Chapitre 1.3 – La vitesse instantanée

La vitesse dans un graphique de position

On peut obtenir une **vitesse moyenne** $\bar{v}_x$ à l'aide d'un graphique de position $x(t)$ en fonction du temps t en effectuant un **calcul de pente**. Puisqu'une pente est une rapport entre une variation selon l'axe des ordonnées (la position : $x(t)$) et une variation selon l'axe des abstisses (le temps : t) , la vitesse moyenne $\bar{v}_x$ peut s'obtenir de la façon suivante :

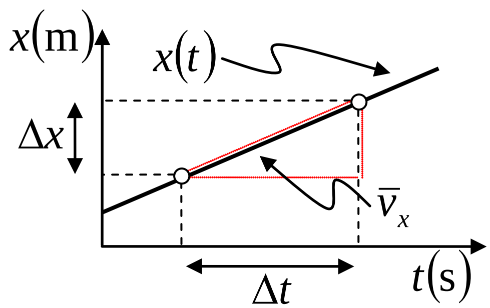
Définition de la vitesse moyenne :

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

où $\bar{v}_x$: Vitesse moyenne (m/s)

Δx : Variation de la position (m)

Δt : Variation du temps (s)



La vitesse instantanée à l'aide de la droite tangente

La vitesse moyenne $\bar{v}_x$ n'est pas toujours une information précise, car la vitesse d'un objet n'est pas toujours constante. Lorsque la vitesse varie dans le temps, il faut évaluer la vitesse à chaque instant pour bien évaluer l'évolution de la position dans le temps.

Dans un graphique de position $x(t)$, on peut calculer une **vitesse instantanée** v_x à un temps t donné à partir de la **pente** d'une **droite tangente**[1] touchant le graphique de position à l'instant t. Cette définition est valide, car la pente d'une droite dans un graphique de position correspond à une information de vitesse.

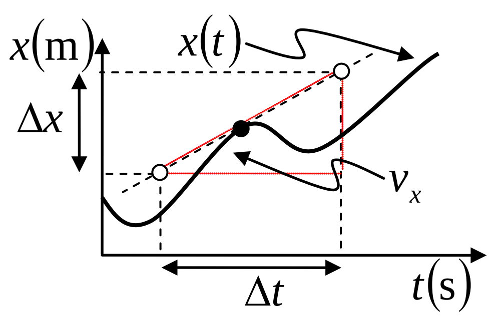
Définition de la vitesse instantanée :

$$v_x = \left.\frac{\Delta x}{\Delta t}\right|_{\text{droite tangente}}$$

où v_x : Vitesse instantanée (m/s)

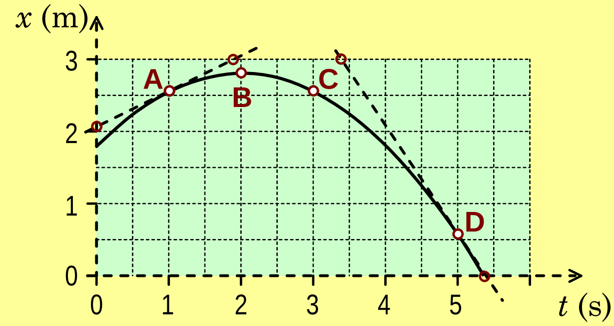
Δx : Variation de la position (m)

Δt : Variation du temps (s)

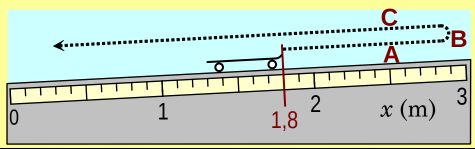


[1] Une droite tangente est une droite qui touche qu'à un seul point d'un graphique.

Situation 3 : ***Une planche à roulettes sur un plan incliné.*** Sur une piste en béton légèrement inclinée (3^o par rapport à l'horizontale), on lance avec la main une planche à roulettes vers le haut de la piste (schéma ci-dessous, à gauche). On observe que la planche ralentit en montant, puis redescend en allant de plus en plus vite.



En plaçant une règle graduée à côté de la piste et en filmant le mouvement, on obtient le graphique $x(t)$ ci-dessous, à droite. (On a commencé à filmer un peu après avoir lancé la planche et on a noté à chaque instant la position du point le plus à droite de la planche). À partir du graphique $x(t)$, on désire obtenir le graphique $v_x(t)$ correspondant.



En traçant la tangente au point **A**, on peut évaluer la vitesse à **1 s**. La pente de cette droite sera la vitesse instantanée de l'objet à 1 s, car la pente effectue le calcul $v_x = \Delta x / \Delta t$:

<u>Deux points sur la tangente :</u> $x_1 = 2{,}1 \text{ m}$, à $t_1 = 0 \text{ s}$ (Point 1)

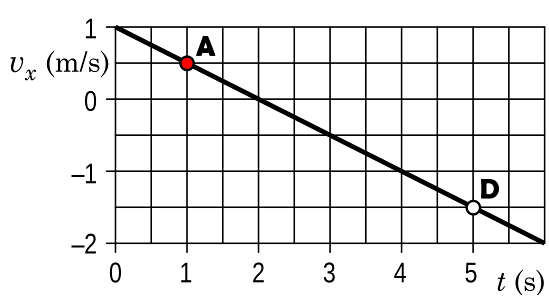
$x_2 = 3{,}0 \text{ m}$, à $t_2 = 1{,}8 \text{ s}$ (Point 2)

$$v_{xA} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad v_{xA} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$ (Remplacer Δx et Δt)

$$\Rightarrow \quad v_{xA} = \frac{(3)-(2{,}1)}{(1{,}8)-(0)}$$ (Remplacer valeurs numériques)

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{xA} = 0{,}5 \text{ m/s}}$$ (Évaluer v_{xA})

On peut effectuer plusieurs de ces calculs pour tous les temps entre 0 et 5 secondes (faire plusieurs droites tangentes) et obtenir le graphique de la vitesse en fonction du temps :



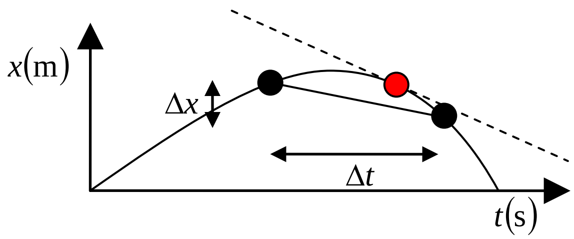
(Construction d'un graphique $v_x(t)$ à partir d'un graphique $x(t)$ et des droites tangentes)

La vitesse instantanée en tant que limite

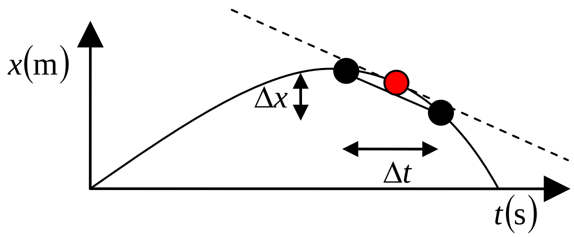
Pour évaluer la vitesse instantanée, il n'est pas toujours nécessaire de tracer une droite tangente. On peut approximer une droite tangente à partir de **deux positions <u>sur</u>** le graphique $x(t)$ et effectuer le calcul de pente suivant :

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Si les deux positions sur la courbe (**points noirs**) sont <u>trop éloignées</u> dans le temps, la vitesse instantanée (**point rouge**) sera <u>imprécise</u>**.**



Si les deux positions sur la courbe (**point noir**) sont <u>près dans le temps</u>, la vitesse instantanée (**point rouge)** sera <u>précise</u>.

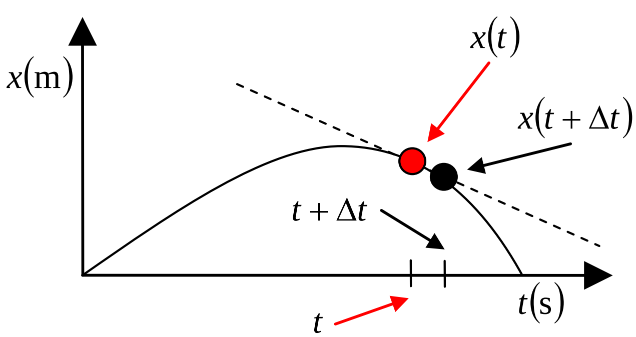


Avec la définition de la limite en mathématique, le calcul de la vitesse instantanée s'effectue de la façon suivante :

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Pour effectuer le calcul de Δx, il s'agit de :

1) Prendre la position au moment t où l'on veut évaluer la vitesse $\Rightarrow$ $x(t)$
2) Prendre la position après un temps supplémentaire de Δt $\Rightarrow$ $x(t+\Delta t)$
3) Plus le choix de Δt est petit, plus la vitesse instantanée sera précise.



$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{t + \Delta t \; - \; t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

Situation A : *Une planche à roulettes sur un plan incliné : calcul avec limite.* À partir de l'équation de la position $x(t) = -0{,}25t^2 + t + 1{,}75$ associée au mouvement de la planche à roulettes de la situation 3, on désire évaluer la vitesse instantanée à $t = 5$ s avec une précision de $\Delta t = 0{,}001$ s.

Afin d'évaluer la vitesse instantanée à l'aide de la limite, évaluons la position $x(t)$ et $x(t+\Delta t)$ à $t = 5$ s :

$x(t)$: $\quad x(t=5) = -0{,}25(5)^2 + (5) + 1{,}75 = 0{,}5 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t=5) = 0{,}5 \text{ m}}$

$x(t+\Delta t)$: $\quad x(t=5{,}001) = -0{,}25(5{,}001)^2 + (5{,}001) + 1{,}75 \Rightarrow \quad \boxed{x(t=5{,}001) = 0{,}4985 \text{ m}}$

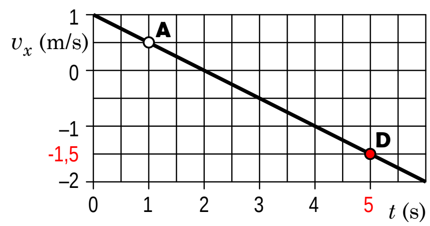
Évaluons maintenant la vitesse à $t = 5$ s :

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad v_x(t) \approx \lim_{\Delta t \to 0{,}001} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad \text{(Approximation avec } \Delta t \to 0{,}001\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_x(t=5) \approx \lim_{\Delta t \to 0{,}001} \frac{(0{,}4985) - (0{,}5)}{(0{,}001)} \quad \text{(Remplacer valeurs numériques)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_x(t=5) \approx -1{,}5 \text{ m/s}} \quad \text{(Évaluer la vitesse)}$$

On réalise que ce calcul est exact si l'on compare notre résultat au résultat du graphique $v_x(t)$ de la **Situation 3** (voir graphique ci-contre, le point **rouge**).



Exercice

Exercice A : *Vitesse instantanée avec trois Δt.* La position (x, en mètre) dans le temps (t, en seconde) d'une particule est donnée par l'équation suivante :

$$x(t) = 12t^4 - 6t$$

a) Évaluez la vitesse instantané à 4 s lorsque $\Delta t = 0{,}1$ s.

b) Évaluez la vitesse instantané à 4 s lorsque $\Delta t = 0{,}01$ s.

c) Évaluez la vitesse instantané à 4 s lorsque $\Delta t = 0{,}001$ s.

Solution

Exercice A : ***Vitesse instantanée avec trois Δt.***

Nous avons l'équation de la position suivante : $x(t) = 12t^4 - 6t$

a) À $t = 4$ s avec $\Delta t = 0{,}1$ s :

$$x(t = 4) = 12(4)^4 - 6(4) = 3048 \text{ m}$$

$$x(t = 4{,}1) = 12(4{,}1)^4 - 6(4{,}1) = 3366 \text{ m}$$

$$v_x(t = 4) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(3366) - (3048)}{0{,}1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_x(t = 4) = 3180 \text{ m/s}}$$

b) À $t = 4$ s avec $\Delta t = 0{,}01$ s :

$$x(t = 4) = 12(4)^4 - 6(4) = 3048{,}0 \text{ m}$$

$$x(t = 4{,}01) = 12(4{,}01)^4 - 6(4{,}01) = 3078{,}8 \text{ m}$$

$$v_x(t = 4) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(3078{,}8) - (3048{,}0)}{0{,}01} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_x(t = 4) = 3080 \text{ m/s}}$$

c) À $t = 4$ s avec $\Delta t = 0{,}001$ s :

$$x(t = 4) = 12(4)^4 - 6(4) = 3048{,}00 \text{ m}$$

$$x(t = 4{,}001) = 12(4{,}001)^4 - 6(4{,}001) = 3051{,}07 \text{ m}$$

$$v_x(t = 4) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(3051{,}07) - (3048{,}00)}{0{,}001} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_x(t = 4) = 3070 \text{ m/s}}$$

Avec une technique plus avancée (voir 1.13), nous pouvons évaluer la vitesse instantanée exacte à l'aide du calcul différentiel :

$$v_x(t = 4) = 3066 \text{ m/s}$$