ avec une vitesse égale à v_{x0}. Voici une représentation graphique de la situation :

<u>Équation :</u> $a_x(t) = a_{x0}$ $\quad a_{x0} \in \Re$



<u>Aire sous la courbe entre t = 0 et t :</u>



On peut construire la fonction $v_x(t)$ rapidement, car :

1) L'aire sous la courbe entre $t = 0$ et t est en rectangle qui donne $a_{x0}t$.
2) On connaît la vitesse de l'objet à $t = 0$: v_{x0}

Évaluons l'équation de la vitesse $v_x(t)$ de l'objet :

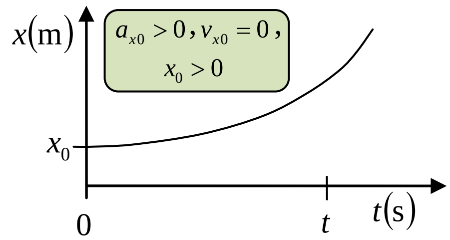
$$v_{xf} = v_{xi} + \Delta v_{x(i \to f)} \quad \Rightarrow \quad v_{xt} = v_{x0} + \Delta v_{x(0 \to t)} \qquad \text{(Évaluer l'expression de : } t = 0 \to t\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_x = v_{x0} + a_{x0}t \quad \blacksquare \qquad (\Delta v_{x(0 \to t)} = a_{x0}t \;\text{ et }\; v_{xt} = v_x)$$

L'équation de la position avec une vitesse uniformément accélérée

L'équation de la position $x(t)$ d'un objet subissant une accélération constante a_{x0} sera de la forme suivante :

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_{x0}t^2$$



où $x(t)$: Équation de la position en fonction du temps (m) ($x \equiv x(t)$)

x_0 : Position lorsque $t = 0$ (m) ($x_0 = x(t = 0)$)

v_{x0} : Vitesse lorsque $t = 0$ (m/s) ($v_{x0} = v_x(t = 0)$)

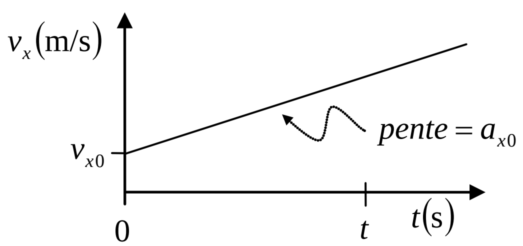
a_{x0} : Accélération constante (m/s^2) ($a_{x0} = a_x(t = 0)$)

t : Temps écoulé dans le mouvement (s)

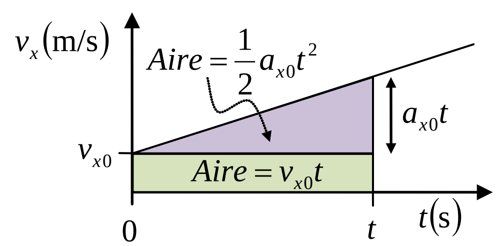
<u>Preuve :</u>

Considérons un objet se déplaçant avec une vitesse v_x subissant une accélération constante a_{x0} dont la vitesse à $t = 0$ est égale à v_{x0} lorsqu'il est situé à la position x_0. Voici une représentation graphique de la situation :

<u>Équation :</u> $v_x(t) = v_{x0} + a_{x0}t$ $\quad a_{x0}, v_{x0} \in \Re$



<u>Aire sous la courbe entre $t = 0$ et t :</u>



On peut construire la fonction $x(t)$ rapidement, car :

1) L'aire sous la courbe entre $t = 0$ et t est en trapèze qui donne $v_{x0}t + \frac{1}{2}a_{x0}t^2$.

2) On connaît la position de l'objet à $t = 0$: x_0

Évaluons l'équation de la position $x(t)$ de l'objet :

$x_f = x_i + \Delta x_{(i \to f)} \quad \Rightarrow \quad x_t = x_0 + \Delta x_{(0 \to t)}$ (Évaluer l'expression de : $t = 0 \to t$)

$\Rightarrow \quad x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_{x0}t^2$ ■ ($\Delta v_{x(0 \to t)} = v_{x0}t + \frac{1}{2}a_{x0}t^2$ et $v_{xt} = v_x$)

Les équations alternatives du mouvement à accélération constante

À partir des équations de la position $x(t)$ et de la vitesse $v_x(t)$ à accélération constante, nous pouvons former deux nouvelles équations du mouvement :

$$v_x{}^2 = v_{x0}{}^2 + 2a_{x0}(x - x_0)$$

(Vitesse en fonction de la position)

$$x = x_0 + \bar{v}_x t$$

(Position avec la vitesse moyenne)

<u>Preuve :</u>

À partir de l'équation de la position, remplaçons certain paramètre afin d'obtenir nos expressions désirées :

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_{x0}t^2$$

$\Rightarrow \quad x = x_0 + v_{x0}\left(\frac{v_x - v_{x0}}{a_{x0}}\right) + \frac{1}{2}a_x\left(\frac{v_x - v_{x0}}{a_{x0}}\right)^2$ (Remplacer $v_x = v_{x0} + a_{x0}t$ tel que $t = \frac{v_x - v_{x0}}{a_{x0}}$)

$\Rightarrow \quad x = x_0 + \frac{v_{x0}}{a_{x0}}(v_x - v_{x0}) + \frac{1}{2a_{x0}}(v_x - v_{x0})^2$ (Simplification a_{x0})

$\Rightarrow \quad a_{x0}(x - x_0) = v_{x0}(v_x - v_{x0}) + \frac{1}{2}(v_x - v_{x0})^2$ (Isoler terme de vitesse)

$\Rightarrow \quad 2a_{x0}(x - x_0) = 2v_{x0}(v_x - v_{x0}) + (v_x - v_{x0})^2$ (Multiplier par 2)

$\Rightarrow \quad 2a_{x0}(x - x_0) = 2v_{x0}v_x - 2v_{x0}{}^2 + (v_x - v_{x0})^2$ (Distribuer $2v_{x0}$)

$\Rightarrow \quad 2a_{x0}(x - x_0) = 2v_{x0}v_x - 2v_{x0}{}^2 + v_x{}^2 - 2v_{x0}v_x + v_{x0}{}^2$ (Développer le terme au carré)

$\Rightarrow \quad 2a_{x0}(x - x_0) = v_x{}^2 - v_{x0}{}^2$ (Effectuer 2 simplifications)

$\Rightarrow \quad v_x{}^2 = v_{x0}{}^2 + 2a_{x0}(x - x_0) \quad \blacksquare$ (Isoler $v_x{}^2$)

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_{x0}t^2$$

$\Rightarrow \quad x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}\left(\frac{v_x - v_{x0}}{t}\right)t^2$ (Remplacer $v_x = v_{x0} + a_{x0}t$ tel que $a_{x0} = \frac{v_x - v_{x0}}{t}$)

$\Rightarrow \quad x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}v_x t - \frac{1}{2}v_{x0}t$ (Simplifier t et distribuer ½)

$\Rightarrow \quad x = x_0 + \frac{1}{2}v_{x0}t + \frac{1}{2}v_x t$ (Simplification)

$\Rightarrow \quad x = x_0 + \left(\frac{v_{x0} + v_x}{2}\right)t$ (Factoriser t,)

$\Rightarrow \quad x = x_0 + \bar{v}_x t \quad \blacksquare$ (Remplacer $\bar{v}_x = \frac{v_{x0} + v_x}{2}$)

Les équations du MUA

Un objet qui subit une accélération uniforme et constante possède des équations du mouvement d'une forme particulière. Voici cinq équations permettant d'évaluer l'accélération, la vitesse et la position en fonction du temps, de la position et de la vitesse. Il y a **trois équations dépendantes du temps** et deux équations supplémentaires obtenues à partir des trois premières équations :

Équations dépendantes du temps du MUA	
$a_x = a_{x0}$	$a_x(t)$ pour le MUA
$v_x = v_{x0} + a_{x0}t$	$v_x(t)$ pour le MUA
$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_{x0}t^2$	$x(t)$ pour le MUA

Équations supplémentaires du MUA	
$v_x^{\,2}(x) = v_{x0}^{\,2} + 2a_{x0}(x - x_0)$	$v_x(x)$ pour le MUA
$x = x_0 + \left(\frac{v_{x0} + v_x}{2}\right)t$	$x(t, v_x)$ pour le MUA

où x : Position de l'objet qui dépend du temps t (m)

v_x : Vitesse de l'objet qui dépend du temps t (m/s)

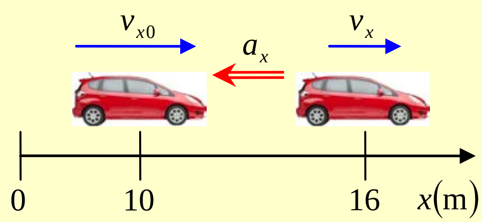
x_0 : Position de l'objet lorsque $t = 0$ (m) ($x_0 = x(t = 0)$)

v_{x0} : Vitesse de l'objet lorsque $t = 0$ (m/s) ($v_{x0} = v_x(t = 0)$)

a_{x0} : Accélération de l'objet constante lorsque $t = 0$ (m/s^2) ($a_{x0} = a_x(t = 0)$)

t : Temps écoulé dans le mouvement (s)

Situation 1 : ***Une voiture freine.*** Une voiture jouet téléguidée contrainte de se déplacer le long de l'axe x voyage dans le sens positif à 6 m/s. Alors qu'elle est à la position $x = 10\ \text{m}$, elle reçoit la commande de ralentir à un taux constant de 2 m/s^2. On désire calculer (a) combien de temps est nécessaire pour que la voiture se rende à la position $x = 16\ \text{m}$; (b) sa vitesse lorsqu'elle sera rendue à cette position.



Voici le schéma de la situation et les données de la situation :

$x_0 = 10\ \text{m}$ $\qquad v_{x0} = 6\ \text{m/s}$ $\qquad a_{x0} = -2\ \text{m/s}^2$

$x = 16\ \text{m}$ $\qquad v_x = ?$ $\qquad t = ?$

Avec l'équation du MUA de la position, évaluons le temps requis pour atteindre la position $x = 16\ \text{m}$:

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_{x0}t^2 \quad \Rightarrow \quad (16) = (10) + (6)t + \frac{1}{2}(-2)t^2 \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad -t^2 + 6t - 6 = 0 \qquad \text{(Simplifier)}$$

Évaluons la solution au polynôme du 2$^{\text{ième}}$ degré :

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(-1)(-6)}}{2(-1)} \qquad \text{(Remplacer } a, b \text{ et } c\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{-6 \pm \sqrt{12}}{-2} \qquad \text{(Simplification)}$$

$$\Rightarrow \quad t = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} \qquad \text{(Simplifier le négatif)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t = \{1{,}27\ ,\ 4{,}73\}} \qquad \text{(Deux solutions)}$$

Avant de répondre à notre question, évaluons la vitesse de notre voiture à ces 2 temps :

$$v_x = v_{x0} + a_{x0}t \quad \Rightarrow \quad v_x(t = 1{,}27) = (6) + (-2)(1{,}27) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_x(t = 1{,}27) = 3{,}46\ \text{m/s}}$$

$$v_x(t = 4{,}73) = (6) + (-2)(4{,}73) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_x(t = 4{,}73) = -3{,}46\ \text{m/s}}$$

Ainsi, le temps du 1$^{\text{er}}$ passage est 1,27 s, car la vitesse est positive (vers la droite) :

(a) 1,27 s $\qquad$ (b) 3,46 m/s

Situation X : ***Un orignal droit devant*!** Un camion roule à 72 km/h. Le chauffeur aperçoit un orignal au milieu de la route et applique les freins alors que le camion est à 60 m de l'orignal : le camion ralentit à 4 m/s^2. On désire déterminer à quelle vitesse le camion frappe l'orignal.

Données de base :

$$x_0 = 0 \text{ m} \qquad v_{x0} = 72 \text{ km/h} \qquad a_{x0} = -4 \text{ m/s}^2$$
$$x = 60 \text{ m} \qquad v_x = ? \qquad t = ?$$

Effectuons le changement d'unité suivant pour la vitesse :

$$v_{x0} = 72 \text{ km/h} \quad \Rightarrow \quad v_{x0} = 72 \ \frac{\text{km}}{\text{h}} * \frac{1000}{\text{k}} \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} * \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{x0} = 20 \text{ m/s}}$$

Avec l'équation du MUA, évaluons la vitesse du camion :

$$v_x{}^2 = v_{x0}{}^2 + 2a_{x0}(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad v_x{}^2 = (20)^2 + 2(-4)((60) - (0)) \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$
$$\Rightarrow \quad v_x{}^2 = -80 \qquad \text{(Simplification)}$$
$$\Rightarrow \quad v_x = \pm\sqrt{-80} \qquad \text{(Appliquer la racine)}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{v_x(x) = \pm 8{,}9 \ i} \qquad (i = \sqrt{-1}, \ i^2 = -1)$$

Puisque la **vitesse** est **imaginaire**, le véhicule **s'immobilise <u>avant</u>** la **collision.**

Évaluons la position où le camion s'immobilise :

$$v_x{}^2 = v_{x0}{}^2 + 2a_{x0}(x - x_0) \quad \Rightarrow \quad (0)^2 = (20)^2 + 2(-4)(x - (0))$$
$$\Rightarrow \quad 0 = 400 - 8x$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{x = 50 \text{ m}}$$