Chapitre 7.5 – La théorie des corps rigides : Les collisions

La loi de restitution de Newton

Soit un corps **A** se déplaçant à une vitesse $\vec{v}_{\mathrm{AO}\,i}$ et un corps **B** se déplaçant à une vitesse $\vec{v}_{\mathrm{BO}\,i}$ par rapport à un référentiel **O**, alors on peut affirmer que la vitesse de **A** par rapport à **B** correspond à l'expression

$$\vec{v}_{\mathrm{AB}\,i} = \vec{v}_{\mathrm{AO}\,i} + \vec{v}_{\mathrm{OB}\,i}$$

qui donnera

$$\vec{v}_{\mathrm{AB}\,i} = \vec{v}_{\mathrm{AO}\,i} - \vec{v}_{\mathrm{BO}\,i} \quad .$$

Cette vitesse de rapprochement des deux corps **A** et **B** sera modifiée lors d'une collision en vitesse d'éloignant. Après la collision, la loi de restitution de Newton propose que les deux corps A et B s'éloigneront avec une vitesse

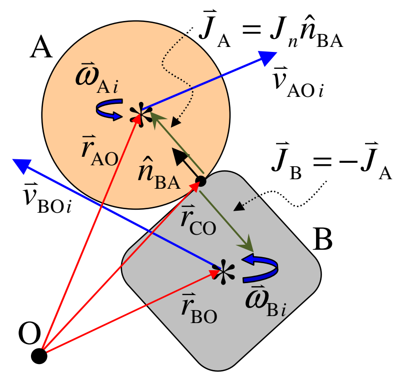
$$\vec{v}_{\mathrm{AB}\,f} \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} = -e\,\vec{v}_{\mathrm{AB}\,i} \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

où $\vec{v}_{\mathrm{AB}\,f} = \vec{v}_{\mathrm{AO}\,f} - \vec{v}_{\mathrm{BO}\,f}$, $\hat{n}_{\mathrm{BA}}$ est l'orientation de la force normale appliquée par **B** sur **A** pour modifier la vitesse de **A** par rapport à **B** et $e \in [0,1]$.

Si $e = 0$, la collision est parfaitement inélastique (les deux corps ne bougent plus l'un par rapport à l'autre). Si $e = 1$, la collision est élastique (il n'y a pas de perte d'énergie cinétique).

L'impulsion lors d'une collision en restitution (impulse-based reaction model[1])

En construction …



Pour le corps **A** : $\vec{v}_{\mathrm{AO}f} = \vec{v}_{\mathrm{AO}i} + \dfrac{J_n}{m_{\mathrm{A}}}\hat{n}_{\mathrm{BA}}$ et $\vec{\omega}_{\mathrm{A}f} = \vec{\omega}_{\mathrm{A}i} + J_n \, {I_{\mathrm{A\,CM}}^{(\mathrm{O})}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{AC}} \times \hat{n}_{\mathrm{BA}}\right)$

Pour le corps **B** : $\vec{v}_{\mathrm{BO}f} = \vec{v}_{\mathrm{BO}i} - \dfrac{J_n}{m_{\mathrm{B}}}\hat{n}_{\mathrm{BA}}$ et $\vec{\omega}_{\mathrm{B}f} = \vec{\omega}_{\mathrm{B}i} - J_n \, {I_{\mathrm{B\,CM}}^{(\mathrm{O})}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{BC}} \times \hat{n}_{\mathrm{BA}}\right)$

L'impulsion :

$$J_n = -(1+e)\frac{\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} + \vec{\omega}_{\mathrm{A}i} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} - \left(\vec{v}_{\mathrm{BO}i} + \vec{\omega}_{\mathrm{B}i} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}}{\dfrac{1}{m_{\mathrm{A}}} + \dfrac{1}{m_{\mathrm{B}}} + \left({I_{\mathrm{A\,CM}}^{(\mathrm{O})}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{AC}} \times \hat{n}_{\mathrm{BA}}\right) \times \vec{r}_{\mathrm{AC}}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} + \left({I_{\mathrm{B\,CM}}^{(\mathrm{O})}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{BC}} \times \hat{n}_{\mathrm{BA}}\right) \times \vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}}$$

Pour A :

m_{A} : Masse de l'objet **A** (kg).

$I_{\mathrm{A\,CM}}^{(\mathrm{O})}$: Tenseur de moment d'inertie de l'objet **A** évalué au centre de masse $\vec{r}_{\mathrm{AO}}$ selon le système de coordonnée de **O** ($\mathrm{kg \cdot m^2}$)

$\vec{r}_{\mathrm{AO}}$: Position du centre de masse de l'objet **A** par rapport à l'origine de **O** (m).

$\vec{r}_{\mathrm{AC}}$: Distance du centre de masse de l'objet **A** au point de collision **C** selon **O** (m) ($\vec{r}_{\mathrm{AC}} = \vec{r}_{\mathrm{CO}} - \vec{r}_{\mathrm{AO}}$)

$\vec{v}_{\mathrm{AO}i}$: Vitesse initiale du centre de masse de l'objet **A** par rapport à **O** (m/s).

$\vec{\omega}_{\mathrm{AO}i}$: Vitesse angulaire initiale du corps **A** par rapport à **O** (rad/s).

$\vec{v}_{\mathrm{AO}f}$: Vitesse finale du centre de masse du corps **A** par rapport à **O** (m/s).

$\vec{\omega}_{\mathrm{AO}f}$: Vitesse angulaire finale du corps **A** par rapport à **O** (rad/s).

---

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Collision_response

Pour B :

m_{B} : Masse de l'objet **B** (kg).

$I_{\mathrm{BCM}}^{(\mathrm{O})}$: Tenseur de moment d'inertie de l'objet **B** évalué au centre de masse $\vec{r}_{\mathrm{BO}}$ selon le système de coordonnée de **O** (kg·m²)

$\vec{r}_{\mathrm{BO}}$: Position du centre de masse de l'objet **B** par rapport à l'origine de **O** (m).

$\vec{r}_{\mathrm{BC}}$: Distance du centre de masse de l'objet **A** au point de collision **C** selon **O** (m) ($\vec{r}_{\mathrm{BC}} = \vec{r}_{\mathrm{CO}} - \vec{r}_{\mathrm{BO}}$)

$\vec{v}_{\mathrm{BO}i}$: Vitesse initiale du centre de masse de l'objet **B** par rapport à **O** (m/s).

$\vec{\omega}_{\mathrm{B}i}$: Vitesse angulaire initiale du corps **B** (rad/s).

$\vec{v}_{\mathrm{BO}f}$: Vitesse finale du centre de masse du corps **B** par rapport à **O** (m/s).

$\vec{\omega}_{\mathrm{B}f}$: Vitesse angulaire finale du corps **B** (rad/s).

Lieu de la collision :

$\vec{r}_{\mathrm{CO}}$: Position de la collision des corps **A** et **B** selon **O** (m).

$\hat{n}_{\mathrm{BA}}$: Normale à la surface de l'objet **B** pointant vers l'extérieur de **B**.

J_n : Composante de l'impulsion appliquée selon l'axe $\hat{n}_{\mathrm{BA}}$ (Ns).

Considérons que les deux corps **A** et **B** sont en contact à la coordonnée $\vec{r}_{\mathrm{CO}}$ par rapport à l'origine **O**. Alors le vecteur distance entre le centre de masse de nos deux corps et le point de contact $\vec{r}_{\mathrm{CO}}$ sera

$$\vec{r}_{\mathrm{AC}} = \vec{r}_{\mathrm{CO}} - \vec{r}_{\mathrm{AO}} \qquad \text{et} \qquad \vec{r}_{\mathrm{BC}} = \vec{r}_{\mathrm{CO}} - \vec{r}_{\mathrm{BO}}$$

$$\vec{p}_{\mathrm{AO}f} = \vec{p}_{\mathrm{AO}i} + \vec{J}_{\mathrm{A}} \quad \Rightarrow \quad m_{\mathrm{A}}\vec{v}_{\mathrm{AO}f} = m_{\mathrm{A}}\vec{v}_{\mathrm{AO}i} + \vec{J}_{\mathrm{A}}$$

(Eq **(1)** : Conservation de la quantité de mouvement pour le corps A)

$$\vec{L}_{\mathrm{A}f} = \vec{L}_{\mathrm{A}i} + \Delta\vec{L}_{\mathrm{A}} \quad \Rightarrow \quad I_{\mathrm{A}}\vec{\omega}_{\mathrm{A}f} = I_{\mathrm{A}}\vec{\omega}_{\mathrm{A}i} + \vec{r}_{\mathrm{AC}} \times \vec{J}_{\mathrm{A}}$$

(Eq **(2)** : Conservation du moment cinétique pour le corps A par rapport à son centre de masse)

$$\vec{p}_{\mathrm{BO}f} = \vec{p}_{\mathrm{BO}i} + \vec{J}_{\mathrm{B}} \quad \Rightarrow \quad m_{\mathrm{B}}\vec{v}_{\mathrm{BO}f} = m_{\mathrm{B}}\vec{v}_{\mathrm{BO}i} + \vec{J}_{\mathrm{B}}$$

(Eq **(3)** : Conservation de la quantité de mouvement pour le corps B)

$$\vec{L}_{\mathrm{B}f} = \vec{L}_{\mathrm{B}i} + \Delta\vec{L}_{\mathrm{B}} \quad \Rightarrow \quad I_{\mathrm{B}}\vec{\omega}_{\mathrm{B}f} = I_{\mathrm{B}}\vec{\omega}_{\mathrm{B}i} + \vec{r}_{\mathrm{BC}} \times \vec{J}_{\mathrm{B}}$$

(Eq **(4)** : Conservation du moment cinétique pour le corps B par rapport à son centre de masse)

Si l'on divise l'équation **(1)** par la masse m_{A} et que l'on divise l'équation **(3)** par la masse m_{B}, nous obtenons deux équations permettant d'évaluer la vitesse finale $\vec{v}_{\mathrm{AO}f}$ et $\vec{v}_{\mathrm{BO}f}$ de nos deux corps :

$$\vec{v}_{\mathrm{AO}f} = \vec{v}_{\mathrm{AO}i} + \frac{\vec{J}_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}}} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}_{\mathrm{BO}f} = \vec{v}_{\mathrm{BO}i} + \frac{\vec{J}_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{B}}}$$

Si l'on multiplie l'équation **(2)** par l'inverse du tenseur d'inertie I_{A}^{-1} tel que

$$I_{\mathrm{A}}^{-1} I_{\mathrm{A}} = \mathrm{I} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$$

et que l'on multiplie l'équation **(4)** par l'inverse du tenseur d'inertie I_{B}^{-1}, nous obtenons deux équations permettant d'évaluer la vitesse angulaire finale $\vec{\omega}_{\mathrm{A}f}$ et $\vec{\omega}_{\mathrm{B}f}$ de nos deux corps par rapport à leur centre de masse respectif :

$$\vec{\omega}_{\mathrm{A}f} = \vec{\omega}_{\mathrm{A}i} + I_{\mathrm{A}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{AC}} \times \vec{J}_{\mathrm{A}}\right) \qquad \text{et} \qquad \vec{\omega}_{\mathrm{B}f} = \vec{\omega}_{\mathrm{B}i} + I_{\mathrm{B}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{BC}} \times \vec{J}_{\mathrm{B}}\right)$$

En raison de la 3$^{\mathrm{e}}$ loi de Newton, nous savons que

$$\vec{J}_{\mathrm{A}} = -\vec{J}_{\mathrm{B}} \quad .$$

Puisque l'impulsion ne sera qu'appliquée que dans le sens de la normale $\hat{n}_{\mathrm{BA}}$ sur le corps **A** et $\hat{n}_{\mathrm{AB}}$ sur le corps **B**, nous pouvons conclure que

$$\vec{J}_{\mathrm{A}} = J_n \hat{n}_{\mathrm{BA}} \qquad \text{et} \qquad \vec{J}_{\mathrm{B}} = -J_n \hat{n}_{\mathrm{BA}} \quad .$$

Pour appliquer la <u>loi de restitution de Newton</u> pour les deux points des deux corps **A** et **B** entrant en collision, nous devons évaluer par rapport au référentiel **O** la vitesse de ces deux points localisés à la position $\vec{r}_{\mathrm{CO}}$.

L'expression de la vitesse du point $\vec{r}_{\mathrm{CO}}$ appartenant au corps **A** avant et après la collision sera

$$\vec{v}_{\mathrm{C(A)}i} = \vec{v}_{\mathrm{AO}i} + \vec{\omega}_{\mathrm{A}i} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}_{\mathrm{C(A)}f} = \vec{v}_{\mathrm{AO}f} + \vec{\omega}_{\mathrm{A}f} \times \vec{r}_{\mathrm{AC}} \quad .$$

De la même façon, l'expression de la vitesse du point $\vec{r}_{\mathrm{CO}}$ appartenant au corps **B** avant et après la collision sera

$$\vec{v}_{\mathrm{C(B)}i} = \vec{v}_{\mathrm{BO}i} + \vec{\omega}_{\mathrm{B}i} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}_{\mathrm{C(B)}f} = \vec{v}_{\mathrm{BO}f} + \vec{\omega}_{\mathrm{B}f} \times \vec{r}_{\mathrm{BC}} \quad .$$

Nous pouvons appliquer la loi de la restitution de Newton

$$\vec{v}_{\mathrm{AB}f} \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} = -e\,\vec{v}_{\mathrm{AB}i} \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

en utilisant les équations

$$\vec{v}_{\mathrm{AB}i} = \vec{v}_{\mathrm{C(A)}i} - \vec{v}_{\mathrm{C(B)}i} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}_{\mathrm{AB}f} = \vec{v}_{\mathrm{C(A)}f} - \vec{v}_{\mathrm{C(B)}f} \quad .$$

En remplaçant l'ensemble de nos équations dans la loi de la restitution de Newton, nous pourrons déterminer une expression permettant d'évaluer le module de l'impulsion J_n que les deux corps **A** et **B** s'appliquent mutuellement qui permettra de modifier nos vitesses linéaires et angulaires. En raison de la 3e loi de Newton, nous savons que

$$\vec{v}_{\mathrm{AB}f} \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} = -e\,\vec{v}_{\mathrm{AB}i} \cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\vec{v}_{\mathrm{C(A)}f} - \vec{v}_{\mathrm{C(B)}f}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} = -e\left(\vec{v}_{\mathrm{C(A)}i} - \vec{v}_{\mathrm{C(B)}i}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}f} + \vec{\omega}_{\mathrm{A}f}\times\vec{r}_{\mathrm{AC}}\right) - \left(\vec{v}_{\mathrm{BO}f} + \vec{\omega}_{\mathrm{B}f}\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} = -e\left(\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} + \vec{\omega}_{\mathrm{A}i}\times\vec{r}_{\mathrm{AC}}\right) - \left(\vec{v}_{\mathrm{BO}i} + \vec{\omega}_{\mathrm{B}i}\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\vec{v}_{\mathrm{AO}f} - \vec{v}_{\mathrm{BO}f} + \vec{\omega}_{\mathrm{A}f}\times\vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}f}\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} = -e\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} - \vec{v}_{\mathrm{BO}i} + \vec{\omega}_{\mathrm{A}i}\times\vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}i}\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} + \frac{\vec{J}_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}}}\right) - \left(\vec{v}_{\mathrm{BO}i} + \frac{\vec{J}_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{B}}}\right) + \vec{\omega}_{\mathrm{A}f}\times\vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}f}\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$
$$= -e\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} - \vec{v}_{\mathrm{BO}i} + \vec{\omega}_{\mathrm{A}i}\times\vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}i}\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} - \vec{v}_{\mathrm{BO}i}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} + \left(\frac{\vec{J}_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}}} - \frac{\vec{J}_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{B}}} + \vec{\omega}_{\mathrm{A}f}\times\vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}f}\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$
$$= -e\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} - \vec{v}_{\mathrm{BO}i}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} - e\left(\vec{\omega}_{\mathrm{A}i}\times\vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}i}\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\vec{J}_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}}} - \frac{\vec{J}_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{B}}} + \vec{\omega}_{\mathrm{A}f}\times\vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}f}\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$
$$= -(1+e)\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} - \vec{v}_{\mathrm{BO}i}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} - e\left(\vec{\omega}_{\mathrm{A}i}\times\vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}i}\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\vec{J}_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}}} - \frac{\vec{J}_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{B}}} + \left(\vec{\omega}_{\mathrm{A}i} + I_{\mathrm{A}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{AC}}\times\vec{J}_{\mathrm{A}}\right)\right)\times\vec{r}_{\mathrm{AC}} - \left(\vec{\omega}_{\mathrm{B}i} + I_{\mathrm{B}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{BC}}\times\vec{J}_{\mathrm{B}}\right)\right)\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$
$$= -(1+e)\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} - \vec{v}_{\mathrm{BO}i}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} - e\left(\vec{\omega}_{\mathrm{A}i}\times\vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}i}\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\vec{\omega}_{\mathrm{A}i}\times\vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}i}\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} + \left(\frac{\vec{J}_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}}} - \frac{\vec{J}_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{B}}} + I_{\mathrm{A}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{AC}}\times\vec{J}_{\mathrm{A}}\right)\times\vec{r}_{\mathrm{AC}} - I_{\mathrm{B}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{BC}}\times\vec{J}_{\mathrm{B}}\right)\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$
$$= -(1+e)\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} - \vec{v}_{\mathrm{BO}i}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} - e\left(\vec{\omega}_{\mathrm{A}i}\times\vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}i}\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\vec{J}_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}}} - \frac{\vec{J}_{\mathrm{B}}}{m_{\mathrm{B}}} + I_{\mathrm{A}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{AC}}\times\vec{J}_{\mathrm{A}}\right)\times\vec{r}_{\mathrm{AC}} - I_{\mathrm{B}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{BC}}\times\vec{J}_{\mathrm{B}}\right)\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$
$$= -(1+e)\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} - \vec{v}_{\mathrm{BO}i}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} - (1+e)\left(\vec{\omega}_{\mathrm{A}i}\times\vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}i}\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\vec{J}_{\mathrm{A}}}{m_{\mathrm{A}}} - \frac{\left(-\vec{J}_{\mathrm{A}}\right)}{m_{\mathrm{B}}} + I_{\mathrm{A}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{AC}}\times\vec{J}_{\mathrm{A}}\right)\times\vec{r}_{\mathrm{AC}} - I_{\mathrm{B}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{BC}}\times\left(-\vec{J}_{\mathrm{A}}\right)\right)\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$
$$= -(1+e)\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} - \vec{v}_{\mathrm{BO}i}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} - (1+e)\left(\vec{\omega}_{\mathrm{A}i}\times\vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}i}\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{\left(J_n\hat{n}_{\mathrm{BA}}\right)}{m_{\mathrm{A}}} + \frac{\left(J_n\hat{n}_{\mathrm{BA}}\right)}{m_{\mathrm{B}}} + I_{\mathrm{A}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{AC}}\times\left(J_n\hat{n}_{\mathrm{BA}}\right)\right)\times\vec{r}_{\mathrm{AC}} + I_{\mathrm{B}}^{-1}\left(\vec{r}_{\mathrm{BC}}\times\left(J_n\hat{n}_{\mathrm{BA}}\right)\right)\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$
$$= -(1+e)\left(\vec{v}_{\mathrm{AO}i} - \vec{v}_{\mathrm{BO}i}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}} - (1+e)\left(\vec{\omega}_{\mathrm{A}i}\times\vec{r}_{\mathrm{AC}} - \vec{\omega}_{\mathrm{B}i}\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot \hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad J_n\left(\frac{\hat{n}_{\mathrm{BA}}}{m_{\mathrm{A}}}+\frac{\hat{n}_{\mathrm{BA}}}{m_{\mathrm{B}}}+I_{\mathrm{A}}{}^{-1}(\vec{r}_{\mathrm{AC}}\times\hat{n}_{\mathrm{BA}})\times\vec{r}_{\mathrm{AC}}+I_{\mathrm{B}}{}^{-1}(\vec{r}_{\mathrm{BC}}\times\hat{n}_{\mathrm{BA}})\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot\hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$=-(1+e)(\vec{v}_{\mathrm{AO}i}-\vec{v}_{\mathrm{BO}i})\cdot\hat{n}_{\mathrm{BA}}-(1+e)(\vec{\omega}_{\mathrm{A}i}\times\vec{r}_{\mathrm{AC}}-\vec{\omega}_{\mathrm{B}i}\times\vec{r}_{\mathrm{BC}})\cdot\hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad J_n\left(\frac{1}{m_{\mathrm{A}}}+\frac{1}{m_{\mathrm{B}}}+\left(I_{\mathrm{A}}{}^{-1}(\vec{r}_{\mathrm{AC}}\times\hat{n}_{\mathrm{BA}})\times\vec{r}_{\mathrm{AC}}\right)\cdot\hat{n}_{\mathrm{BA}}+\left(I_{\mathrm{B}}{}^{-1}(\vec{r}_{\mathrm{BC}}\times\hat{n}_{\mathrm{BA}})\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot\hat{n}_{\mathrm{BA}}\right)$$

$$=-(1+e)(\vec{v}_{\mathrm{AO}i}-\vec{v}_{\mathrm{BO}i})\cdot\hat{n}_{\mathrm{BA}}-(1+e)(\vec{\omega}_{\mathrm{A}i}\times\vec{r}_{\mathrm{AC}}-\vec{\omega}_{\mathrm{B}i}\times\vec{r}_{\mathrm{BC}})\cdot\hat{n}_{\mathrm{BA}}$$

$$\Rightarrow \quad J_n=\frac{-(1+e)(\vec{v}_{\mathrm{AO}i}-\vec{v}_{\mathrm{BO}i})\cdot\hat{n}_{\mathrm{BA}}-(1+e)(\vec{\omega}_{\mathrm{A}i}\times\vec{r}_{\mathrm{AC}}-\vec{\omega}_{\mathrm{B}i}\times\vec{r}_{\mathrm{BC}})\cdot\hat{n}_{\mathrm{BA}}}{\frac{1}{m_{\mathrm{A}}}+\frac{1}{m_{\mathrm{B}}}+\left(I_{\mathrm{A}}{}^{-1}(\vec{r}_{\mathrm{AC}}\times\hat{n}_{\mathrm{BA}})\times\vec{r}_{\mathrm{AC}}\right)\cdot\hat{n}_{\mathrm{BA}}+\left(I_{\mathrm{B}}{}^{-1}(\vec{r}_{\mathrm{BC}}\times\hat{n}_{\mathrm{BA}})\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot\hat{n}_{\mathrm{BA}}}$$

$$\Rightarrow \quad J_n=-(1+e)\frac{(\vec{v}_{\mathrm{AO}i}+\vec{\omega}_{\mathrm{A}i}\times\vec{r}_{\mathrm{AC}})\cdot\hat{n}_{\mathrm{BA}}-(\vec{v}_{\mathrm{BO}i}+\vec{\omega}_{\mathrm{B}i}\times\vec{r}_{\mathrm{BC}})\cdot\hat{n}_{\mathrm{BA}}}{\frac{1}{m_{\mathrm{A}}}+\frac{1}{m_{\mathrm{B}}}+\left(I_{\mathrm{A}}{}^{-1}(\vec{r}_{\mathrm{AC}}\times\hat{n}_{\mathrm{BA}})\times\vec{r}_{\mathrm{AC}}\right)\cdot\hat{n}_{\mathrm{BA}}+\left(I_{\mathrm{B}}{}^{-1}(\vec{r}_{\mathrm{BC}}\times\hat{n}_{\mathrm{BA}})\times\vec{r}_{\mathrm{BC}}\right)\cdot\hat{n}_{\mathrm{BA}}} \quad \blacksquare$$