Chapitre 1.13 – La dérivée en cinématique

La dérivée

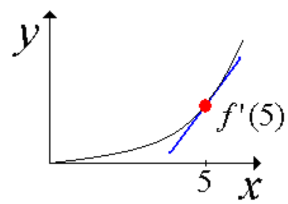
En mathématique, on définit la dérivée d'une fonction $f(x)$ tel que

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}\, f(x)}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

où $f'(x)$ correspond à la fonction qui évalue la pente de la tangente en tout point de la fonction $f(x)$.

Exemple graphique :

La **pente bleu** au **point rouge** $x = 5$ est évaluée à l'aide de la dérivée de la fonction $f(x)$ et est égale à $f'(5)$.



Exemple numérique :

Soit $f(4) = 7$ et $f'(4) = 2$

À la coordonnée $x = 4$, la valeur associée est 7 et la pente à cette coordonnée est 2.

La vitesse et l'accélération à l'aide de la dérivée

Nous avons donné la définition suivante à la vitesse et l'accélération :

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \qquad \text{et} \qquad a_x(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Grâce au calcul différentiel, on peut maintenant utiliser la définition de la dérivée et donner les définitions suivantes à la position, la vitesse et à l'accélération :

<u>La position :</u>	$x(t)$	unité : $[x(t)] = \mathrm{m}$
<u>La vitesse :</u>	$v_x(t) = \dfrac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t}$	unité : $[v_x(t)] = \mathrm{m/s}$
<u>L'accélération :</u>	$a_x(t) = \dfrac{\mathrm{d}\,v_x(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2}$	unité : $[a_x(t)] = \mathrm{m/s^2}$

N.B. Les fonctions de la vitesse et de l'accélération peuvent être évaluées efficacement si l'on <u>**connaît**</u> la fonction de la **position** en fonction du temps, car elles peuvent être obtenues à partir de l'opération de la dérivée.

Situation A : *Une planche à roulettes sur un plan incliné : calcul avec dérivée.* À partir de l'équation de la position $x(t) = -0{,}25t^2 + t + 1{,}75$ associée au mouvement de la planche à roulettes de la situation 3 du chapitre 1.3, on désire évaluer **(a)** l'équation de la vitesse $v_x(t)$ et **(b)** l'équation de l'accélération $a_x(t)$.

(a) On peut appliquer la dérivée par rapport au temps à la fonction $x(t)$ et obtenir $v_x(t)$:

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad v_x(t) = \frac{\mathrm{d}\left(-0{,}25t^2 + t + 1{,}75\right)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Remplacer } x(t)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-0{,}25t^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1{,}75) \qquad \text{(Distributivité de la dérivée)}$$

$$\Rightarrow \quad v_x(t) = -0{,}25\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(t^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t) + 1{,}75\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1) \qquad \text{(Factorisation des constantes)}$$

$$\Rightarrow \quad v_x(t) = -0{,}25(2t) + (1) + 1{,}75(0) \qquad \text{(Évaluer les dérivées)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_x(t) = -0{,}5t + 1} \qquad \text{(Simplifier)}$$

(b) On peut appliquer la dérivée par rapport au temps à la fonction $v_x(t)$ et obtenir $a_x(t)$:

$$a_x(t) = \frac{\mathrm{d}\,v_x(t)}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad a_x(t) = \frac{\mathrm{d}\left(-0{,}5t + 1\right)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Remplacer } x(t)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad a_x(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-0{,}5t\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1) \qquad \text{(Distributivité de la dérivée)}$$

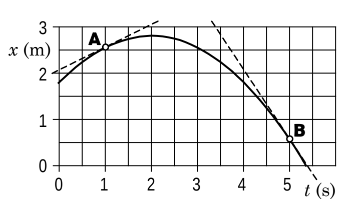
$$\Rightarrow \quad a_x(t) = -0{,}5\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1) \qquad \text{(Factorisation des constantes)}$$

$$\Rightarrow \quad a_x(t) = -0{,}5(1) + (0) \qquad \text{(Évaluer les dérivées)}$$

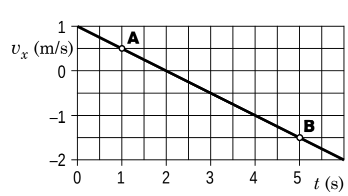
$$\Rightarrow \quad \boxed{a_x(t) = -0{,}5} \qquad \text{(Simplifier)}$$

Voici la représentation graphique de nos trois équations du mouvement :

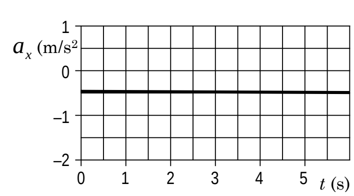
Graphique de $x(t)$



Graphique de $v_x(t)$



Graphique de $a_x(t)$



Maximisation et minimisation

Dans plusieurs problèmes de cinématique, il est intéressant d'évaluer des valeurs extrémaux (maximum et minimum). Pour évaluer un extrémum, il faut connaître l'agent qui fait varier le paramètre que l'on veut maximiser ou minimiser. L'agent qui fait varier la position est la vitesse et l'agent qui fait varier la vitesse est l'accélération. Pour ce qui est de l'accélération, l'agent ne porte pas de nom particulier.

Pour **maximiser** ou **minimiser** un **paramètre** (position, vitesse ou accélération), il faut que leur **agent de variation** soit **nul** (égal à zéro).

<u>Exemple :</u> Un objet atteint une hauteur maximale lorsque sa vitesse est nulle, car l'objet ne peut pas gagner d'altitude s'il ne possède pas de vitesse vers le haut.

Voici un tableau qui résume les conditions à satisfaire afin de maximiser (max) ou minimiser (min) la position, la vitesse ou l'accélération :

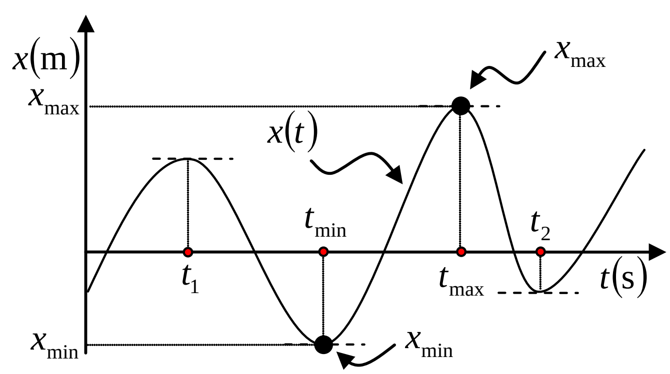
Paramètre à maximiser ou minimiser	Notation	Condition à satisfaire
Position	$x_{\max}$ ou $x_{\min}$	$v_x(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$
Vitesse	$v_{x\,\max}$ ou $v_{x\,\min}$	$a_x(t) = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0$
Accélération[1]	$a_{x\,\max}$ ou $a_{x\,\min}$	$j_x(t) = \dfrac{\mathrm{d}a_x}{\mathrm{d}t} = 0$

<u>Procédure :</u>

1) Évaluer les temps qui permettent de satisfaire la condition de maximisation ou de minimisation.

2) Choisir le temps qui correspond à la situation physique à résoudre.

3) Évaluer le paramètre à maximiser ou minimiser à l'aide du temps choisi approprié.



• : Temps où $v_x = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t = 0$

$$v_x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \{t_1, t_{\min}, t_{\max}, t_2\}$$

$$x_{\min} = x(t = t_{\min})$$

$$x_{\max} = x(t = t_{\max})$$

[1] La dérivée de l'accélération porte le nom de « jerk » avec la notation « *j* ». Ce concept est utilisé en ingénierie pour évaluer les variations brutales d'accélération (ex : train, métro).

Exercices

Exercice A : ***La vitesse au 2^e degré.*** La vitesse d'une particule est donnée par l'équation suivante en m/s: $v(t) = 12t^2 + 2t + 7$

a) Évaluez l'équation permettant d'obtenir l'accélération en fonction du temps.

b) Quelle est l'accélération à 3 secondes.

Exercice B : ***La fusée verticale.*** Une fusée avec propulseur se déplace verticalement selon l'équation suivante en mètres par rapport au niveau du sol :

$$y(t) = 0{,}2t^3 + 0{,}1t^2 + 5t + 2$$

a) À quelle hauteur est lancée initialement la fusée.

b) Quelle est la vitesse de la fusée après 3 secondes.

c) Quelle est l'accélération de la fusée après 5 secondes.

Exercice C : ***La bille s'immobilise.*** À quel moment une bille s'immobilise si elle se déplace sur une table inclinée selon l'équation suivante : $x(t) = -2t^2 + 5t + 3$

Exercice D : ***L'ascenseur en accélération verticale.*** Un ascenseur s'élève vers le haut selon l'équation suivante en mètres :

$$y(t) = -5t^4 + 8t + 12$$

Évaluez la hauteur maximale atteinte par l'ascenseur.

Solutions

Exercice A : ***Le vitesse au 2^e^ degré*****.**

a) $a(t) = \dfrac{\mathrm{d}\,v(t)}{\mathrm{d}t} = 24t + 2$ b) $a(t = 3) = 24(3) + 2 = 74 \ \text{m/s}^2$

Exercice B : ***La fusée verticale*****.**

a) $y(t = 0) = 2 \ \text{m}$

b) $v_y(t) = \dfrac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}t} = 0{,}6t^2 + 0{,}2t + 5$ et $v_y(t = 3) = 0{,}6(3)^2 + 0{,}2(3) + 5 = 11 \ \text{m/s}$

c) $a_y(t) = \dfrac{\mathrm{d}\,v_y(t)}{\mathrm{d}t} = 1{,}2t + 0{,}2$ et $a_y(t = 5) = 1{,}2(5) + 0{,}2 = 6{,}2 \ \text{m/s}^2$

Exercice C : ***La bille s'immobilise*****.**

Vitesse de la bille : $v_x(t) = \dfrac{\mathrm{d}\,x(t)}{\mathrm{d}t} = -4t + 5$

S'immobiliser signifie que $v_x = 0$: $v_x(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad -4t + 5 = 0$

$\Rightarrow \quad 4t = 5$

$\Rightarrow \quad \boxed{t = 1{,}25 \ \text{s}}$

La bille s'immobilise après **1,25 secondes**.

Exercice D : ***L'ascenseur en accélération verticale*****.**

Vitesse de l'ascenseur : $v_y(t) = \dfrac{\mathrm{d}\,y(t)}{\mathrm{d}t} = -20t^3 + 8$

La hauteur maximale signifie que $v_y = 0$:

$v_y(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad -20t^3 + 8 = 0 \quad \Rightarrow \quad 20t^3 = 8$

$\Rightarrow \quad t^3 = 0{,}4 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt[3]{0{,}4}$

$\Rightarrow \quad \boxed{t = 0{,}737}$

On remplace ce temps dans l'équation de la position et l'on obtient la position maximale :

$y(t = 0{,}737) = -5(0{,}737)^4 + 8(0{,}737) + 12 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_{\max} = 16{,}42 \ \text{m}}$