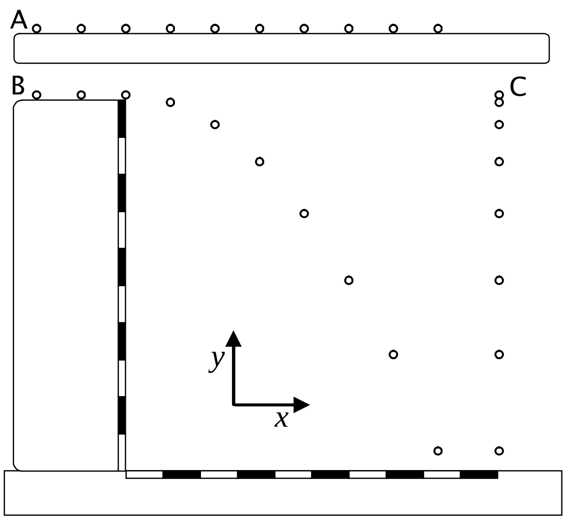
Chapitre 1.10 – La chute libre à 2 dimensions

La nature vectorielle de la vitesse en chute libre

Analysons la cinématique de trois billes lancées de la façon suivante :



1) Une bille **A** et une bille **B** sont lancées horizontalement avec la même vitesse initiale (mouvement horizontal).
2) Lorsque la bille **B** quitte la surface horizontale, on laisse tomber la bille **C** avec une vitesse initiale nulle (mouvement vertical).

Conclusion :

1) Les mouvements selon l'axe x de la bille **A** et **B** sont identiques, car ils possèdent les mêmes vitesses initiales.
2) Les mouvements selon l'axe y de la bille **B** et **C** sont identique, car ils possèdent les mêmes vitesses initiales et les mêmes accélérations.

- ❖ On réalise qu'un mouvement selon l'axe x n'influence pas le mouvement selon l'axe y et vis-versa dans la chute libre.
- ❖ Pour résoudre un problème de chute libre en deux dimension, il sera important de décomposer la vitesse en deux parties : selon l'axe x (v_x) et selon l'axe y (v_y)
- ❖ Une situation de chute avec résistance de l'air est beaucoup plus complexe à analyser, car la résistance dépend de la vitesse ce qui « couple » les équations du mouvement.

Chute libre à deux dimensions

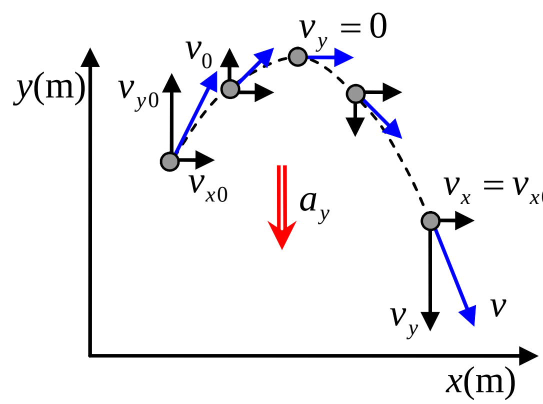
La **chute libre** à deux dimensions est un mouvement **uniquement sous l'influence** d'une **gravité constante** dont le mouvement vertical selon l'axe y est indépendant du mouvement horizontal selon l'axe x. L'accélération selon l'axe y est orientée vers le bas et l'accélération selon l'axe x est nulle :

$$a_x = 0 \quad \text{et} \quad a_y = -g$$

où a_x : Accélération horizontale selon l'axe x (m/s^2)

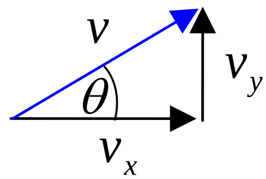
a_y : Accélération verticale dont l'axe y est positive vers le haut (m/s^2).

g : Accélération gravitationnelle (m/s^2).

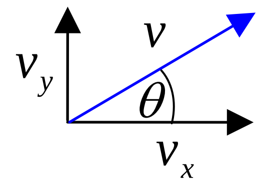


Décomposition de la vitesse

Considérons un objet ayant une vitesse de module v orientée vers le haut à un angle θ par rapport à l'horizontale :



ou



On peut décomposer la vitesse selon l'axe x et l'axe y de la façon suivante :

$$v_x = v\cos(\theta) \qquad \text{et} \qquad v_y = v\sin(\theta)$$

<u>Relation du module de la vitesse:</u> $\quad v^2 = v_x{}^2 + v_y{}^2$

Situation 1 : *Une balle au bord du gouffre*. Une balle glisse à 6 m/s sur une surface horizontale sans frottement située à 10 m au-dessus du sol. Lorsqu'elle atteint le rebord de la surface, elle se met à voyager en chute libre. On désire calculer **(a)** son temps de vol et **(b)** la distance horizontale parcourue pendant la chute.

Voici les données de base de la situation :

Selon l'axe y	Selon l'axe x	Selon l'axe x et y
$a_y = -9{,}8\ \text{m/s}^2$ $v_{y0} = 0 \qquad y_0 = 10\ \text{m}$ $v_y = ? \qquad y = 0$	$a_x = 0$ $v_{x0} = 6\ \text{m/s} \qquad x_0 = 0$ $v_x = ? \qquad x = ?$	$t = ?$

Évaluons le temps de vol avec l'équation de la position du MUA :

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \Rightarrow \quad (0) = (10) + (0)t + \frac{1}{2}(-9{,}8)t^2 \quad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad 4{,}9t^2 = 10 \quad \text{(Calcul)}$$

$$\Rightarrow \quad t = \pm 1{,}43\ \text{s} \quad \text{(Évaluer la racine)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t = 1{,}43\ \text{s}} \quad \textbf{(a)} \quad \text{(Choisir le temps positif)}$$

Évaluons la distance horizontale parcourue : (puisque $x_0 = 0$, alors x est égal à la distance parcourue)

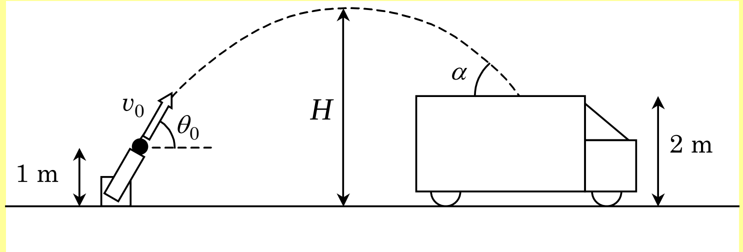
$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \Rightarrow \quad x = (0) + (6)t + \frac{1}{2}(0)t^2 \quad \text{(Remplacer } x_0 = 0 \text{ et } a_x = 0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x = 6t \quad \text{(Calcul)}$$

$$\Rightarrow \quad x = 6(1{,}43) \quad \text{(Remplacer } t = 1{,}43\ \text{s} \text{, temps de parcours)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = 8{,}53\ \text{m}} \quad \textbf{(b)} \quad \text{(Calcul)}$$

Situation X : *Les joies du lance-balles, prise 1.* Un lance-balles projette une balle à une vitesse de module $v_0 = 10\ \text{m/s}$ selon un angle de $\theta_0 = 60°$ vers le haut par rapport à l'horizontale. Au moment où la balle sort du lance-balles, elle est à 1 m au-dessus du sol.



En retombant, elle frappe le toit d'un camion à 2 m au-dessus du sol. On désire calculer **(a)** le temps de vol de la balle, **(b)** la hauteur maximale H de la balle par rapport au sol et **(c)** l'angle α que fait la trajectoire de la balle avec l'horizontale lorsqu'elle frappe le toit de camion.

Données de base : (Situation du lancée de la balle dans le camion)

Selon l'axe y	Selon l'axe x
$a_y = -9{,}8\ \text{m/s}^2$	$a_x = 0$
$v_{y0} = v_0 \sin(\theta) = (10)\sin(60°) = 8{,}66\ \text{m/s}$	$v_{x0} = v_0 \cos(\theta) = (10)\cos(60°) = 5\ \text{m/s}$
$v_y = ?$	$v_x = ?$
$y_0 = 1\ \text{m}$	$x_0 = 0$
$y = 2\ \text{m}$	$x = ?$
Selon l'axe x et y	
$t = ?$	

Évaluons le temps de vol de la balle avec l'équation de la position du MUA :

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \Rightarrow (2) = (1) + (8{,}66)t + \frac{1}{2}(-9{,}8)t^2 \quad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \boxed{-4{,}9t^2 + 8{,}66t - 1 = 0} \quad \text{(Calcul et réécriture)}$$

Évaluons la solution au polynôme du 2$^{\text{ième}}$ degré :

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow t = \frac{-(8{,}66) \pm \sqrt{(8{,}66)^2 - 4(-4{,}9)(-1)}}{2(-4{,}9)} \quad \text{(Remplacer } a, b \text{ et } c\text{)}$$

$$\Rightarrow t = \frac{8{,}66 \pm \sqrt{55{,}4}}{9{,}8} \quad \text{(Simplification)}$$

$$\Rightarrow t = \{0{,}12\ ,\ 1{,}64\} \quad \text{(Deux solutions)}$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 1{,}64\ \text{s}} \quad \textbf{(a)} \quad \text{(Choisir le 2}^{\text{ième}}\text{ temps)}$$

Évaluons la hauteur maximale atteinte par la balle avec le critère $v_y = 0$:

$v_y{}^2 = v_{y0}{}^2 + 2a_y(y - y_0)$ $\Rightarrow$ $(0)^2 = (8{,}66)^2 + 2(-9{,}8)(y - (1))$ (Remplacer valeurs num.)

$\Rightarrow$ $0 = 94{,}6 - 19{,}6(H)$ (Calcul et remplacer $y = H$)

$\Rightarrow$ $\boxed{H = 4{,}83 \text{ m}}$ **(b)** (Isoler *H*)

Évaluons la vitesse de la balle avant le contact avec le camion :

<u>Vitesse finale en *x* :</u> $a_x = 0$ $\Rightarrow$ $v_x = v_{x0} = 5 \text{ m/s}$ (Pas d'accélération)

$\Rightarrow$ $\boxed{v_x = 5 \text{ m/s}}$ (Vitesse en *x*)

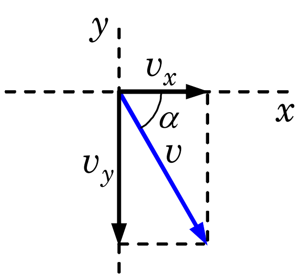
<u>Vitesse finale en *y* :</u> $v_y = v_{y0} + a_y t$ $\Rightarrow$ $v_y = (8{,}66) + (-9{,}8)t$ (Remplacer v_{y0} et a_y)

$\Rightarrow$ $v_y = 8{,}66 - 9{,}8(1{,}64)$ (Remplacer $t = 1{,}64 \text{ s}$)

$\Rightarrow$ $\boxed{v_y = -7{,}41 \text{ m/s}}$ (Vitesse en *y*)

À partir de la notion de tangente, évaluons l'angle d'arrivé de la balle :

$\tan(\alpha) = \dfrac{v_y}{v_x}$ $\Rightarrow$ $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{v_y}{v_x}\right)$ (Isoler α)



$\Rightarrow$ $\alpha = \tan^{-1}\left(\dfrac{(-7{,}41)}{(5)}\right)$ (Remplacer v_x et v_y)

$\Rightarrow$ $\boxed{\alpha = -56{,}0°}$ **(c)** (Calcul)

Exercices

<u>Référence :</u> Physique 1 – Mécanique, Harris Benson. P111 E17, section 4.2

Un ballon de basket-ball est lancé à $45°$ par rapport à l'horizontale. Le panier se trouve à une distance horizontale de 4 m et à une hauteur de 0,8 m au-dessus du point où on lance le ballon. Quel est le module de la vitesse initiale requise pour atteindre le panier?

Solutions

<u>Référence :</u> Physique 1 – Mécanique, Harris Benson. P111 E17, section 4.2

Données de base :

<u>En y :</u>

$a_y = -9{,}8 \text{ m/s}^2$

$v_{y0} = v_0 \sin(\theta) = v_0 \sin(45°)$

$y_0 = 0 \text{ m}$

$y = 0{,}8 \text{ m}$

<u>En x :</u>

$a_x = 0 \text{ m/s}^2$

$v_{x0} = v_0 \cos(\theta) = v_0 \cos(45°)$

$x_0 = 0 \text{ m}$

$x = 4 \text{ m}$

Équation en x :

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad \Rightarrow \quad (4) = (0) + (v_0 \cos(45°))t + \frac{1}{2}(0)t^2$$

$$\Rightarrow \quad 4 = v_0 \cos(45°)\ t$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t = \frac{4}{v_0 \cos(45°)}} \qquad \text{(temps de vol)}$$

Équation en y :

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad \Rightarrow \quad (0{,}8) = (0) + (v_0 \sin(45°))t + \frac{1}{2}(-9{,}8)t^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{0{,}8 = v_0 \sin(45°)t + -4{,}9t^2}$$

On peut remplacer le temps trouvé en x dans l'équation en y :

$$0{,}8 = v_0 \sin(45°)t + -4{,}9t^2 \quad \Rightarrow \quad 0{,}8 = v_0 \sin(45°)\left(\frac{4}{v_0 \cos(45°)}\right) - 4{,}9\left(\frac{4}{v_0 \cos(45°)}\right)^2$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}8 = 4\tan(45°) - \frac{4{,}9 * 16}{v_0^{\ 2} \cos^2(45°)}$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}8 = 4 - \frac{78{,}4}{v_0^{\ 2} \cos^2(45°)}$$

$$\Rightarrow \quad -3{,}2 = -\frac{78{,}4}{v_0^{\ 2} \cos^2(45°)}$$

$$\Rightarrow \quad v_0^{\ 2} = \frac{78{,}4}{3{,}2\cos^2(45°)} = 49$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = \pm 7{,}0 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_0 = 7{,}0 \text{ m/s}}$$