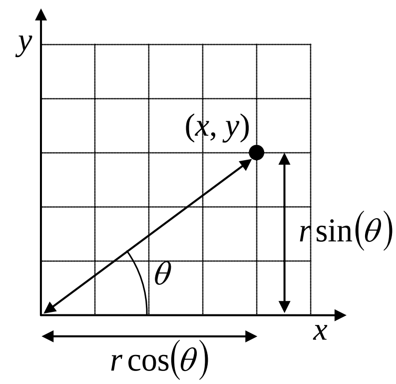
Chapitre 1.12c – L'accélération en coordonnées polaires

Les coordonnées polaires

Les coordonnées polaires est un système d'axe permettant d'évaluer la distance r par rapport à une origine (point de référence) et une orientation θ sur 360° (2π radians) dans un plan autour de l'origine. La correspondance entre une coordonnée cartésienne xy et une coordonnée polaire $r\theta$ s'effectue par le calcul suivant :



$$x = r\cos(\theta) \quad \text{et} \quad y = r\sin(\theta)$$

où x : Coordonnée cartésienne selon l'axe x ($x \in [-\infty, \infty]$).

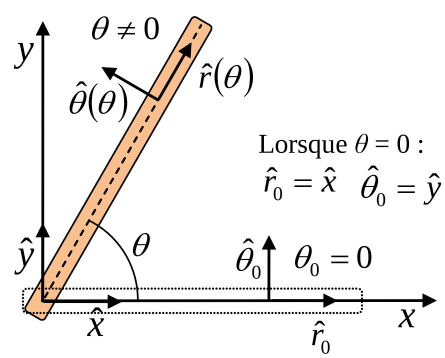
y : Coordonnée cartésienne selon l'axe y ($y \in [-\infty, \infty]$).

r : Coordonnée polaire selon l'axe r ($r \in [0, \infty]$).

θ : Coordonnée polaire selon l'axe θ ($\theta \in [0, 2\pi]$).

Les vecteurs unitaires en coordonnée polaire

En coordonnée cartésienne, les vecteurs unitaire $\hat{x}$ et $\hat{y}$ qui représente les orientations des axes xy sont constants (ne dépendent pas de la coordonnée). Cependant, ce n'est pas le cas pour les vecteur unitaires $\hat{r}$ et $\hat{\theta}$, car l'orientation $\hat{r}$ de l'éloignement et de la rotation $\hat{\theta}$ dépendent de la position angulaire θ :



$$\hat{r} = \cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y}$$

et $$\hat{\theta} = -\sin(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{y}$$

où $\hat{r}$: Vecteur unitaire de l'axe r qui dépend de la coordonnée θ.

$\hat{\theta}$: Vecteur unitaire de l'axe θ qui dépend de la coordonnée θ.

θ : Coordonnée polaire selon l'axe θ ($\theta \in [0, 2\pi]$).

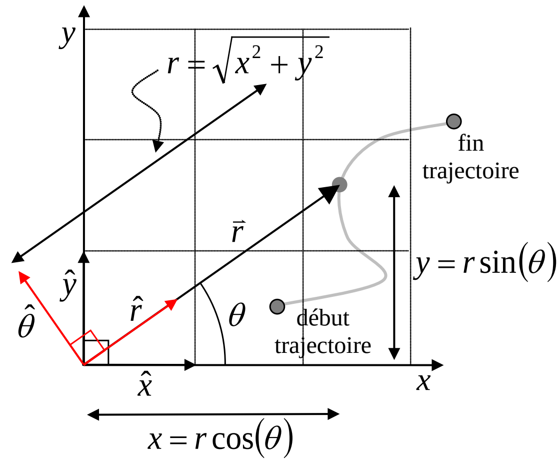
$\hat{x}$: Vecteur unitaire en coordonnée cartésienne de l'axe x.

$\hat{y}$: Vecteur unitaire en coordonnée cartésienne de l'axe y.

Le vecteur position en coordonnée polaire

Le vecteur position $\vec{r}$ en coordonnée polaire est très simple à écrire, car il nécessite uniquement la distance r entre l'origine et la position représentée par $\vec{r}$ et l'orientation $\hat{r}$ qui elle comprend déjà l'information de la position angulaire θ.

On peut faire la correspondance entre une vecteur position $\vec{r}$ exprimé en coordonnée cartésienne xy et en coordonnée polaire $r\theta$ par les calculs suivants :



En coordonnée cartésienne	En coordonnée polaire
$\vec{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y}$ tel que $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$	$\vec{r} = r\,\hat{r}$

Il est à noter qu'il est raisonnable d'utiliser la notation « $\vec{r}$ » pour désigner le concept de vecteur position, car cette écriture respecte la convention d'écriture « $\vec{A} = A\hat{A}$ » tout en représentant le concept de position par rapport à l'origine d'un système d'axe.

La différence entre l'accélération en coordonnée cartésienne et en coordonnée polaire

En coordonnée cartésienne, les vecteurs unitaires $\hat{x}$ et $\hat{y}$ sont constant dans l'espace et le temps, car ils ne dépendent pas de la coordonnée xy d'un point. Ainsi, l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ prend une forme très simple :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x\,\hat{x} + y\,\hat{y}\right)\right) = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\hat{x} + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\hat{y} \qquad \text{car} \qquad \frac{\mathrm{d}\hat{x}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\hat{y}}{\mathrm{d}t} = 0$$

En coordonnée polaire, les vecteurs unitaire $\hat{r}$ et $\hat{\theta}$ ne sont constant dans l'espace et le temps, car ils dépendent de la position angulaire θ. Ainsi, l'expression du vecteur accélération $\vec{a}$ prend une forme <u>plus complexe</u> en raison de l'application de la **règle de la dérivée en chaine**[1] lors de l'application de **l'opérateur de dérivée total** $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ sur le vecteur vitesse $\vec{v}$:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}\right) \neq \frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2}\hat{r} + \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}\hat{\theta} \qquad \text{car} \qquad \frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} \neq \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t} \neq 0$$

[1] La dérivée en chaine : $\frac{\mathrm{d}\left(f(x)\cdot g(x)\right)}{\mathrm{d}x} = g(x)\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + f(x)\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}$

Variation des vecteurs unitaires en coordonnée polaire

La variation des vecteurs unitaires $\hat{r}$ et $\hat{\theta}$ en coordonnée polaire n'est pas nulle dans l'espace selon la coordonnée θ ni dans le temps t.

Vecteur unitaire radial $\hat{r}$		Vecteur unitaire angulaire $\hat{\theta}$	
$\dfrac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta}=\hat{\theta}$	$\dfrac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\theta}$	$\dfrac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta}=-\hat{r}$	$\dfrac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t}=-\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{r}$

<u>Preuve :</u>

À partir des représentations de $\hat{r}$ et $\hat{\theta}$ en coordonnée cartésienne, évaluons la variation de ces vecteurs unitaires par rapport à position angulaire θ et au temps t :

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}(\cos(\theta)\hat{x}+\sin(\theta)\hat{y})}{\mathrm{d}\theta} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta}=-\sin(\theta)\hat{x}+\cos(\theta)\hat{y}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}\theta}=\hat{\theta} \quad \blacksquare$$

(Remplacer $\hat{\theta}=-\sin(\theta)\hat{x}+\cos(\theta)\hat{y}$)

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta}=\frac{\mathrm{d}(-\sin(\theta)\hat{x}+\cos(\theta)\hat{y})}{\mathrm{d}\theta} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta}=-\cos(\theta)\hat{x}-\sin(\theta)\hat{y}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta}=-(\cos(\theta)\hat{x}+\sin(\theta)\hat{y})$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}\theta}=-\hat{r} \quad \blacksquare$$

(Remplacer $\hat{r}=\cos(\theta)\hat{x}+\sin(\theta)\hat{y}$)

$$\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(\cos(\theta)\hat{x}+\sin(\theta)\hat{y})}{\mathrm{d}t} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}=-\sin(\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{x}+\cos(\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{y}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(-\sin(\theta)\hat{x}+\cos(\theta)\hat{y})$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\theta} \quad \blacksquare$$

(Remplacer $\hat{\theta}=-\sin(\theta)\hat{x}+\cos(\theta)\hat{y}$)

$$\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(-\sin(\theta)\hat{x}+\cos(\theta)\hat{y})}{\mathrm{d}t} \quad\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t}=-\cos(\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{x}-\sin(\theta)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{y}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}(\cos(\theta)\hat{x}+\sin(\theta)\hat{y})$$

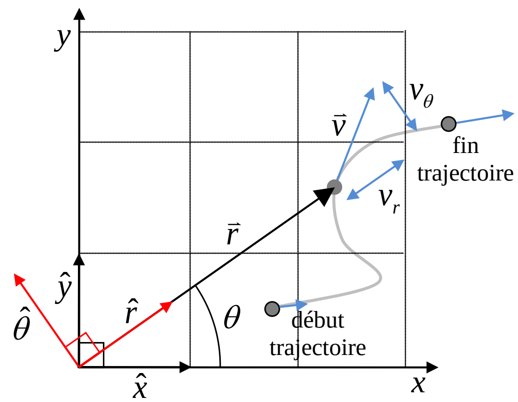
$$\Rightarrow\quad \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{r} \quad \blacksquare$$

(Remplacer $\hat{r}=\cos(\theta)\hat{x}+\sin(\theta)\hat{y}$)

La vitesse en coordonnée polaire

En coordonnée polaire, le vecteur vitesse $\vec{v}$ obtenu par une dérivée total du vecteur position $\vec{r}$ par rapport au temps *t* prend la forme suivante :

$$\vec{v} = v_r\,\hat{r} + v_\theta\hat{\theta} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$



où $\vec{v}$: Vecteur vitesse d'un objet (m/s)

v_r : Vitesse radiale selon l'axe r

ou

vitesse d'éloignement/rapprochement de l'origine (m/s)

v_θ : Vitesse tangentielle selon l'axe θ

ou

vitesse de déplacement sur un arc de cercle (m/s)

$\dot{\theta}$: Vitesse angulaire[2] (rad/s)

Nous pouvons exprimer la vitesse radiale v_r et la vitesse tangentielle v_θ avec deux notations :

Vitesse radiale	Vitesse tangentielle
$v_r = \dot{r} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$	$v_\theta = r\dot{\theta} = r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

<u>Preuve :</u>

À partir de la définition de la vitesse, évaluons la représentation d'un vecteur vitesse en coordonnée polaire à partir de l'expression de $\hat{r}$ en coordonnée cartésienne :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}(r\,\hat{r})}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Remplacer } \vec{r} = r\,\hat{r}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \hat{r}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}uv = v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\hat{r} + r\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\theta}\right) \qquad \text{(Remplacer } \frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\theta}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta} \quad \blacksquare \qquad \text{(Notation : } \dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \text{ et } \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\text{)}$$

[2] On utilise également la notation $\omega = \dot{\theta}$ pour désigner la vitesse angulaire.

L'accélération en coordonnée polaire

En coordonnée polaire, le vecteur accélération $\vec{a}$ obtenu par une dérivée total du vecteur vitesse $\vec{v}$ par rapport au temps t prend la forme suivante :

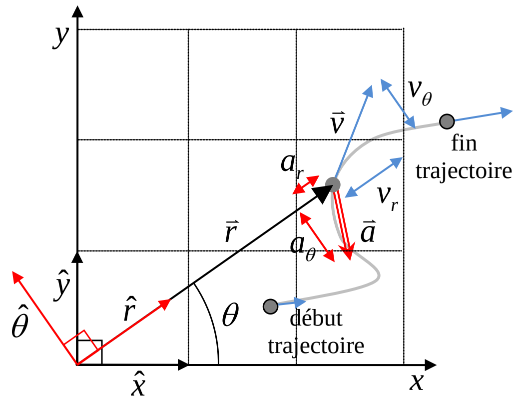
$$\vec{a} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta}$$
$$= \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta}$$

où $\vec{a}$: Vecteur accélération d'un objet (m/s^2)

a_r : Accélération radiale selon l'axe r (m/s^2)

a_θ : Accélération tangentielle selon l'axe θ (m/s^2)

$\ddot{\theta}$: Accélération angulaire[3] (rad/s^2)



Objet qui va se déplacer sur la trajectoire en perdant de la vitesse.

Nous pouvons exprimer l'accélération radiale a_r et l'accélération tangentielle v_θ avec deux notations :

Accélération radiale	Accélération tangentielle
$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \dfrac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - r\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)^2$	$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = r\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + 2\left(\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)\left(\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right)$

<u>Preuve :</u>

À partir de la définition de l'accélération, évaluons la représentation d'un vecteur accélération en coordonnée polaire :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Définition de l'accélération)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\left(\dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}\right)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Remplacer } \vec{v} = \dot{r}\,\hat{r} + r\dot{\theta}\,\hat{\theta}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \frac{\mathrm{d}\left(\dot{r}\,\hat{r}\right)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\left(r\dot{\theta}\,\hat{\theta}\right)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Distribuer la dérivée)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \hat{r}\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} \; + \; \hat{\theta}\frac{\mathrm{d}\left(r\dot{\theta}\right)}{\mathrm{d}t} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}uv = v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \hat{r}\frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t} + \dot{r}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\theta}\right) \; + \; \hat{\theta}\frac{\mathrm{d}\left(r\dot{\theta}\right)}{\mathrm{d}t} + r\dot{\theta}\left(-\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{r}\right) \qquad \text{(Remplacer } \frac{\mathrm{d}\hat{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{\theta} \text{ et } \frac{\mathrm{d}\hat{\theta}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\hat{r}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \hat{r}\,\ddot{r} + \dot{r}\left(\dot{\theta}\,\hat{\theta}\right) \; + \; \hat{\theta}\frac{\mathrm{d}\left(r\dot{\theta}\right)}{\mathrm{d}t} + r\dot{\theta}\left(-\dot{\theta}\,\hat{r}\right) \qquad \text{(Notation : } \ddot{r} = \frac{\mathrm{d}\dot{r}}{\mathrm{d}t} \text{ et } \dot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\text{)}$$

Effectuons une réécriture de notre expression et appliquons la règle de dérivée en chaîne afin de compléter le calcul

$$\vec{a} = \hat{r}\,\ddot{r} + \dot{r}\left(\dot{\theta}\,\hat{\theta}\right) \; + \; \hat{\theta}\frac{\mathrm{d}\left(r\dot{\theta}\right)}{\mathrm{d}t} + r\dot{\theta}\left(-\dot{\theta}\,\hat{r}\right) \qquad \text{(Équation précédente)}$$

[3] On utilise également la notation $\alpha = \ddot{\theta}$ pour désigner l'accélération angulaire.

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \ddot{r}\,\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\theta} + \frac{\mathrm{d}(r\dot{\theta})}{\mathrm{d}t}\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\,\hat{r} \qquad \text{(Réécriture)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \ddot{r}\,\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\,\hat{r} + \left(\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} + r\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\right)\hat{\theta} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}uv = v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \ddot{r}\,\hat{r} + \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\,\hat{r} + \left(\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\hat{\theta} \qquad \left(\text{Notation : } \dot{r} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \text{ et } \ddot{\theta} = \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \ddot{r}\,\hat{r} + 2\dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\theta} - r\dot{\theta}^2\,\hat{r} + r\ddot{\theta}\hat{\theta} \qquad \left(\text{Regrouper } \dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta} \quad \blacksquare \qquad \left(\text{Regrouper } \hat{r} \text{ et } \hat{\theta}\right)$$

Trajectoire circulaire à vitesse constante en coordonnée polaire autour de l'origine

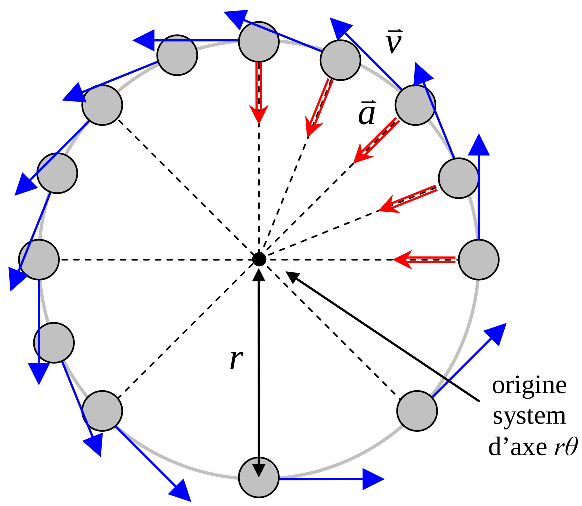
En coordonnée polaire, une trajectoire circulaire en deux dimensions autour de l'origine ($|\vec{r}| = \text{cst}$) dont le module de la vitesse est constant s'exprime grâce aux conditions

$$\dot{r} = 0\,,\ \ddot{r} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = cst\,,\ \ddot{\theta} = 0$$

ce qui nous donne

$$\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\,\hat{r} \quad \text{et} \quad \vec{v} = r\dot{\theta}\hat{\theta}\ .$$

Ainsi, la coordonnée polaire est adéquatement adaptée à résoudre mathématiquement cette trajectoire, car les modules de l'accélération et de la vitesse sont constants.



Objet en mouvement circulaire à vitesse constante autour d'une origine.

Trajectoire rectiligne à vitesse constante en coordonnée polaire

En coordonnée cartésienne, une trajectoire rectiligne en deux dimensions s'exprime grâce aux conditions

$$\dot{x} = cst\,,\ \ddot{x} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{y} = cst\,,\ \ddot{y} = 0$$

ce qui permet d'obtenir

$$\vec{a} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j}\ .$$

En coordonnée polaire, une trajectoire rectiligne en deux dimensions s'exprime grâce aux conditions

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 \qquad \text{et} \qquad r\ddot{\theta} = -2\dot{r}\dot{\theta}$$

car

$$\vec{a} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta}$$

et nous voulons

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 \quad \text{et} \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

ce qui permet d'obtenir

$$\dot{r} = \text{non constant} \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = \text{non constant}\ .$$

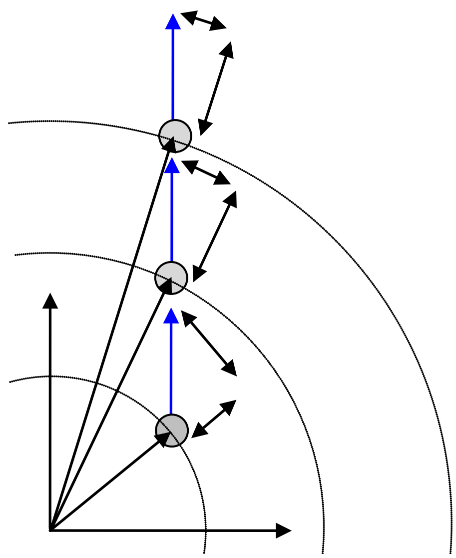
Ainsi, la coordonnée polaire n'est pas bien adaptée à résoudre mathématiquement cette trajectoire car

si

$$r \uparrow \text{ et } \theta \uparrow,$$

alors

$$\dot{r} \uparrow \text{ et } \dot{\theta} \downarrow\ .$$



Objet en mouvement à vitesse constante.

L'accélération centripète et l'accélération de Coriolis

Dans l'expression de l'accélération en coordonnée polaire, nous retrouvons deux expressions ayant un effet sur l'évolution dans le temps des coordonnées $r\theta$:

$$\vec{a} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\hat{r} + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\hat{\theta}$$

Accélération centripète	Accélération de Coriolis
$a_\mathrm{C} = r\dot{\theta}^2 = \dfrac{{v_\theta}^2}{r}$ où $v_\theta = r\dot{\theta}$	$a_\mathrm{Cor} = 2\dot{r}\dot{\theta}$

Pour évaluer l'évolution des coordonnées $r\theta$, **nous devons déterminer** $\ddot{r}$ et $\ddot{\theta}$ et non simplement a_r et a_θ, car $a_r \neq \ddot{r}$ et $a_\theta \neq \ddot{\theta}$ ce qui nous donne

$$\ddot{r} = a_r + r\dot{\theta}^2 \qquad \text{et} \qquad \ddot{\theta} = \frac{a_\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}}{r}$$

<u>Accélération centripète :</u> $a_\mathrm{C} = r\dot{\theta}^2$

Cette accélération est un effet de la vitesse tangentiel sur le déplacement radial d'un objet. Pour obtenir une trajectoire circulaire à rayon constant ($\dot{r} = \ddot{r} = 0$), l'accélération radiale a_r se doit d'être égale au module de l'accélération centripète a_C et être orientée vers le centre du cercle (l'interprétation du signe négatif) :

$$a_r = -a_\mathrm{C} = -r\dot{\theta}^2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{r} = 0$$
$$\Rightarrow \quad \text{trajectoire à rayon } r = \text{cst} \text{ si } \dot{r} = 0$$

<u>Accélération de Coriolis :</u> $a_\mathrm{Cor} = 2\dot{r}\dot{\theta}$

Cette accélération est un effet observable uniquement si le mouvement s'effectue sur un cercle dont le rayon r change dans le temps ($\dot{r} \neq 0$). Sur Terre, la rotation de celle-ci permet d'obtenir un terme $\dot{\theta} \neq 0$. Lorsqu'un objet est en orbite à rayon $r = \text{cst}$, il n'y a pas d'effet de Coriolis. Cependant, lorsqu'un objet chute sous l'effet de la gravité, le rapprochement de celui-ci vers le centre de la Terre implique $\dot{r} \neq 0$ et $\ddot{r} = -g + r\dot{\theta}^2$ ce qui donne une valeur à $\ddot{\theta} \neq 0$ même s'il n'y a pas d'accélération a_θ. Un objet tombe ainsi légèrement à côté de son point de chute prévu même si celui-ci tourne à vitesse angulaire $\dot{\theta}$ avec la Terre, car la valeur de $\ddot{\theta} \neq 0$ décale le nouveau point de chute par rapport à l'ancien point de chute.