Chapitre 7.4 – La théorie du corps rigide : La dynamique

La notation de la dynamique du corps rigide

Voici quelques notation que nous allons employer pour appliquer la 2e loi de Newton sur notre corps rigide :

Notation	Explication
$\vec{F}_p = \vec{F}_{p(\text{ext})} + \vec{F}_{p(\text{int})}$	Somme de toutes les forces sur la particule p .
$\vec{F}_{p(\text{ext})} = \sum_{e=1}^{M} \vec{F}_{ep}$	Somme des forces extérieures sur la particule p .
$\vec{F}_{qp}$	Une force interne qu'une particule q applique sur une particule p .
$\vec{F}_{p(\text{int})} = \sum_{q=1,\, q\neq p}^{N} \vec{F}_{qp}$	Somme des forces que les autres particules du système applique sur la particule p .
$\vec{F}_{(\text{ext})} = \sum_{p=1}^{N} \vec{F}_{p(\text{ext})}$	Somme de toutes les forces extérieures sur les N particules du système.
$\vec{F}_{(\text{int})} = \sum_{p=1}^{N} \vec{F}_{(\text{int})} = 0$	Somme de toutes les forces internes sur les N particules du système. Par la 3e loi de Newton, ce résultat est égal à zéro.

La 2^e loi de Newton appliquée sur un corps rigide

L'application de la 2^e loi de Newton sur l'intégralité du système consiste à additionner l'ensemble des forces et d'en extraire une conséquence. Bien que la position $\vec{r}_S$ et la vitesse $\vec{v}_S$ du corps rigide soit réalisée pour d'un point de référence S, la 2^e loi de Newton met en relation la <u>somme des forces</u> sur l'ensemble du système avec la <u>masse totale du système</u> multiplié avec <u>l'accélération du centre de masse</u> $\vec{a}_{CM}$ du corps rigide le tout inversement :

2^e loi de Newton	Expression de l'accélération $\vec{a}_{CM}$	Expression de la somme des forces
$\vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_{CM}$	$\vec{a}_{CM} = \dfrac{\vec{F}_{ext}}{m}$	$\vec{F}_{ext} = \sum_{p=1}^{N} \vec{F}_{p(ext)}$

<u>Preuve :</u>

Appliquons la 2^e loi de Newton selon $Oxyz$ (car inertiel) sur une particule p du système :

$$\vec{F}_p = \frac{d\vec{p}_p}{dt} \quad \Rightarrow \quad \sum_{e=1}^{M} \vec{F}_{ep} + \sum_{q=1,\, q\neq p}^{N} \vec{F}_{qp} = \frac{d\vec{p}_p}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{F}_{p(ext)} + \vec{F}_{p(int)} = \frac{d\vec{p}_p}{dt}}$$

Effectuons maintenant une sommation de l'ensemble des N équations disponibles afin d'y simplifier la présence des forces internes :

$$\sum_{p=1}^{N} \vec{F}_p = \sum_{p=1}^{N} \frac{d\vec{p}_p}{dt} \quad \Rightarrow \quad \sum_{p=1}^{N} \left(\vec{F}_{p(ext)} + \vec{F}_{p(int)}\right) = \sum_{p=1}^{N} \frac{d\vec{p}_p}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{p=1}^{N} \vec{F}_{p(ext)} + \sum_{p=1}^{N} \vec{F}_{p(int)} = \sum_{p=1}^{N} \frac{d\vec{p}_p}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{p=1}^{N} \vec{F}_{p(ext)} = \sum_{p=1}^{N} \frac{d\vec{p}_p}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{ext} = \sum_{p=1}^{N} \frac{d\vec{p}_p}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{ext} = \sum_{p=1}^{N} \frac{d(m_p \vec{v}_p)}{dt}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{ext} = \frac{d}{dt} \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{v}_p$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{ext} = \frac{d}{dt} m \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{v}_p$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{ext} = m \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} \qquad \left(\vec{v}_{CM} = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{v}_p\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{F}_{ext} = m\,\vec{a}_{CM} \quad \blacksquare$$

La 2e loi de Newton en rotation appliquée par rapport à l'origine d'un système d'axe Oxyz

L'application de la 2e loi de Newton en rotation sur l'intégralité du système consiste à additionner l'ensemble des moments de forces et d'en extraire une conséquence. Le résultat qui sera déduit sera raffiné dans les équations qui suivront. Cependant, nous pouvons affirmer sans hésitation le résultat suivant :

$$\vec{\tau}_{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \qquad \text{où} \qquad \vec{\tau}_{\text{ext}} = \sum_{p=1}^{N} \vec{\tau}_{p(\text{ext})} \quad \text{et} \quad \vec{\tau}_{p(\text{ext})} = \vec{r}_p \times \vec{F}_{p(\text{ext})}$$

<u>Preuve :</u>

Appliquons la 2e loi de Newton en rotation par rapport à l'origine de Oxyz (car inertiel) sur une particule p du système :

$$\vec{\tau}_p = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_p}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \sum_{e=1}^{M} \vec{r}_p \times \vec{F}_{ep} + \sum_{q=1,\, q\neq p}^{N} \vec{r}_p \times \vec{F}_{qp} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_p}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_p \times \sum_{e=1}^{M} \vec{F}_{ep} + \vec{r}_p \times \sum_{q=1,\, q\neq p}^{N} \vec{F}_{qp} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_p}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_p \times \vec{F}_{p(\text{ext})} + \vec{r}_p \times \vec{F}_{p(\text{int})} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_p}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{\tau}_{p(\text{ext})} + \vec{\tau}_{p(\text{int})} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_p}{\mathrm{d}t}}$$

Effectuons maintenant une sommation de l'ensemble des N équations disponibles afin d'y simplifier la présence des forces internes :

$$\sum_{p=1}^{N} \vec{\tau}_p = \sum_{p=1}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{d}\vec{L}_p}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \sum_{p=1}^{N} \left(\vec{\tau}_{p(\text{ext})} + \vec{\tau}_{p(\text{int})} \right) = \sum_{p=1}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{d}\vec{L}_p}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\tau}_{(\text{ext})} = \sum_{p=1}^{\mathrm{N}} \frac{\mathrm{d}\vec{L}_p}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\tau}_{(\text{ext})} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{p=1}^{\mathrm{N}} \vec{L}_p$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\tau}_{(\text{ext})} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} \qquad \blacksquare$$

La décomposition du moment de force à partir du centre de masse

Le moment de force total externe appliquée sur notre corps rigide se doit d'être évalué par rapport à l'origine de $Oxyz$ si l'on veut le faire correspondre à la variation du moment cinétique dans le temps $\mathrm{d}\vec{L}/\mathrm{d}t$ mesuré lui aussi par rapport à l'origine de $Oxyz$.

Cependant, une réorganisation de l'information nous simplifiera notre analyse. Si l'on décompose nos vecteurs $\vec{r}_p$ tel que

$$\vec{r}_p = \vec{r}_{\mathrm{CM}} + \vec{r}_{p\ \mathrm{CM}} \quad ,$$

selon $Oxyz$, ceci nous permettra de décomposer nos calculs de moments de forces de la façon suivante :

$$\vec{\tau}_{\mathrm{ext}} = \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \vec{F}_{\mathrm{ext}} + \vec{\tau}_{\mathrm{CM}} \qquad \text{où} \qquad \vec{\tau}_{\mathrm{CM}} = \sum_{p=1}^{N} \vec{r}_{p\,\mathrm{CM}} \times \vec{F}_{p(\mathrm{ext})}$$

<u>Preuve :</u>

$$\vec{\tau}_{\mathrm{ext}} = \sum_{p=1}^{N} \vec{\tau}_{p(\mathrm{ext})} \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau}_{\mathrm{ext}} = \sum_{p=1}^{N} \vec{r}_p \times \vec{F}_{p(\mathrm{ext})}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\tau}_{\mathrm{ext}} = \sum_{p=1}^{N} \left(\vec{r}_{\mathrm{CM}} + \vec{r}_{p\ \mathrm{CM}}\right) \times \vec{F}_{p(\mathrm{ext})}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\tau}_{\mathrm{ext}} = \sum_{p=1}^{N} \left(\vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \vec{F}_{p(\mathrm{ext})} + \vec{r}_{p\,\mathrm{CM}} \times \vec{F}_{p(\mathrm{ext})}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\tau}_{\mathrm{ext}} = \sum_{p=1}^{N} \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \vec{F}_{p(\mathrm{ext})} + \sum_{p=1}^{N} \vec{r}_{p\,\mathrm{CM}} \times \vec{F}_{p(\mathrm{ext})}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\tau}_{\mathrm{ext}} = \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \sum_{p=1}^{N} \vec{F}_{p(\mathrm{ext})} + \sum_{p=1}^{N} \vec{r}_{p\,\mathrm{CM}} \times \vec{F}_{p(\mathrm{ext})}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\tau}_{\mathrm{ext}} = \vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \vec{F}_{\mathrm{ext}} + \vec{\tau}_{\mathrm{CM}} \quad \blacksquare$$

La 2e loi de Newton en rotation sur un corps rigide

L'application de la 2e loi de Newton en rotation sur un corps rigide permet d'obtenir une relation entre la somme des moments de force $\vec{\tau}_{\mathrm{CM}}$ mesuré par rapport au centre de masse $\vec{r}_{\mathrm{CM}}$ du corps rigide et l'accélération angulaire $\vec{\alpha}$ du corps rigide. Puisque l'accélération angulaire $\vec{\alpha}$ ne dépend pas de la position $\vec{r}_{\mathrm{S}}$ du corps rigide (point autour duquel il tourne selon $\mathrm{O}xyz$), résoudre cette équation permet d'obtenir directement l'état de changement de la rotation du corps.

Outils de calcul
$\vec{\tau}_{\mathrm{CM}} = \sum_{p=1}^{N} \vec{r}_{p\,\mathrm{CM}} \times \vec{F}_{p(\mathrm{ext})} \quad \text{avec} \quad \vec{r}_{p\,\mathrm{CM}} = \vec{r}_p - \vec{r}_{\mathrm{CM}}$ $I_{\mathrm{S}} = R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\, I^{(\mathrm{S})} R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}{}^{T}$ $\dfrac{\mathrm{d}I_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}t} = \left(\vec{\omega}\times R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\right) I^{(\mathrm{S})} R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}{}^{T} + R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\, I^{(\mathrm{S})} \left(\vec{\omega}\times R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\right)^{T}$ $U_{\mathrm{CM\,S-S}} = m\left(\vec{r}_{\mathrm{CM\,S}}\cdot\vec{r}_{\mathrm{S}}\, I_3 - \vec{r}_{\mathrm{CM\,S}}\vec{r}_{\mathrm{S}}{}^{T}\right)$ $\dfrac{\mathrm{d}U_{\mathrm{CM\,S-S}}}{\mathrm{d}t} = m\left(\left(\vec{v}_{\mathrm{S}}\cdot\vec{r}_{\mathrm{CM\,S}} + \vec{r}_{\mathrm{S}}\cdot\vec{v}_{\mathrm{CM\,S}}\right) I_3 - \vec{v}_{\mathrm{CM\,S}}\vec{r}_{\mathrm{S}}{}^{T} - \vec{r}_{\mathrm{CM\,S}}\vec{v}_{\mathrm{S}}{}^{T}\right)$ $U_{\mathrm{CM\,S-CM}} = m\left(\vec{r}_{\mathrm{CM\,S}}\cdot\vec{r}_{\mathrm{CM}}\, I_3 - \vec{r}_{\mathrm{CM\,S}}\vec{r}_{\mathrm{CM}}{}^{T}\right)$
Équation générale   ($\vec{r}_{\mathrm{S}} \neq \vec{r}_{\mathrm{CM}}$)
$\vec{\tau}_{\mathrm{CM}} = m\vec{v}_{\mathrm{CM}}\times\vec{v}_{\mathrm{S}} - m\vec{r}_{\mathrm{CM}}\times\left(\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{\mathrm{CM\,S}}\right)\right) + \left(\dfrac{\mathrm{d}I_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}U_{\mathrm{CM\,S-S}}}{\mathrm{d}t}\right)\vec{\omega} + \left(I_{\mathrm{S}} + U_{\mathrm{CM\,S-S}} - U_{\mathrm{CM\,S-CM}}\right)\vec{\alpha}$ Ce qui nous donnera $\vec{\alpha} = \left(I_{\mathrm{S}} + U_{\mathrm{CM\,S-S}} - U_{\mathrm{CM\,S-CM}}\right)^{-1}\left(\vec{\tau}_{\mathrm{CM}} - m\vec{v}_{\mathrm{CM}}\times\vec{v}_{\mathrm{S}} + m\vec{r}_{\mathrm{CM}}\times\left(\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{\mathrm{CM\,S}}\right)\right) - \left(\dfrac{\mathrm{d}I_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}U_{\mathrm{CM\,S-S}}}{\mathrm{d}t}\right)\vec{\omega}\right)$
Équation particulière de la rotation autour du centre de masse   ($\vec{r}_{\mathrm{S}} = \vec{r}_{\mathrm{CM}}$ et $\vec{v}_{\mathrm{S}} = \vec{v}_{\mathrm{CM}}$, donc $I_{\mathrm{S}} \equiv I_{\mathrm{CM}}$)
$\vec{\tau}_{\mathrm{CM}} = \dfrac{\mathrm{d}I_{\mathrm{CM}}}{\mathrm{d}t}\vec{\omega} + I_{\mathrm{CM}}\,\vec{\alpha}$ Ce qui nous donnera $\vec{\alpha} = I_{\mathrm{CM}}{}^{-1}\left(\vec{\tau}_{\mathrm{CM}} - \dfrac{\mathrm{d}I_{\mathrm{CM}}}{\mathrm{d}t}\vec{\omega}\right)$

Preuve :

$$\vec{\tau}_{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\tau}_{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\,\vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{S}} + \left(I_{\text{S}} + U_{\text{CMS-S}}\right)\vec{\omega}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\tau}_{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\,\vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{S}}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\left(I_{\text{S}} + U_{\text{CMS-S}}\right)\vec{\omega}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\tau}_{\text{ext}} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{S}}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(I_{\text{S}}\vec{\omega}\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(U_{\text{CMS-S}}\vec{\omega}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\tau}_{\text{ext}} = m\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\text{CM}}}{\mathrm{d}t} \times \vec{v}_{\text{S}} + m\vec{r}_{\text{CM}} \times \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\text{S}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}I_{\text{S}}}{\mathrm{d}t}\vec{\omega} + I_{\text{S}}\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}U_{\text{CMS-S}}}{\mathrm{d}t}\vec{\omega} + U_{\text{CMS-S}}\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\tau}_{\text{ext}} = m\vec{v}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{S}} + m\vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{a}_{\text{S}} + \frac{\mathrm{d}I_{\text{S}}}{\mathrm{d}t}\vec{\omega} + I_{\text{S}}\vec{\alpha} + \frac{\mathrm{d}U_{\text{CMS-S}}}{\mathrm{d}t}\vec{\omega} + U_{\text{CMS-S}}\vec{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\tau}_{\text{ext}} = m\vec{v}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{S}} + m\vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{a}_{\text{S}} + \left(\frac{\mathrm{d}I_{\text{S}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}U_{\text{CMS-S}}}{\mathrm{d}t}\right)\vec{\omega} + \left(I_{\text{S}} + U_{\text{CMS-S}}\right)\vec{\alpha}$$

Nous allons maintenant remplacer l'accélération $\vec{a}_{\text{S}}$ du point S par l'expression

$$\vec{a}_{\text{S}} = \vec{a}_{\text{CM}} + \vec{r}_{\text{CMS}} \times \vec{\alpha} - \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{CMS}}\right)$$

et obtenir l'expression suivante :

$$\vec{\tau}_{\text{ext}} = m\vec{v}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{S}} + m\vec{r}_{\text{CM}} \times \left(\vec{a}_{\text{CM}} + \vec{r}_{\text{CMS}} \times \vec{\alpha} - \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{CMS}}\right)\right) + \left(\frac{\mathrm{d}I_{\text{S}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}U_{\text{CMS-S}}}{\mathrm{d}t}\right)\vec{\omega} + \left(I_{\text{S}} + U_{\text{CMS-S}}\right)\vec{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} \vec{\tau}_{\text{ext}} = {} & m\vec{v}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{S}} + m\vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{a}_{\text{CM}} + m\vec{r}_{\text{CM}} \times \left(\vec{r}_{\text{CMS}} \times \vec{\alpha}\right) - m\vec{r}_{\text{CM}} \times \left(\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{CMS}}\right)\right) \\ & + \left(\frac{\mathrm{d}I_{\text{S}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}U_{\text{CMS-S}}}{\mathrm{d}t}\right)\vec{\omega} + \left(I_{\text{S}} + U_{\text{CMS-S}}\right)\vec{\alpha} \end{aligned}$$

Pour isoler $\vec{\alpha}$ dans cette équation, nous devrons restructurer le terme

$$\vec{T} = m\vec{r}_{\text{CM}} \times \left(\vec{r}_{\text{CMS}} \times \vec{\alpha}\right) \quad .$$

Par analogie avec l'expression précédente

$$\vec{L}_3 = m\,\vec{r}_{\text{S}} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{CMS}}\right) = m\left(\vec{r}_{\text{CMS}} \cdot \vec{r}_{\text{S}}\, I_3 - \vec{r}_{\text{CMS}}\vec{r}_{\text{S}}^{\,T}\right) = U_{\text{CMS-S}}\,\vec{\omega}$$

alors nous avons :

$$\vec{T} = m\vec{r}_{\text{CM}} \times \left(\vec{r}_{\text{CMS}} \times \vec{\alpha}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{T} = -m\vec{r}_{\text{CM}} \times \left(\vec{\alpha} \times \vec{r}_{\text{CMS}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{T} = -m\left(\vec{r}_{\text{CMS}} \cdot \vec{r}_{\text{CM}}\, I_3 - \vec{r}_{\text{CMS}}\vec{r}_{\text{CM}}^{\,T}\right)\vec{\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{T} = -U_{\text{CMS-CM}}\,\vec{\alpha} \qquad \text{et} \qquad U_{\text{CMS-CM}} = m\left(\vec{r}_{\text{CMS}} \cdot \vec{r}_{\text{CM}}\, I_3 - \vec{r}_{\text{CMS}}\vec{r}_{\text{CM}}^{\,T}\right)$$

Si l'on remplace $\vec{T}$, nous aurons le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
\vec{\tau}_{\text{ext}} &= m\vec{v}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{S}} + m\vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{a}_{\text{CM}} + \left(-U_{\text{CM S-CM}}\,\vec{\alpha}\right) - m\vec{r}_{\text{CM}} \times \left(\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{CM S}}\right)\right) \\
&\quad + \left(\frac{\mathrm{d}I_{\text{S}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}U_{\text{CM S-S}}}{\mathrm{d}t}\right)\vec{\omega} + \left(I_{\text{S}} + U_{\text{CM S-S}}\right)\vec{\alpha}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned}
\vec{\tau}_{\text{ext}} &= m\vec{v}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{S}} + m\vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{a}_{\text{CM}} - m\vec{r}_{\text{CM}} \times \left(\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{CM S}}\right)\right) \\
&\quad + \left(\frac{\mathrm{d}I_{\text{S}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}U_{\text{CM S-S}}}{\mathrm{d}t}\right)\vec{\omega} + \left(I_{\text{S}} + U_{\text{CM S-S}} - U_{\text{CM S-CM}}\right)\vec{\alpha}
\end{aligned}$$

Par la suite, nous pouvons décomposer notre moment de force sous la forme

$$\vec{\tau}_{\text{ext}} = \vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{\tau}_{\text{CM}}$$

et faire des associations de termes afin de retirer la référence à l'accélération du centre de mass :

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{\tau}_{\text{CM}} &= m\vec{v}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{S}} + m\vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{a}_{\text{CM}} - m\vec{r}_{\text{CM}} \times \left(\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{CM S}}\right)\right) \\
&\quad + \left(\frac{\mathrm{d}I_{\text{S}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}U_{\text{CM S-S}}}{\mathrm{d}t}\right)\vec{\omega} + \left(I_{\text{S}} + U_{\text{CM S-S}} - U_{\text{CM S-CM}}\right)\vec{\alpha}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned}
\vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{\tau}_{\text{CM}} &= m\vec{v}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{S}} + \vec{r}_{\text{CM}} \times \left(m\vec{a}_{\text{CM}}\right) - m\vec{r}_{\text{CM}} \times \left(\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{CM S}}\right)\right) \\
&\quad + \left(\frac{\mathrm{d}I_{\text{S}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}U_{\text{CM S-S}}}{\mathrm{d}t}\right)\vec{\omega} + \left(I_{\text{S}} + U_{\text{CM S-S}} - U_{\text{CM S-CM}}\right)\vec{\alpha}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned}
\vec{r}_{\text{CM}} \times \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{\tau}_{\text{CM}} &= m\vec{v}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{S}} + \vec{r}_{\text{CM}} \times \left(\vec{F}_{\text{ext}}\right) - m\vec{r}_{\text{CM}} \times \left(\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{CM S}}\right)\right) \\
&\quad + \left(\frac{\mathrm{d}I_{\text{S}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}U_{\text{CM S-S}}}{\mathrm{d}t}\right)\vec{\omega} + \left(I_{\text{S}} + U_{\text{CM S-S}} - U_{\text{CM S-CM}}\right)\vec{\alpha}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\tau}_{\text{CM}} = m\vec{v}_{\text{CM}} \times \vec{v}_{\text{S}} - m\vec{r}_{\text{CM}} \times \left(\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{CM S}}\right)\right) + \left(\frac{\mathrm{d}I_{\text{S}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}U_{\text{CM S-S}}}{\mathrm{d}t}\right)\vec{\omega} + \left(I_{\text{S}} + U_{\text{CM S-S}} - U_{\text{CM S-CM}}\right)\vec{\alpha}$$

Pour calculer le tout, il suffit d'utiliser les expressions suivantes :

- $\dfrac{\mathrm{d}I_{\text{S}}}{\mathrm{d}t} = \left(\vec{\omega} \times R_{\text{S}\to\text{O}}\right) I^{(\text{S})} R_{\text{S}\to\text{O}}{}^{T} + R_{\text{S}\to\text{O}}\, I^{(\text{S})} \left(\vec{\omega} \times R_{\text{S}\to\text{O}}\right)^{T}$
- $\dfrac{\mathrm{d}U_{\text{CM S-S}}}{\mathrm{d}t} = m\left(\left(\vec{v}_{\text{S}} \cdot \vec{r}_{\text{CM S}} + \vec{r}_{\text{S}} \cdot \vec{v}_{\text{CM S}}\right) I_3 - \vec{v}_{\text{CM S}} \vec{r}_{\text{S}}{}^{T} - \vec{r}_{\text{CM S}} \vec{v}_{\text{S}}{}^{T}\right)$
- $U_{\text{CM S-S}} = m\left(\vec{r}_{\text{CM S}} \cdot \vec{r}_{\text{S}}\, I_3 - \vec{r}_{\text{CM S}} \vec{r}_{\text{S}}{}^{T}\right)$
- $U_{\text{CM S-CM}} = m\left(\vec{r}_{\text{CM S}} \cdot \vec{r}_{\text{CM}}\, I_3 - \vec{r}_{\text{CM S}} \vec{r}_{\text{CM}}{}^{T}\right)$

Nous pouvons établir notre relation entre le moment de force total appliquée par rapport au centre de masse selon $\mathrm{O}xyz$ et notre accélération angulaire α en isolant l'accélération angulaire :

$$\vec{\tau}_{\mathrm{CM}} = m\vec{v}_{\mathrm{CM}} \times \vec{v}_{\mathrm{S}} - m\vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \left(\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM\,S}}\right)\right) + \left(\frac{\mathrm{d}\, I_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\, U_{\mathrm{CM\,S-S}}}{\mathrm{d}t}\right)\vec{\omega} + \left(I_{\mathrm{S}} + U_{\mathrm{CM\,S-S}} - U_{\mathrm{CM\,S-CM}}\right)\vec{\alpha}$$

$$\Rightarrow \qquad \left(I_{\mathrm{S}} + U_{\mathrm{CM\,S-S}} - U_{\mathrm{CM\,S-CM}}\right)\vec{\alpha} = \vec{\tau}_{\mathrm{CM}} - m\vec{v}_{\mathrm{CM}} \times \vec{v}_{\mathrm{S}} + m\vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \left(\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM\,S}}\right)\right) - \left(\frac{\mathrm{d}\, I_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\, U_{\mathrm{CM\,S-S}}}{\mathrm{d}t}\right)\vec{\omega}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{\alpha} = \left(I_{\mathrm{S}} + U_{\mathrm{CM\,S-S}} - U_{\mathrm{CM\,S-CM}}\right)^{-1}\left(\vec{\tau}_{\mathrm{CM}} - m\vec{v}_{\mathrm{CM}} \times \vec{v}_{\mathrm{S}} + m\vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \left(\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM\,S}}\right)\right) - \left(\frac{\mathrm{d}\, I_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\, U_{\mathrm{CM\,S-S}}}{\mathrm{d}t}\right)\vec{\omega}\right)$$

Dans le cas où $\vec{r}_{\mathrm{S}} = \vec{r}_{\mathrm{CM}}$ et $\vec{v}_{\mathrm{S}} \equiv \vec{v}_{\mathrm{CM}}$, alors $\vec{r}_{\mathrm{CM\,S}} = 0$ et plusieurs termes seront nuls :

- $U_{\mathrm{CM\,S-S}} = 0$
- $\dfrac{\mathrm{d}U_{\mathrm{CM\,S-S}}}{\mathrm{d}t} = 0$
- $U_{\mathrm{CM\,S-CM}} = 0$
- $m\vec{v}_{\mathrm{CM}} \times \vec{v}_{\mathrm{S}} = 0$
- $m\vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \left(\vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM\,S}}\right)\right) = 0$

Ainsi, l'expression de l'accélération angulaire $\vec{\alpha}$ où $I_{\mathrm{S}} \equiv I_{\mathrm{CM}}$ prendra la forme réduite

$$\vec{\alpha} = I_{\mathrm{CM}}{}^{-1}\left(\vec{\tau}_{\mathrm{CM}} - \frac{\mathrm{d}\, I_{\mathrm{CM}}}{\mathrm{d}t}\vec{\omega}\right)$$

$$\text{avec} \qquad \frac{\mathrm{d}\, I_{\mathrm{CM}}}{\mathrm{d}t} = \left(\vec{\omega} \times R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\right) I_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})} R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}{}^{T} + R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\, I_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})} \left(\vec{\omega} \times R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\right)^{T}$$

Situation A : ***L'accélération angulaire d'un corps rigide à 3 particules non-colinéaire calculé rapport au centre de masse.*** Un corps rigide est composé de d'une particule 1 de masse $m_1 = 5$ kg située à la coordonnée $\vec{r}_1 = 0$, d'une particule 2 de masse $m_2 = 5$ kg située à la coordonnée $\vec{r}_2 = 3\vec{i}$ m et d'une particule 3 de masse $m_3 = 5$ kg située à la coordonnée $\vec{r}_2 = (3\vec{i} + 4\vec{j})$ m. Le système subit une force extérieur $\vec{F} = 7\vec{j}$ N appliquée sur la particule 2. On désire évaluer l'accélération angulaire $\vec{\alpha}$ sachant que la vitesse angulaire du corps rigide est $\vec{\omega} = (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$ rad/s et que le corps rigide n'est pas tourné ($\hat{q} = 0$).

Évaluons la masse totale m du système :

$$m = \sum_{p=1}^{N} m_p \quad \Rightarrow \quad m = m_1 + m_2 + m_3$$

$$\Rightarrow \quad m = (5\,\text{kg}) + (5\,\text{kg}) + (5\,\text{kg})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{m = 15 \text{ kg}}$$

Évaluons la position du centre de masse $\vec{r}_{\text{CM}}$ du système :

$$\vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_p \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{m}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 + m_3\vec{r}_3)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{\text{CM}} = \frac{1}{(15)}\left((5)(0\vec{i}) + (5)(3\vec{i}) + (5)(3\vec{i} + 4\vec{j})\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{r}_{\text{CM}} = (2\vec{i} + 1{,}333\vec{j})\text{m}}$$

Évaluons le moment de force total extérieur appliquée sur le corps rigide par rapport au centre de masse :

$$\vec{\tau}_{\text{CM}} = \sum_{p=1}^{N} \vec{r}_{p\,\text{CM}} \times \vec{F}_{p(\text{ext})} \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau}_{\text{CM}} = \vec{r}_{2\,\text{CM}} \times \vec{F}_{2(\text{ext})}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\tau}_{\text{CM}} = (\vec{r}_2 - \vec{r}_{\text{CM}}) \times \vec{F} \qquad (\vec{r}_{p\,\text{CM}} = \vec{r}_p - \vec{r}_{\text{CM}})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\tau}_{\text{CM}} = \left((3\vec{i}) - (2\vec{i} + 1{,}333\vec{j})\right) \times (7\vec{j})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\tau}_{\text{CM}} = (\vec{i} + 1{,}333\vec{j}) \times (7\vec{j})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{\tau}_{\text{CM}} = 7\vec{k} \ \text{N}\cdot\text{m}}$$

Évaluons le moment d'inertie du corps rigide par rapport à son centre de masse. Puisque nos particules sont uniquement situées dans le plan *xy*, alors les termes

$$\Delta r_{zp\text{CM}} = r_{zp} - r_{z\text{CM}} = 0$$

seront nuls et il ne restera plus qu'à exploiter les termes suivants :

- $\Delta r_{x1\text{CM}} = r_{x1} - r_{x\text{CM}} \quad \Rightarrow \quad \Delta r_{x1\text{CM}} = (0) - (2) \quad \Rightarrow \quad \Delta r_{x1\text{CM}} = -2$ m

- $\Delta r_{y1\text{CM}} = r_{y1} - r_{y\text{CM}} \quad \Rightarrow \quad \Delta r_{y1\text{CM}} = (0) - (1{,}333) \quad \Rightarrow \quad \Delta r_{y1\text{CM}} = -1{,}333 \text{ m}$
- $\Delta r_{x2\text{CM}} = r_{x2} - r_{x\text{CM}} \quad \Rightarrow \quad \Delta r_{x2\text{CM}} = (3) - (2) \quad \Rightarrow \quad \Delta r_{x2\text{CM}} = 1 \text{ m}$
- $\Delta r_{y2\text{CM}} = r_{y2} - r_{y\text{CM}} \quad \Rightarrow \quad \Delta r_{y2\text{CM}} = (0) - (1{,}333) \quad \Rightarrow \quad \Delta r_{y2\text{CM}} = -1{,}333 \text{ m}$
- $\Delta r_{x3\text{CM}} = r_{x3} - r_{x\text{CM}} \quad \Rightarrow \quad \Delta r_{x3\text{CM}} = (3) - (2) \quad \Rightarrow \quad \Delta r_{x3\text{CM}} = 1 \text{ m}$
- $\Delta r_{y3\text{CM}} = r_{y3} - r_{y\text{CM}} \quad \Rightarrow \quad \Delta r_{y3\text{CM}} = (4) - (1{,}333) \quad \Rightarrow \quad \Delta r_{y3\text{CM}} = 2{,}666 \text{ m}$

Les termes sur la diagonale du tenseur d'inertie seront les suivants :

- $I_{xx\text{CM}} = \sum_{p=1}^{N} m_p \left(\Delta r_{yp\text{CM}}{}^2 + \Delta r_{zp\text{CM}}{}^2 \right) \quad \Rightarrow \quad I_{xx\text{CM}} = m_1 \Delta r_{y1\text{CM}}{}^2 + m_2 \Delta r_{y2\text{CM}}{}^2 + m_3 \Delta r_{y3\text{CM}}{}^2$

$$\Rightarrow \quad I_{xx\text{CM}} = (5)(-1{,}333)^2 + (5)(-1{,}333)^2 + (5)(2{,}666)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_{xx\text{CM}} = 53{,}33 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

- $I_{yy\text{CM}} = \sum_{p=1}^{N} m_p \left(\Delta r_{xp\text{CM}}{}^2 + \Delta r_{zp\text{CM}}{}^2 \right) \quad \Rightarrow \quad I_{yy\text{CM}} = m_1 \Delta r_{x1\text{CM}}{}^2 + m_2 \Delta r_{x2\text{CM}}{}^2 + m_3 \Delta r_{x3\text{CM}}{}^2$

$$\Rightarrow \quad I_{yy\text{CM}} = (5)(-2)^2 + (5)(1)^2 + (5)(1)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_{yy\text{CM}} = 30 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

- $I_{zz\text{CM}} = \sum_{p=1}^{N} m_p \left(\Delta r_{xp\text{CM}}{}^2 + \Delta r_{yp\text{CM}}{}^2 \right) \quad \Rightarrow \quad I_{zz\text{CM}} = \left(30 \text{kg} \cdot \text{m}^2\right) + \left(53{,}31 \text{kg} \cdot \text{m}^2\right)$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_{zz\text{CM}} = 83{,}33 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

- $I_{xy\text{CM}} = -\sum_{p=1}^{N} m_p \Delta r_{xp\text{CM}} \Delta r_{yp\text{CM}} = 0 \quad \Rightarrow \quad I_{xy\text{CM}} = -\begin{pmatrix} m_1 \Delta r_{x1\text{CM}} \Delta r_{y1\text{CM}} + m_2 \Delta r_{x2\text{CM}} \Delta r_{y2\text{CM}} \\ + m_3 \Delta r_{x3\text{CM}} \Delta r_{y3\text{CM}} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \quad I_{xy\text{CM}} = -\begin{pmatrix} (5)(-2)(-1{,}333) + (5)(1)(-1{,}333) \\ + (5)(1)(2{,}666) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_{xy\text{CM}} = -20 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

Voici notre tenseur d'inertie par rapport au centre de masse :

$$I_{\text{CM}} = \begin{pmatrix} I_{xx\text{CM}} & I_{xy\text{CM}} & I_{xz\text{CM}} \\ I_{yx\text{CM}} & I_{yy\text{CM}} & I_{yz\text{CM}} \\ I_{zx\text{CM}} & I_{zy\text{CM}} & I_{zz\text{CM}} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad I_{\text{CM}} = \begin{pmatrix} I_{xx\text{CM}} & I_{xy\text{CM}} & 0 \\ I_{yx\text{CM}} & I_{yy\text{CM}} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz\text{CM}} \end{pmatrix} \qquad \left(\text{ex : } I_{xz\text{CM}} = -\sum_{p=1}^{N} m_p \Delta r_{xp\text{CM}} \Delta r_{zp\text{CM}} = 0 \right)$$

$$\Rightarrow \qquad I_{\text{CM}} = \begin{pmatrix} 53{,}33 & -20 & 0 \\ -20 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 83{,}33 \end{pmatrix} \qquad\qquad (I_{xy\text{CM}} = I_{yx\text{CM}})$$

Évaluons la matrice $I_{\text{CM}}{}^{-1}$ à partir d'une application[1] réalisant l'inversion d'une matrice :

$$I_{\text{CM}}{}^{-1} = \begin{pmatrix} 0{,}025 & 0{,}016\overline{6} & 0 \\ 0{,}016\overline{6} & 0{,}044\overline{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}012 \end{pmatrix}$$

Évaluons la dérivée du tenseur d'inertie I_{CM} par rapport au temps. Puisque l'on peut considérer que le corps est connu dans le référentiel O, car il n'est pas tournée ($\hat{q} = 0$), alors notre matrice de rotation $R_{\text{S}\to\text{O}}$ est telle que $R_{\text{S}\to\text{O}} = R_{\text{S}\to\text{O}}{}^{T} = I_3$. Ainsi, $\mathrm{d}I_{\text{CM}} / \mathrm{d}t$ donnera le résultat suivant :

$$\frac{\mathrm{d}\,I_{\text{CM}}}{\mathrm{d}t} = (\vec{\omega} \times R_{\text{S}\to\text{O}}) I_{\text{CM}}^{(\text{S})} R_{\text{S}\to\text{O}}{}^{T} + R_{\text{S}\to\text{O}}\, I_{\text{CM}}^{(\text{S})} (\vec{\omega} \times R_{\text{S}\to\text{O}})^{T}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\,I_{\text{CM}}}{\mathrm{d}t} = (\vec{\omega} \times I_3) I_{\text{CM}}^{(\text{S})} I_3 + I_3 I_{\text{CM}}^{(\text{S})} (\vec{\omega} \times I_3)^{T}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\,I_{\text{CM}}}{\mathrm{d}t} = \left(\begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} I_3 \right) I_{\text{CM}}^{(\text{S})} I_3 + I_3 I_{\text{CM}}^{(\text{S})} \left(\begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} I_3 \right)^{T}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\,I_{\text{CM}}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} I_{\text{CM}}^{(\text{S})} + I_{\text{CM}}^{(\text{S})} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}^{T}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\,I_{\text{CM}}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} I_{\text{CM}}^{(\text{S})} + I_{\text{CM}}^{(\text{S})} \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\,I_{\text{CM}}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 53{,}33 & -20 & 0 \\ -20 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 83{,}33 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 53{,}33 & -20 & 0 \\ -20 & 30 & 0 \\ 0 & 0 & 83{,}33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y \\ -\omega_z & 0 & \omega_x \\ \omega_y & -\omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\,I_{\text{CM}}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 20\omega_z & -30\omega_z & 83{,}33\omega_y \\ 53{,}33\omega_z & -20\omega_z & -83{,}33\omega_x \\ -53{,}33\omega_y - 20\omega_x & 20\omega_y + 30\omega_x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 20\omega_z & 53{,}33\omega_z & -53{,}33\omega_y - 20\omega_x \\ -30\omega_z & -20\omega_z & 20\omega_y + 30\omega_x \\ 83{,}33\omega_y & -83{,}33\omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

[1] Référence : https://www.dcode.fr/inverse-matrice

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\,I_{\mathrm{CM}}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 40\omega_z & 23{,}33\omega_z & -20\omega_x + 30\omega_y \\ 23{,}33\omega_z & -40\omega_z & -53{,}33\omega_x + 20\omega_y \\ -20\omega_x + 30\omega_y & -53{,}33\omega_x + 20\omega_y & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\,I_{\mathrm{CM}}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 40(1) & 23{,}33(1) & -20(1)+30(1) \\ 23{,}33(1) & -40(1) & -53{,}33(1)+20(1) \\ -20(1)+30(1) & -53{,}33(1)+20(1) & 0 \end{pmatrix} \qquad (\vec{\omega} = (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})\ \text{rad/s})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\,I_{\mathrm{CM}}}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} 40 & 23{,}33 & 10 \\ 23{,}33 & -40 & -33{,}33 \\ 10 & -33{,}33 & 0 \end{pmatrix}$$

Évaluons maintenant notre accélération angulaire :

$$\vec{\alpha} = I_{\mathrm{CM}}{}^{-1}\left(\vec{\tau}_{\mathrm{CM}} - \frac{\mathrm{d}\,I_{\mathrm{CM}}}{\mathrm{d}t}\vec{\omega} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0{,}025 & 0{,}01\overline{6} & 0 \\ 0{,}01\overline{6} & 0{,}04\overline{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}012 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 40 & 23{,}33 & 10 \\ 23{,}31 & -40 & -33{,}33 \\ 10 & -33{,}33 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0{,}025 & 0{,}01\overline{6} & 0 \\ 0{,}01\overline{6} & 0{,}04\overline{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}012 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 73{,}33 \\ -50 \\ -23{,}33 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0{,}025 & 0{,}01\overline{6} & 0 \\ 0{,}01\overline{6} & 0{,}04\overline{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}012 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -73{,}33 \\ 50 \\ 30{,}33 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0{,}364 \end{pmatrix} \text{rad/s}$$