Chapitre 1.5b – L’aire sous la courbe en cinématique

Pente et la cinématique

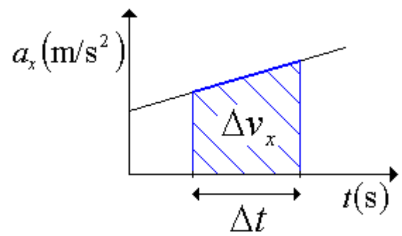
Voici les relations que nous avons établies entre la position, la vitesse et l’accélération :

Position				**Vitesse**				**Accélération**
$x(t)$	$\rightarrow$	pente de la tangente $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$	$\rightarrow$	$v_x(t)$	$\rightarrow$	pente de la tangente $\dfrac{\Delta v_x}{\Delta t}$	$\rightarrow$	$a_x(t)$

Variation de la vitesse et aire sous la courbe d’un graphique $a_x(t)$

À partir de la définition de l’accélération a_x, nous pouvons évaluer une variation de la vitesse Δv_x grâce à l’équation suivante :

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Delta v_x = a_x \ \Delta t}$$



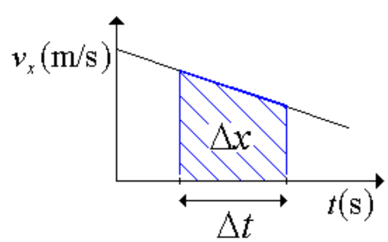
Lorsque l’accélération $a_x(t)$ est définie graphiquement, la variation de la vitesse Δv_x s’évalue grâce à l’aire sous la courbe du graphique de l’accélération.

- ❖ Si $a_x(t) = \text{constante}$: $\quad \Delta v_x = \text{aire d'un rectangle} = a_x \Delta t$
- ❖ Si $a_x(t) \neq \text{constante}$: $\quad \Delta v_x = \text{aire sous la courbe du graphique } a_x(t)$

Variation de la position et aire sous la courbe d’un graphique $v_x(t)$

À partir de la définition de la vitesse v_x, nous pouvons évaluer une variation de la position Δx grâce à l’équation suivante :

$$v_x(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\Delta x = v_x(t) \ \Delta t}$$



Lorsque la vitesse $v_x(t)$ est définie graphiquement, la variation de la position Δx s’évalue grâce à l’aire sous la courbe du graphique de la vitesse.

- ❖ Si $v_x(t) = \text{constante}$: $\quad \Delta x = \text{aire d'un rectangle} = v_x \Delta t$
- ❖ Si $v_x(t) \neq \text{constante}$: $\quad \Delta x = \text{aire sous la courbe du graphique } v_x(t)$

Vitesse et aire sous la courbe

À partir d'un graphique d'accélération $a_x(t)$, nous pouvons évaluer une variation de vitesse Δv_x avec l'aire sous la courbe. Pour évaluer une vitesse v_x à un instant donné, il faut avoir une information supplémentaire à l'aire sous la courbe : une condition initiale.

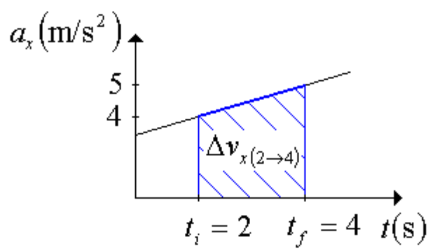
Si l'on évalue l'aire sous la courbe d'un graphique d'accélération $a_x(t)$ entre un temps t_i et t_f et que l'on connaît la vitesse v_{xi} au temps t_i, nous pouvons évaluer la vitesse v_{xf} au temps t_f de la façon suivante :

$$v_{xf} = v_{xi} + \Delta v_{x(i \to f)}$$

où
- v_{xf} : Vitesse au temps t_f (s) $\quad (v_{xf} = v_x(t = t_f))$
- v_{xi} : Vitesse au temps t_i (s) $\quad (v_{xi} = v_x(t = t_i))$
- $\Delta v_{x(i \to f)}$: Variation de la vitesse entre le temps t_i et t_f (m/s) $\quad (\Delta v_{x(i \to f)} = \text{aire sous la courbe})$

Situation A : ***Une accélération linéaire.*** À deux secondes, un mobile se déplace à 6 m/s dans le sens positif de l'axe des *x* et subit une accélération de 4 m/s^2 dans le sens positif de l'axe *x*. À quatre secondes, le mobile subit une accélération de 5 m/s^2 dans le sens positif de l'axe *x*. Sachant que le mobile accélère linéairement, on désire **(a)** tracer le graphique de l'accélération en fonction du temps et **(b)** évaluer la vitesse du mobile à 4 secondes.

Voici la représentation graphique de l'accélération :



Évaluons l'aide sous la courbe du graphique de l'accélération entre 2 et 4 secondes :

$$\Delta v_{x(2\to 4)} = \frac{(h+H)}{2}B \quad \Rightarrow \quad \Delta v_{x(2\to 4)} = \frac{((4)+(5))}{2}((4)-(2))$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta v_{x(2\to 4)} = 9\ \text{m/s}}$$

Évaluons la vitesse du mobile à 4 secondes :

$$v_{xf} = v_{xi} + \Delta v_{x(i\to f)} \quad \Rightarrow \quad v_{x4} = v_{x2} + \Delta v_{x(2\to 4)} \qquad \text{(Remplacer indices } i = 2,\ f = 4\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_{x4} = (6) + (9) \qquad \text{(Remplacer } v_{x2} \text{ et } \Delta v_{x(2\to 4)}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{x4} = 15\ \text{m/s}} \qquad \text{(Évaluer } v_{x4}\text{)}$$

Règle et signe de l'aire sous la courbe

Lorsqu'on évalue une variation de vitesse à l'aide de l'aire sous la courbe, elle peut être positive si elle est au-dessus de l'axe du temps et négative si elle est sous l'axe du temps.

Lorsqu'on évalue la variation de la vitesse à partir du temps de la condition initiale, on doit ajouter cette variation lorsque l'aire sous la courbe est évaluée dans le sens positif du temps (aller vers le futur) et on doit la soustraire lorsque l'aire sous la courbe est évaluée dans le sens négatif du temps (aller vers le passé).

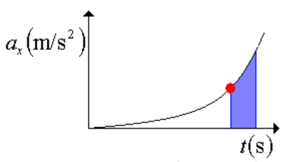
Voici une réécriture des deux règles précédentes qui s'appliquent à toute aire sous la courbe :

1) Signe de Δv_x

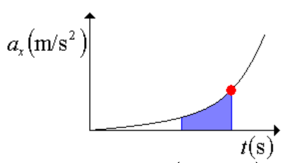
- Si l'aire sous la courbe est positif $\Rightarrow$ $\Delta v_x > 0$
- Si l'aire sous la courbe est négative $\Rightarrow$ $\Delta v_x < 0$

2) Addition ou soustraction de Δv_x

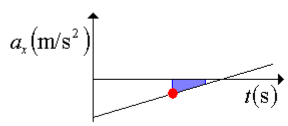
- Aire sous la courbe à droite de la vitesse de référence $\Rightarrow$ $v_{xf} = v_{xi} + (\Delta v_x)$
- Aire sous la courbe à gauche de la vitesse de référence $\Rightarrow$ $v_{xf} = v_{xi} - (\Delta v_x)$



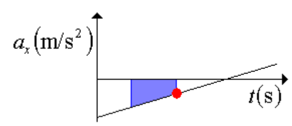
$v_{xf} = v_{xi} + (+\Delta v_x)$



$v_{xf} = v_{xi} - (+\Delta v_x)$



$v_{xf} = v_{xi} + (-\Delta v_x)$



$v_{xf} = v_{xi} - (-\Delta v_x)$

P.S. Le **point rouge** est la vitesse initiale connue v_{xi}.
L'aire sous la courbe bleue est la variation de la vitesse $\Delta v_{x(i\to f)}$.

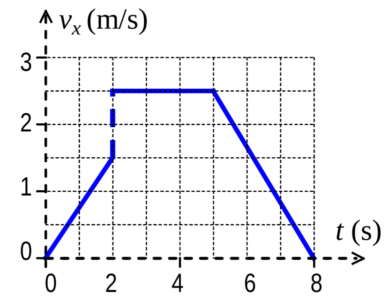
Position et aire sous la courbe

Pour évaluer une position x_f à un temps t_f à partir d'un graphique de vitesse $v_x(t)$, il suffit d'évaluer une variation de position $\Delta x_{(i\to f)}$ entre un temps t_i et t_f et d'additionner ce résultat à la position x_i déjà connue à l'aide des règles des aires sous la courbe :

$$x_f = x_i + \Delta x_{(i\to f)}$$

où x_f : Position au temps t_f (m) $\quad (v_{xf} = v_x(t = t_f))$
x_i : Position au temps t_i (s) $\quad (v_{xi} = v_x(t = t_i))$
$\Delta x_{(i\to f)}$: Variation de la position entre le temps t_i et t_f (m/s) $\quad (\Delta x_{(i\to f)} = \text{aire sous la courbe})$

Situation B : ***Retour vers le passé.*** Une voiture téléguidée se déplace horizontalement à la vitesse décrite par le graphique ci-contre. À $t = 0$, la voiture débute sa course et s'immobilise huit secondes plus tard à la coordonnée $x_8 = 7\ \text{m}$. On désire déterminer la position de départ x_0 de la voiture.



Évaluons le nombre de carreaux sous la courbe entre 0 et 8 secondes :

$$N = \text{triangle}\#1 + \text{rectangle} + \text{triangle}\#2 \quad \Rightarrow \quad N = \left(\frac{2\times 3}{2}\right) + (3\times 5) + \left(\frac{3\times 5}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{N = 25{,}5\ \text{carreaux}}$$

Évaluons l'aire que représente un carreau :

$$1\ \text{carreau} = 0{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 1\ \text{s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{1\ \text{carreaux} = 0{,}5\ \text{m}}$$

Évaluons l'aire sous la courbe entre 0 et 8 secondes en m :

$$\Delta x = \text{aire sous la courbe} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = (25{,}5)(0{,}5)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta x = 12{,}75\ \text{m}}$$

Évaluons la position x_0 à 0 se sachant que l'aire sous la courbe a été évalue de 8 à 0 seconde :

$$x_f = x_i + \Delta x_{(i\to f)} \quad \Rightarrow \quad x_0 = x_8 + \Delta x_{(8\to 0)} \quad \text{(Remplacer indices)}$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = x_8 + (+\Delta x) \quad \text{(Aire sous la courbe positive, } +\Delta x\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = x_8 - (\Delta x) \quad \text{(Vers le passé, } -(\Delta x)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = (7) - (12{,}75) \quad \text{(Remplacer } x_8 \text{ et } \Delta x\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_0 = -5{,}75\ \text{m}} \quad \text{(Évaluer } x_0\text{)}$$