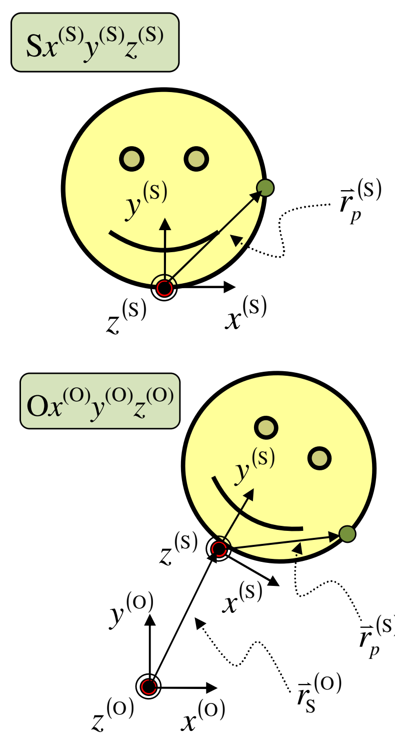
Chapitre 7.3 – La théorie du corps rigide : Le tenseur d'inertie, le moment cinétique et l'énergie cinétique

La représentation matricielle du produit vectoriel

Soit deux vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$, alors le produit vectoriel $\vec{a}\times\vec{b}$ entre ces deux vecteurs peut être calculé par les différentes équations suivantes :

Expression explicite	$\vec{a}\times\vec{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}$
Calcul du déterminant	$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$
Calcul matricielle avec matrice antisymétrique[1] A	$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$ où $\vec{a}\times \equiv A_{\vec{a}} = \begin{pmatrix} 0 & -a_z & a_y \\ a_z & 0 & -a_x \\ -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}$

La matrice de rotation



La matrice de rotation $R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}$ permet d'effectuer la rotation d'un point $\vec{r}^{\,(\mathrm{S})}$ autour d'un origine dans le référentiel $\mathrm{S}x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$ pour le représenter en rotation autour d'un point $\vec{r}_\mathrm{S}^{\,(\mathrm{O})}$ dans un système de coordonnées $\mathrm{O}xyz$.

Puisque l'origine de $\mathrm{S}x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$ est situé à la coordonnée $\vec{r}_\mathrm{S}^{\,(\mathrm{O})}$ selon $\mathrm{O}xyz$, alors la position d'une particule $\vec{r}_p^{\,(\mathrm{S})}$ exprimée dans $\mathrm{S}x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$ sera égale à

$$\vec{r}_p^{\,(\mathrm{O})} = \vec{r}_\mathrm{S}^{\,(\mathrm{O})} + R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\vec{r}_p^{\,(\mathrm{S})}$$

dans $\mathrm{O}xyz$. Le calcul $R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\vec{r}_p^{\,(\mathrm{S})}$ est équivalent au calcul $\hat{r}_{p/\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} = \hat{q}\,\hat{r}_p^{(\mathrm{S})}\hat{q}^*$ réalisé à l'aide du quaternion $\hat{q}$.

[1] https://en.wikipedia.org/wiki/Skew-symmetric_matrix

Une matrice de rotation peut être construite de plusieurs façons en fonction de l'axe de rotation choisi pour tourner autour de la position $\vec{r}_{\mathrm{S}}$ dans $\mathrm{O}xyz$. Dans le cadre de ces notes de cours, nous utiliserons l'expression suivante pour définir une matrice de rotation tournant selon l'axe $\hat{u} = u_x\vec{i} + u_y\vec{j} + u_z\vec{k}$ où $\sqrt{u_x^{\,2} + u_y^{\,2} + u_z^{\,2}} = 1$:

Version explicative	$R_u = \hat{u}\hat{u}^T + \left(I - \hat{u}\hat{u}^T\right)\cos(\theta_u) + \begin{pmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{pmatrix}\sin(\theta_u)$
Forme matricielle	$R_u = \begin{pmatrix} u_x^{\,2} + \left(1-u_x^{\,2}\right)c_u & u_xu_y(1-c_u) - u_zs_u & u_xu_z(1-c_u) + u_ys_u \\ u_xu_y(1-c_u) + u_zs_u & u_y^{\,2} + \left(1-u_y^{\,2}\right)c_u & u_yu_z(1-c_u) - u_xs_u \\ u_xu_z(1-c_u) - u_ys_u & u_yu_z(1-c_u) + u_xs_u & u_z^{\,2} + \left(1-u_z^{\,2}\right)c_u \end{pmatrix}$

où θ_u : L'angle de rotation autour de l'axe $\hat{u}$.
c_u : Compression de l'expression $c_u = \cos(\theta_u)$.
s_u : Compression de l'expression $s_u = \sin(\theta_u)$.

À partir d'un quaternion $\hat{q} = (q_w,\, q_x, q_y, q_z)$ unitaire ($\sqrt{q_w^{\,2} + q_x^{\,2} + q_y^{\,2} + q_z^{\,2}} = 1$), nous pouvons construire notre matrice de rotation de la façon suivante :

$$R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}} = \begin{pmatrix} 1-2q_y^{\,2}-2q_z^{\,2} & 2q_xq_y - 2q_zq_w & 2q_xq_z + 2q_yq_w \\ 2q_xq_y + 2q_zq_w & 1-2q_x^{\,2}-2q_z^{\,2} & 2q_yq_z - 2q_xq_w \\ 2q_xq_z - 2q_yq_w & 2q_yq_z + 2q_xq_w & 1-2q_x^{\,2}-2q_y^{\,2} \end{pmatrix}$$

La matrice de rotation $R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}$ possède plusieurs propriétés dues à sa structure et permet de transformer plusieurs mesures (vecteur et matrice) du référentiel $\mathrm{S}x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$ vers le référentiel $\mathrm{O}xyz$:

Propriété[2]	Équation
Relation inverse et transposé	$R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}^{\;T} = R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}^{\;-1}$ et $R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}^{\;-1} = R_{\mathrm{O}\to\mathrm{S}}$
Produit des matrices transposées[3]	$R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}^{\;T} = R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}^{\;T}R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}} = I_3$
Transformation	**Règle de la transformation**
Transformation de la position d'une particule p dans **S** par rapport à son origine vers **O** par rapport à la position de référence S.	$\vec{r}_{p/\mathrm{S}}^{\,(\mathrm{O})} = R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\,\vec{r}_p^{\,(\mathrm{S})}$
Transformation du moment d'inertie du corps rigide dans **S** par rapport à l'origine vers **O** par rapport à la position de référence S.	$I_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} = R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\,I^{(\mathrm{S})}R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}^{\;T}$

[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Rotation_matrix
[3] La matrice I_3 est la matrice identité de 3 lignes et 3 colonnes (à 9 paramètres).

Preuve :

À partir de l'application de la matrice $I_S^{(O)}$ sur un vecteur $\vec{\omega}^{(O)}$ tel que $\vec{A}^{(O)} = I_S^{(O)}\vec{\omega}^{(O)}$, transformons $\vec{\omega}^{(O)}$ dans **S** avec $R_{O\to S} = {R_{S\to O}}^{-1}$ pour obtenir $I_S^{(O)}$ à partir de $I^{(S)}$ et de la transformation $R_{S\to O}$:

Soit $\vec{\omega}^{(O)}$ $\Rightarrow$ ${R_{S\to O}}^{-1}\vec{\omega}^{(O)} = \vec{\omega}^{(S)}$ (Aller dans **S** avec ${R_{S\to O}}^{-1} = R_{O\to S}$)

$\Rightarrow$ $I^{(S)}{R_{S\to O}}^{-1}\vec{\omega}^{(O)} = I^{(S)}\vec{\omega}^{(S)}$ (Appliquer $I^{(S)}$)

$\Rightarrow$ $R_{S\to O}I^{(S)}{R_{S\to O}}^{-1}\vec{\omega}^{(O)} = R_{S\to O}\left(I^{(S)}\vec{\omega}^{(S)}\right)$ (Revenir dans **O** avec $R_{S\to O}$)

$\Rightarrow$ $R_{S\to O}I^{(S)}{R_{S\to O}}^{-1}\vec{\omega}^{(O)} = R_{S\to O}\left(\vec{A}^{(S)}\right)$ (Calculer $\vec{A}^{(S)} = I^{(S)}\vec{\omega}^{(S)}$)

$\Rightarrow$ $R_{S\to O}I^{(S)}{R_{S\to O}}^{-1}\vec{\omega}^{(O)} = \vec{A}^{(O)}$ (Transformer $\vec{A}^{(O)} = R_{S\to O}\vec{A}^{(S)}$)

$\Rightarrow$ $R_{S\to O}I^{(S)}{R_{S\to O}}^{-1}\vec{\omega}^{(O)} = I_S^{(O)}\vec{\omega}^{(O)}$ (Effet de $I_S^{(O)}$: $\vec{A}^{(O)} = I_S^{(O)}\vec{\omega}^{(O)}$)

$\Rightarrow$ $I_S^{(O)} = R_{S\to O}I^{(S)}{R_{S\to O}}^{-1}$ ■ (Éliminer terme $\vec{\omega}^{(O)}$ de droite)

Nous pouvons évaluer la dérivée de cette matrice de rotation $R_{S\to O}$ par rapport au temps t grâce à l'expression suivante exploitant la représentation matricielle du produit vectoriel:

$$\frac{\mathrm{d}R_{S\to O}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega}\times R_{S\to O} = A_{\vec{\omega}}R_{S\to O} \qquad \text{où} \qquad A_{\vec{\omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

(Structure du produit vectorielle exprimée avec la matrice antisymétrique A)

Preuve :

Débutons avec la définition de la position d'une particule dans le référentiel $Oxyz$ à partir de la transformation de la position $r_p^{(S)}$ du référentiel $Sx^{(S)}y^{(S)}z^{(S)}$ vers le référentiel $Oxyz$, appliquons la dérivée par rapport au temps sur cette relation en exploitant la vitesse $\vec{v}_{pS} = \vec{\omega}\times\vec{r}_{pS}$:

$\vec{r}_{p/S} = R_{S\to O}\vec{r}_p^{(S)}$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_{p/S}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(R_{S\to O}\vec{r}_p^{(S)}\right)$

$\Rightarrow$ $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_{p/S}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(R_{S\to O}\right)\vec{r}_p^{(S)} + R_{S\to O}\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_p^{(S)}}{\mathrm{d}t}$

$\Rightarrow$ $\vec{v}_{p/S} = \dfrac{\mathrm{d}R_{S\to O}}{\mathrm{d}t}\vec{r}_p^{(S)}$ $\left(\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_p^{(S)}}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ et } \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_{p/S}}{\mathrm{d}t} = \vec{v}_{p/S}\right)$

$\Rightarrow$ $\vec{\omega}\times\vec{r}_{p/S} = \dfrac{\mathrm{d}R_{S\to O}}{\mathrm{d}t}\vec{r}_p^{(S)}$

$\Rightarrow$ $\vec{\omega}\times\left(R_{S\to O}\vec{r}_p^{(S)}\right) = \dfrac{\mathrm{d}R_{S\to O}}{\mathrm{d}t}\vec{r}_p^{(S)}$

$\Rightarrow$ $\vec{\omega}\times R_{S\to O}\,\vec{r}_p^{(S)} = \dfrac{\mathrm{d}R_{S\to O}}{\mathrm{d}t}\vec{r}_p^{(S)}$

$\Rightarrow$ $\vec{\omega}\times R_{S\to O} = \dfrac{\mathrm{d}R_{S\to O}}{\mathrm{d}t}$ ■

La dérivée du tenseur d'inertie par rapport au temps

Dans le référentiel $\mathrm{S}x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$, le corps rigide est immobile. Ainsi, son moment d'inertie $I^{(\mathrm{S})}$ par rapport à l'origine de **S** est constant dans le temps. Cependant, la représentation du moment d'inertie $I_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})}$ par rapport à $\vec{r}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})}$ dans **O** n'est pas constant, car le moment d'inertie dépend des distances entre les masses et l'axe de rotation. Puisque l'orientation de l'axe de rotation peut changer dans le temps, le moment d'inertie doit également changer dans le temps. Ainsi

$$\frac{\mathrm{d}\,I^{(\mathrm{S})}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{mais} \qquad \frac{\mathrm{d}\,I_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})}}{\mathrm{d}t} \neq 0 \text{ sauf dans des cas particuliers.}$$

Si l'on désire obtenir la dérivée du tenseur d'inertie $I_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})}$ par rapport au temps dans **O**, nous aurons besoin du calcul suivant :

Dans $\mathrm{O}zyz$	Dans $\mathrm{S}x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$
$\frac{\mathrm{d}\,I_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})}}{\mathrm{d}t} = \left(\vec{\omega}\times R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\right) I^{(\mathrm{S})} R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}{}^{T} + R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\, I^{(\mathrm{S})} \left(\vec{\omega}\times R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\right)^{T}$	$\frac{\mathrm{d}\,I^{(\mathrm{S})}}{\mathrm{d}t} = 0$

<u>Preuve :</u>

Débutons cette preuve avec l'expression de la transformation du tenseur d'inertie représenté dans le référentiel $\mathrm{S}x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$ vers le référentiel $\mathrm{O}zyz$ tel que

$$I_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} = R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\, I^{(\mathrm{S})} R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}{}^{T}\ .$$

Par la suite, appliquons la dérivée par rapport au temps à cette équation pour exploiter la dérivée par rapport au temps de la matrice de rotation tel que

$$\frac{\mathrm{d}\,R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega}\times R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}} \quad .$$

Voici ce que nous obtiendrons :

$$I_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} = R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\, I^{(\mathrm{S})} R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}{}^{T} \qquad (\,I_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} \text{ à partir de la transformation de } \mathrm{S}\to\mathrm{O}\,)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\,I_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\, I^{(\mathrm{S})} R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}{}^{T}\right) \qquad \text{(Appliquer la dérivée dans le temps)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\,I_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}}{\mathrm{d}t} I^{(\mathrm{S})} R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}{}^{T} + R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}} \frac{\mathrm{d}\left(I^{(\mathrm{S})} R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}{}^{T}\right)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(Dérivée en chaîne)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\,I_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}}{\mathrm{d}t} I^{(\mathrm{S})} R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}{}^{T} + R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\, I^{(\mathrm{S})} \frac{\mathrm{d}\ R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}{}^{T}}{\mathrm{d}t} \qquad \left(\text{Puisque } \frac{\mathrm{d}\,I^{(\mathrm{S})}}{\mathrm{d}t} = 0\text{, alors } I^{(\mathrm{S})} \text{ est une constante}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\,I_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\,R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}}{\mathrm{d}t} I^{(\mathrm{S})} R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}{}^{T} + R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\, I^{(\mathrm{S})} \left(\frac{\mathrm{d}\ R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}}{\mathrm{d}t}\right)^{T} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}\left(R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}{}^{T}\right)}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\mathrm{d}\ R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}}{\mathrm{d}t}\right)^{T}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\,I_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})}}{\mathrm{d}t} = \left(\vec{\omega}\times R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\right) I^{(\mathrm{S})} R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}{}^{T} + R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\, I^{(\mathrm{S})} \left(\vec{\omega}\times R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\right)^{T} \quad \blacksquare \qquad \left(\vec{\omega}\times R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}} = \frac{\mathrm{d}\,R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}}{\mathrm{d}t}\right)$$

Le tenseur d'inertie d'un corps rigide

Le tenseur d'inertie est une structure mathématique permettant de décrire à quel point il sera difficile de faire tourner un corps rigide autour d'une axe de rotation $\hat{u}$. Ce tenseur d'ordre 2 peut être également représenté sous la forme d'une matrice. Les éléments de la matrice dépendront des positions de toutes les particules qui composent le corps rigide par rapport à un point de référence donnée. Ainsi, un tenseur d'inertie décrit par rapport à l'origine du système d'axe $\mathrm{O}xyz$ ne sera pas identique au tenseur d'inertie décrit par rapport au centre de masse selon le système d'axe $\mathrm{O}xyz$. De plus, le tenseur d'inertie varie dans le temps, car il dépend de la rotation du corps rigide sauf s'il est décrit par rapport au système d'axe $\mathrm{S}x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$ où les particules qui constituent le corps rigide sont immobiles :

référentiel et point de référence	Tenseur d'inertie
Mesure par rapport à l'origine selon le référentiel $\mathrm{S}x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$ (<u>constant dans le temps</u>, car le corps est immobile selon S)	$I^{(\mathrm{S})} = \begin{pmatrix} I_{xx}^{(\mathrm{S})} & I_{xy}^{(\mathrm{S})} & I_{xz}^{(\mathrm{S})} \\ I_{yx}^{(\mathrm{S})} & I_{yy}^{(\mathrm{S})} & I_{yz}^{(\mathrm{S})} \\ I_{zx}^{(\mathrm{S})} & I_{zy}^{(\mathrm{S})} & I_{zz}^{(\mathrm{S})} \end{pmatrix}$ $I_{xx}^{(\mathrm{S})} = \sum_{p=1}^{N} m_p \left(r_{yp}^{(\mathrm{S})2} + r_{zp}^{(\mathrm{S})2} \right)$ $I_{xy}^{(\mathrm{S})} = I_{yx}^{(\mathrm{S})} = -\sum_{p=1}^{N} m_p r_{xp}^{(\mathrm{S})} r_{yp}^{(\mathrm{S})}$ $I_{yy}^{(\mathrm{S})} = \sum_{p=1}^{N} m_p \left(r_{xp}^{(\mathrm{S})2} + r_{zp}^{(\mathrm{S})2} \right)$ $I_{xz}^{(\mathrm{S})} = I_{zx}^{(\mathrm{S})} = -\sum_{p=1}^{N} m_p r_{xp}^{(\mathrm{S})} r_{zp}^{(\mathrm{S})}$ $I_{zz}^{(\mathrm{S})} = \sum_{p=1}^{N} m_p \left(r_{xp}^{(\mathrm{S})2} + r_{yp}^{(\mathrm{S})2} \right)$ $I_{yz}^{(\mathrm{S})} = I_{zy}^{(\mathrm{S})} = -\sum_{p=1}^{N} m_p r_{yp}^{(\mathrm{S})} r_{zp}^{(\mathrm{S})}$
Mesure par rapport au point S selon le référentiel $\mathrm{O}xyz$ (varie dans le temps, car il dépend de $\hat{q}$)	$I_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} = I_{\mathrm{S}} = \begin{pmatrix} I_{xx\mathrm{S}} & I_{xy\mathrm{S}} & I_{xz\mathrm{S}} \\ I_{yx\mathrm{S}} & I_{yy\mathrm{S}} & I_{yz\mathrm{S}} \\ I_{zx\mathrm{S}} & I_{zy\mathrm{S}} & I_{zz\mathrm{S}} \end{pmatrix}$ $I_{xx\mathrm{S}} = \sum_{p=1}^{N} m_p \left(r_{yp/\mathrm{S}}^{\ 2} + r_{zp/\mathrm{S}}^{\ 2} \right)$ $I_{xy\mathrm{S}} = I_{yx\mathrm{S}} = -\sum_{p=1}^{N} m_p r_{xp/\mathrm{S}} r_{yp/\mathrm{S}}$ $I_{yy\mathrm{S}} = \sum_{p=1}^{N} m_p \left(r_{xp/\mathrm{S}}^{\ 2} + r_{zp/\mathrm{S}}^{\ 2} \right)$ $I_{xz\mathrm{S}} = I_{zx\mathrm{S}} = -\sum_{p=1}^{N} m_p r_{xp/\mathrm{S}} r_{zp/\mathrm{S}}$ $I_{zz\mathrm{S}} = \sum_{p=1}^{N} m_p \left(r_{xp/\mathrm{S}}^{\ 2} + r_{yp/\mathrm{S}}^{\ 2} \right)$ $I_{yz\mathrm{S}} = I_{zy\mathrm{S}} = -\sum_{p=1}^{N} m_p r_{yp/\mathrm{S}} r_{zp/\mathrm{S}}$ avec $r_{xp/\mathrm{S}} = r_{xp} - r_{x\mathrm{S}}$, $r_{yp/\mathrm{S}} = r_{yp} - r_{y\mathrm{S}}$ et $r_{zp/\mathrm{S}} = r_{zp} - r_{z\mathrm{S}}$
Moment d'inertie I_{S} à partir de $I^{(\mathrm{S})}$ et de l'état de rotation $\hat{q}$	Obtenir $R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}$ de $\hat{q}$ et réaliser les produits de matrices $I_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} = R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\, I^{(\mathrm{S})} R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}^{\ T}$ où $R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}^{\ T} = R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}^{\ -1}$ est la transposé de la matrice $R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}$ ($R_{ij} = R_{ji}$)
Mesure par rapport à l'origine selon le référentiel $\mathrm{O}xyz$. (varie dans le temps, car il dépend de $\hat{q}$)	$I^{(\mathrm{O})} = I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix}$ $I_{xx} = \sum_{p=1}^{N} m_p \left(r_{yp}^{\ 2} + r_{zp}^{\ 2} \right)$ $I_{xy} = I_{yx} = -\sum_{p=1}^{N} m_p r_{xp} r_{yp}$ $I_{yy} = \sum_{p=1}^{N} m_p \left(r_{xp}^{\ 2} + r_{zp}^{\ 2} \right)$ $I_{xz} = I_{zx} = -\sum_{p=1}^{N} m_p r_{xp} r_{zp}$ $I_{zz} = \sum_{p=1}^{N} m_p \left(r_{xp}^{\ 2} + r_{yp}^{\ 2} \right)$ $I_{yz} = I_{zy} = -\sum_{p=1}^{N} m_p r_{yp} r_{zp}$

Remarque :

- Si le tenseur d'inertie est calculé dans $\mathrm{S}x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$ et que $\vec{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})} = 0$, alors le tenseur d'inertie est déterminé par rapport au centre de masse du corps rigide dans S tel que $I^{(\mathrm{S})} \equiv I_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})}$. Dans cette condition, le moment d'inertie sera également calculé par rapport au centre de masse dans O ce qui nous donnera

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad I_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})} = R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\, I^{(\mathrm{S})} R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}{}^{T} \qquad \text{où} \qquad I_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} \equiv I_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})}$$

- Si le tenseur d'inertie est calculé dans $\mathrm{S}x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$, mais que dans $\mathrm{O}xyz$, nous avons $\vec{r}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} = 0$, alors nous pourrons affirmer que $I_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} \equiv I^{(\mathrm{O})}$ et que la transformation donnera

$$\vec{r}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad I^{(\mathrm{O})} = R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\, I^{(\mathrm{S})} R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}{}^{T} \qquad \text{où} \qquad I_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} = I^{(\mathrm{O})}$$

Preuve :

La structure mathématique du tenseur d'inertie sera introduite dans la preuve du moment cinétique $\vec{L}$ et de l'énergie cinétique K.

Le théorème des axes parallèles

Dans un corps rigide, la position du centre de masse $\vec{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})}$ est une coordonnée très importante, car plusieurs calculs s'y rattachent. Exploiter le centre de masse comme point de référence **S** ($\vec{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})} = \vec{r}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})}$) peut fortement simplifier l'ensemble des calculs.

En ce qui concerne le tenseur d'inertie $I^{(\mathrm{O})}$ par rapport au référentiel $\mathrm{O}xyz$ ou bien $I^{(\mathrm{S})}$ par rapport au référentiel $\mathrm{S}x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$, il est possible de les déterminer à partir du tenseur d'inertie $I_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})}$ ou $I_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})}$ en utilisant le théorème des axes parallèles. Ce théorème permet en quelque sorte d'effectuer une translation de la position de l'axe de rotation du centre de masse vers une autre position :

$$I^{(X)} = \begin{pmatrix} I_{xx\,\mathrm{CM}} + m\left(r_{y\mathrm{CM}}{}^{2} + r_{z\mathrm{CM}}{}^{2}\right) & I_{xy\,\mathrm{CM}} - m\, r_{x\mathrm{CM}} r_{y\mathrm{CM}} & I_{xz\,\mathrm{CM}} - m\, r_{x\mathrm{CM}} r_{z\mathrm{CM}} \\ I_{yx\,\mathrm{CM}} - m\, r_{x\mathrm{CM}} r_{y\mathrm{CM}} & I_{yy\,\mathrm{CM}} + m\left(r_{x\mathrm{CM}}{}^{2} + r_{z\mathrm{CM}}{}^{2}\right) & I_{yz\,\mathrm{CM}} - m\, r_{y\mathrm{CM}} r_{z\mathrm{CM}} \\ I_{zx\,\mathrm{CM}} - m\, r_{x\mathrm{CM}} r_{z\mathrm{CM}} & I_{zy\,\mathrm{CM}} - m\, r_{y\mathrm{CM}} r_{z\mathrm{CM}} & I_{zz\,\mathrm{CM}} - m\left(r_{x\mathrm{CM}}{}^{2} + r_{y\mathrm{CM}}{}^{2}\right) \end{pmatrix}$$

(Équation pour déterminer le tenseur d'inertie par rapport à l'origine à partir de $I_{\mathrm{CM}}^{(X)}$)

$$I_{\mathrm{S}}^{(X)} = \begin{pmatrix} I_{xx\,\mathrm{CM}} + m\left(r_{y\mathrm{CM/S}}{}^{2} + r_{z\mathrm{CM/S}}{}^{2}\right) & I_{xy\,\mathrm{CM}} - m\, r_{x\mathrm{CM/S}} r_{y\mathrm{CM/S}} & I_{xz\,\mathrm{CM}} - m\, r_{x\mathrm{CM/S}} r_{z\mathrm{CM/S}} \\ I_{yx\,\mathrm{CM}} - m\, r_{x\mathrm{CM/S}} r_{y\mathrm{CM/S}} & I_{yy\,\mathrm{CM}} + m\left(r_{x\mathrm{CM/S}}{}^{2} + r_{z\mathrm{CM/S}}{}^{2}\right) & I_{yz\,\mathrm{CM}} - m\, r_{y\mathrm{CM/S}} r_{z\mathrm{CM/S}} \\ I_{zx\,\mathrm{CM}} - m\, r_{x\mathrm{CM/S}} r_{z\mathrm{CM/S}} & I_{zy\,\mathrm{CM}} - m\, r_{y\mathrm{CM/S}} r_{z\mathrm{CM/S}} & I_{zz\,\mathrm{CM}} - m\left(r_{x\mathrm{CM/S}}{}^{2} + r_{y\mathrm{CM/S}}{}^{2}\right) \end{pmatrix}$$

(Équation pour déterminer le tenseur d'inertie par rapport au point de référence **S** à partir de $I_{\mathrm{CM}}^{(X)}$)

où X représente le référentiel à partir duquel les mesures de $I_{\mathrm{CM}}^{(X)}$ sont prises ainsi que les distances entre l'origine et $\vec{r}_{\mathrm{CM}}^{(X)}$ pour évaluer $I^{(X)}$ ou bien les distance entre le points de référence $\vec{r}_{\mathrm{S}}^{(X)}$ et $\vec{r}_{\mathrm{CM}}^{(X)}$ (pour former le terme $\vec{r}_{\mathrm{CM/S}}^{(X)}$) pour évaluer $I_{\mathrm{S}}^{(X)}$.

Preuve :

Évaluons la composante I_{xx} en exploitant la position de chaque particule contribuant au calcul du moment d'inertie par rapport au centre de masse $\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \left(r_{x\mathrm{CM}}, r_{y\mathrm{CM}}, r_{z\mathrm{CM}}\right)$:

$$I_{xx} = \sum_{p=1}^{N} m_p \left(r_{yp}^2 + r_{zp}^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad I_{xx} = \sum_{p=1}^{N} m_p \left(\left(r_{y\mathrm{CM}} + r_{yp/\mathrm{CM}}\right)^2 + \left(r_{z\mathrm{CM}} + r_{zp/\mathrm{CM}}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad I_{xx} = \sum_{p=1}^{N} m_p \left(r_{y\mathrm{CM}}{}^2 + r_{z\mathrm{CM}}{}^2 + 2 r_{y\mathrm{CM}} r_{yp/\mathrm{CM}} + 2 r_{z\mathrm{CM}} r_{zp/\mathrm{CM}} + r_{yp/\mathrm{CM}}{}^2 + r_{zp/\mathrm{CM}}{}^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad I_{xx} = \sum_{p=1}^{N} m_p \left(r_{y\mathrm{CM}}{}^2 + r_{z\mathrm{CM}}{}^2\right) + 2\sum_{p=1}^{N} m_p r_{y\mathrm{CM}} r_{yp/\mathrm{CM}} + 2\sum_{p=1}^{N} m_p r_{z\mathrm{CM}} r_{zp/\mathrm{CM}} + \sum_{p=1}^{N} m_p \left(r_{zp/\mathrm{CM}}{}^2 + r_{zp/\mathrm{CM}}{}^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad I_{xx} = \left(r_{y\mathrm{CM}}{}^2 + r_{z\mathrm{CM}}{}^2\right)\sum_{p=1}^{N} m_p + 2 r_{y\mathrm{CM}} \sum_{p=1}^{N} m_p r_{yp/\mathrm{CM}} + 2 r_{z\mathrm{CM}} \sum_{p=1}^{N} m_p r_{zp/\mathrm{CM}} + \sum_{p=1}^{N} m_p \left(r_{zp/\mathrm{CM}}{}^2 + r_{zp/\mathrm{CM}}{}^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad I_{xx} = m\left(r_{y\mathrm{CM}}{}^2 + r_{z\mathrm{CM}}{}^2\right) + 2 r_{y\mathrm{CM}} \sum_{p=1}^{N} m_p r_{yp/\mathrm{CM}} + 2 r_{z\mathrm{CM}} \sum_{p=1}^{N} m_p r_{zp/\mathrm{CM}} + I_{xx\mathrm{CM}}$$

Dans ce calcul, nous exploitons le centre de masse $\vec{r}_{\mathrm{CM}}$. Alors

$$\vec{r}_{\mathrm{CM/S}} = \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{p/\mathrm{S}} \quad \text{ce qui nous donne} \quad \vec{r}_{\mathrm{CM}/\mathrm{CM}} = \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{p/\mathrm{CM}} = 0 \quad .$$

Cette propriété du centre de masse nous permet alors d'affirmer que

$$\sum_{p=1}^{N} m_p r_{yp/\mathrm{CM}} = 0 \quad \text{et} \quad \sum_{p=1}^{N} m_p r_{zp/\mathrm{CM}} = 0$$

ce qui nous donne le résultat

$$I_{xx} = I_{xx\mathrm{CM}} + m\left(r_{y\mathrm{CM}}{}^2 + r_{z\mathrm{CM}}{}^2\right) \quad . \blacksquare \ (1)$$

Pour les autres termes hors diagonal, nous avons le calcul suivant qui peut soutenir la démonstration :

$$I_{xy} = -\sum_{p=1}^{N} m_p r_{xp} r_{yp}$$

$$\Rightarrow \quad I_{xy} = -\sum_{p=1}^{N} m_p \left(r_{x\mathrm{CM}} + r_{xp/\mathrm{CM}}\right)\left(r_{y\mathrm{CM}} + r_{yp/\mathrm{CM}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad I_{xy} = -\sum_{p=1}^{N} m_p \left(r_{x\mathrm{CM}} r_{y\mathrm{CM}} + r_{x\mathrm{CM}} r_{yp/\mathrm{CM}} + r_{xp/\mathrm{CM}} r_{y\mathrm{CM}} + r_{xp/\mathrm{CM}} r_{yp/\mathrm{CM}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad I_{xy} = -r_{x\mathrm{CM}} r_{y\mathrm{CM}} \sum_{p=1}^{N} m_p - r_{x\mathrm{CM}} \sum_{p=1}^{N} m_p r_{yp/\mathrm{CM}} - r_{y\mathrm{CM}} \sum_{p=1}^{N} m_p r_{xp/\mathrm{CM}} - \sum_{p=1}^{N} m_p r_{xp/\mathrm{CM}} r_{yp/\mathrm{CM}}$$

$$\Rightarrow \quad I_{xy} = -m\, r_{x\mathrm{CM}} r_{y\mathrm{CM}} - \sum_{p=1}^{N} m_p r_{xp/\mathrm{CM}} r_{yp/\mathrm{CM}}$$

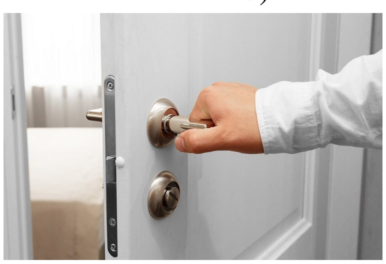
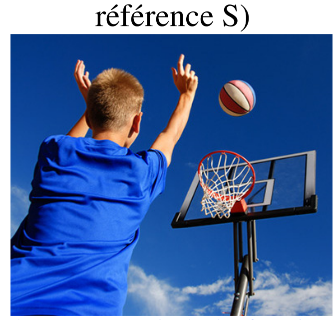
$$\Rightarrow \quad I_{xy} = I_{xy\mathrm{CM}} - m\, r_{x\mathrm{CM}} r_{y\mathrm{CM}} \ \blacksquare \ (2)$$

Le moment cinétique d'un corps rigide

Le moment cinétique d'un corps rigide constitué de N particules est égal à la somme de tous les moments cinétiques des N particules positionnées par rapport à $Oxyz$ selon l'expression

$$\vec{L} = \sum_{p=1}^{N} m_p \, \vec{r}_p \times \vec{v}_p \quad .$$

On peut toutefois comptabiliser le moment cinétique $\vec{L}$ du corps rigide à l'aide des différents paramètres décrivant le corps rigide. Une expression générale peut être simplifiée en fonction du choix du point de référence S utilisé pour décrire le mouvement du corps rigide et du contexte du mouvement à décrire :

Point de référence S du corps rigide immobile et situé à l'origine de $Oxyz$ (rotation pure du corps rigide dont la rotation du centre de masse autour de l'origine)	Point de référence S du corps rigide quelconque en mouvement selon $Oxyz$ (rotation du centre de masse autour du point de référence S en mouvement selon O)	Point de référence S du corps rigide situé sur le centre de masse du corps rigide selon $Oxyz$ (translation du centre de masse et rotation du corps rigide autour du centre de masse)
<u>Exemple :</u> Ouverture d'une porte en rotation autour de la charnière (la charnière est la position du point de référence S)  https://www.mesdepanneurs.fr/blog/ouvrez-votre-porte-claqu%C3%A9e-vous-m%C3%AAme-technique-de-la-radio	<u>Exemple :</u> Mouvement d'un avant-bras en rotation autour du coude où celui-ci est en mouvement (le coude est la position du point de référence S)  https://encyclopediegolf.fr/analyse-du-swing-rory-mcilroy	<u>Exemple :</u> Lancer un ballon en l'air avec rotation. (le centre du ballon est la position du point de référence S)  https://www.panier-basket.fr/panier-basket-ballon-basket-2/
$\vec{L} = I\,\vec{\omega}$ $(\vec{r}_\mathrm{S} = \vec{v}_\mathrm{S} = 0)$	$\vec{L} = m\,\vec{r}_\mathrm{CM} \times \vec{v}_\mathrm{S} + I_\mathrm{S}\,\vec{\omega} + m\,\vec{r}_\mathrm{S} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_\mathrm{CM\,S}\right)$ $= m\,\vec{r}_\mathrm{CM} \times \vec{v}_\mathrm{S} + \left(I_\mathrm{S} + U_\mathrm{CM\,S-S}\right)\vec{\omega}$ avec $U_\mathrm{CM\,S-S} = m\left(\vec{r}_\mathrm{CM\,S} \cdot \vec{r}_\mathrm{S}\, I_3 - \vec{r}_\mathrm{CM\,S}\,\vec{r}_\mathrm{S}^{\,T}\right)$ et $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (cas général)	$\vec{L} = m\,\vec{r}_\mathrm{CM} \times \vec{v}_\mathrm{CM} + I_\mathrm{CM}\,\vec{\omega}$ $(\vec{r}_\mathrm{S} = \vec{r}_\mathrm{CM})$

Preuve :

$$\vec{L} = \sum_{p=1}^{N} m_p \, \vec{r}_p \times \vec{v}_p$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \sum_{p=1}^{N} m_p \left(\vec{r}_S + \vec{r}_{pS}\right) \times \left(\vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{r}_{pS}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \sum_{p=1}^{N} \left(m_p \vec{r}_S \times \vec{v}_S + m_p \vec{r}_S \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{pS}\right) + m_p \vec{r}_{pS} \times \vec{v}_S + m_p \vec{r}_{pS} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{pS}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_S \times \vec{v}_S + \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_S \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{pS}\right) + \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{pS} \times \vec{v}_S + \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{pS} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{pS}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{r}_S \times \vec{v}_S \sum_{p=1}^{N} m_p + \vec{r}_S \times \left(\vec{\omega} \times \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{pS}\right) + \left(\sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{pS}\right) \times \vec{v}_S + \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{pS} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{pS}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = \vec{r}_S \times \vec{v}_S (m) + \vec{r}_S \times \left(\vec{\omega} \times \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{pS}\right) + \left(\sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{pS}\right) \times \vec{v}_S + \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{pS} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{pS}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = m \vec{r}_S \times \vec{v}_S + \vec{r}_S \times \left(\vec{\omega} \times \frac{m}{m} \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{pS}\right) + \left(\frac{m}{m} \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{pS}\right) \times \vec{v}_S + \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{pS} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{pS}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = m \vec{r}_S \times \vec{v}_S + m \vec{r}_S \times \left(\vec{\omega} \times \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{pS}\right) + m \left(\frac{1}{m} \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{pS}\right) \times \vec{v}_S + \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{pS} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{pS}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = m \vec{r}_S \times \vec{v}_S + m \vec{r}_S \times \left(\vec{\omega} \times \left(\vec{r}_{CM\,S}\right)\right) + m \left(\vec{r}_{CM\,S}\right) \times \vec{v}_S + \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{pS} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{pS}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = m \vec{r}_S \times \vec{v}_S + m \vec{r}_S \times \left(\vec{\omega} \times \left(\vec{r}_{CM} - \vec{r}_S\right)\right) + m \left(\vec{r}_{CM} - \vec{r}_S\right) \times \vec{v}_S + \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{pS} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{pS}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = m \vec{r}_S \times \vec{v}_S + m \vec{r}_S \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{CM}\right) - m \vec{r}_S \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_S\right) + m \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_S - m \vec{r}_S \times \vec{v}_S + \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{pS} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{pS}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = m \vec{r}_S \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{CM}\right) - m \vec{r}_S \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_S\right) + m \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_S + \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{pS} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{pS}\right)$$ (Retirer ter. $m \vec{r}_S \times \vec{v}_S$)

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = m \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_S + \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{pS} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{pS}\right) + m \vec{r}_S \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{CM}\right) - m \vec{r}_S \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_S\right)$$ (Réorganisation)

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = m \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_S + \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{pS} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{pS}\right) + m \vec{r}_S \times \left(\vec{\omega} \times \left(\vec{r}_S + \vec{r}_{CM\,S}\right)\right) - m \vec{r}_S \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_S\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L} = m \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_S + \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{pS} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{pS}\right) + m \vec{r}_S \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_S\right) + m \vec{r}_S \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{CM\,S}\right) - m \vec{r}_S \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_S\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{L} = m \vec{r}_{CM} \times \vec{v}_S + \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{pS} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{pS}\right) + m \vec{r}_S \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{CM\,S}\right)}$$

Nous pouvons interpréter le 1[er] terme de $\vec{L}$ que l'on identifiera $\vec{L}_1$ tel que

$$\vec{L}_1 = m\,\vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \vec{v}_{\mathrm{S}}$$

comme étant le <u>moment cinétique de la masse totale</u> du corps rigide <u>autour du centre de masse</u> du corps rigide selon $\mathrm{O}xyz$.

Nous allons maintenant développer le 2[e] terme de $\vec{L}$ que l'on identifiera comme $\vec{L}_2$:

$$\vec{L}_2 = \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{p\mathrm{S}} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{p\mathrm{S}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_2 = \sum_{p=1}^{N} m_p \left(\vec{\omega}\left(\vec{r}_{p\mathrm{S}} \cdot \vec{r}_{p\mathrm{S}}\right) - \vec{r}_{p\mathrm{S}}\left(\vec{r}_{p\mathrm{S}} \cdot \vec{\omega}\right)\right) \qquad \vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{A}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{A}\right) - \vec{A}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_2 = \sum_{p=1}^{N} m_p \left(\left({r_{xp\mathrm{S}}}^2 + {r_{yp\mathrm{S}}}^2 + {r_{zp\mathrm{S}}}^2\right)\vec{\omega} - \left(r_{xp\mathrm{S}}\omega_x + r_{yp\mathrm{S}}\omega_y + r_{zp\mathrm{S}}\omega_z\right)\vec{r}_{p\mathrm{S}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_2 = \sum_{p=1}^{N} m_p \begin{pmatrix} \left({r_{xp\mathrm{S}}}^2 + {r_{yp\mathrm{S}}}^2 + {r_{zp\mathrm{S}}}^2\right)\omega_x \vec{i} - \left(r_{xp\mathrm{S}}\omega_x + r_{yp\mathrm{S}}\omega_y + r_{zp\mathrm{S}}\omega_z\right) r_{xp\mathrm{S}} \vec{i} \\ + \left({r_{xp\mathrm{S}}}^2 + {r_{yp\mathrm{S}}}^2 + {r_{zp\mathrm{S}}}^2\right)\omega_y \vec{j} - \left(r_{xp\mathrm{S}}\omega_x + r_{yp\mathrm{S}}\omega_y + r_{zp\mathrm{S}}\omega_z\right) r_{yp\mathrm{S}} \vec{j} \\ + \left({r_{xp\mathrm{S}}}^2 + {r_{yp\mathrm{S}}}^2 + {r_{zp\mathrm{S}}}^2\right)\omega_z \vec{k} - \left(r_{xp\mathrm{S}}\omega_x + r_{yp\mathrm{S}}\omega_y + r_{zp\mathrm{S}}\omega_z\right) r_{zp\mathrm{S}} \vec{k} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_2 = \sum_{p=1}^{N} m_p \begin{pmatrix} \left({r_{xp\mathrm{S}}}^2 + {r_{yp\mathrm{S}}}^2 + {r_{zp\mathrm{S}}}^2\right)\omega_x \vec{i} - \left({r_{xp\mathrm{S}}}^2\omega_x + r_{xp\mathrm{S}} r_{yp\mathrm{S}}\omega_y + r_{xp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}}\omega_z\right)\vec{i} \\ + \left({r_{xp\mathrm{S}}}^2 + {r_{yp\mathrm{S}}}^2 + {r_{zp\mathrm{S}}}^2\right)\omega_y \vec{j} - \left(r_{xp\mathrm{S}} r_{yp\mathrm{S}}\omega_x + {r_{yp\mathrm{S}}}^2\omega_y + r_{yp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}}\omega_z\right) j \\ + \left({r_{xp\mathrm{S}}}^2 + {r_{yp\mathrm{S}}}^2 + {r_{zp\mathrm{S}}}^2\right)\omega_z \vec{k} - \left(r_{xp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}}\omega_x + r_{yp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}}\omega_y + {r_{zp\mathrm{S}}}^2\omega_z\right)\vec{k} \end{pmatrix} \qquad \text{(Distribuer)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_2 = \sum_{p=1}^{N} m_p \begin{pmatrix} \left({r_{yp\mathrm{S}}}^2 + {r_{zp\mathrm{S}}}^2\right)\omega_x \vec{i} - \left(r_{xp\mathrm{S}} r_{yp\mathrm{S}}\omega_y + r_{xp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}}\omega_z\right)\vec{i} \\ + \left({r_{xp\mathrm{S}}}^2 + {r_{zp\mathrm{S}}}^2\right)\omega_y \vec{j} - \left(r_{xp\mathrm{S}} r_{yp\mathrm{S}}\omega_x + r_{yp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}}\omega_z\right) j \\ + \left({r_{xp\mathrm{S}}}^2 + {r_{yp\mathrm{S}}}^2\right)\omega_z \vec{k} - \left(r_{xp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}}\omega_x + r_{yp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}}\omega_y\right)\vec{k} \end{pmatrix} \qquad \text{(Simplifier terme)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_2 = \sum_{p=1}^{N} m_p \begin{pmatrix} \left(\left({r_{yp\mathrm{S}}}^2 + {r_{zp\mathrm{S}}}^2\right)\omega_x - r_{xp\mathrm{S}} r_{yp\mathrm{S}}\omega_y - r_{xp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}}\omega_z\right)\vec{i} \\ + \left(\left({r_{xp\mathrm{S}}}^2 + {r_{zp\mathrm{S}}}^2\right)\omega_y - r_{xp\mathrm{S}} r_{yp\mathrm{S}}\omega_x - r_{yp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}}\omega_z\right)\vec{j} \\ + \left(\left({r_{xp\mathrm{S}}}^2 + {r_{yp\mathrm{S}}}^2\right)\omega_z - r_{xp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}}\omega_x - r_{yp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}}\omega_y\right)\vec{k} \end{pmatrix} \qquad \text{(Factoriser)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_2 = \sum_{p=1}^{N} m_p \begin{pmatrix} \left(\left({r_{yp\mathrm{S}}}^2 + {r_{zp\mathrm{S}}}^2\right)\omega_x - r_{xp\mathrm{S}} r_{yp\mathrm{S}}\omega_y - r_{xp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}}\omega_z\right)\vec{i} \\ - r_{xp\mathrm{S}} r_{yp\mathrm{S}}\omega_x + \left(\left({r_{xp\mathrm{S}}}^2 + {r_{zp\mathrm{S}}}^2\right)\omega_y - r_{yp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}}\omega_z\right)\vec{j} \\ - r_{xp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}}\omega_x - r_{yp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}}\omega_y + \left(\left({r_{xp\mathrm{S}}}^2 + {r_{yp\mathrm{S}}}^2\right)\omega_z\right)\vec{k} \end{pmatrix} \qquad \text{(Réorganisation)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_2 = \sum_{p=1}^{N} m_p \begin{pmatrix} {r_{yp\mathrm{S}}}^2 + {r_{zp\mathrm{S}}}^2 & -r_{xp\mathrm{S}} r_{yp\mathrm{S}} & -r_{xp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}} \\ -r_{xp\mathrm{S}} r_{yp\mathrm{S}}\omega_x & {r_{xp\mathrm{S}}}^2 + {r_{zp\mathrm{S}}}^2 & -r_{yp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}}\omega_z \\ -r_{xp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}} & -r_{yp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}} & {r_{xp\mathrm{S}}}^2 + {r_{yp\mathrm{S}}}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \qquad \text{(Calcul en matrice)}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{L}_2 = \left[\sum_{p=1}^{N} m_p \begin{pmatrix} r_{yp\mathrm{S}}{}^2 + r_{zp\mathrm{S}}{}^2 & -r_{xp\mathrm{S}} r_{yp\mathrm{S}} & -r_{xp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}} \\ -r_{xp\mathrm{S}} r_{yp\mathrm{S}} \omega_x & r_{xp\mathrm{S}}{}^2 + r_{zp\mathrm{S}}{}^2 & -r_{yp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}} \omega_z \\ -r_{xp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}} & -r_{yp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}} & r_{xp\mathrm{S}}{}^2 + r_{yp\mathrm{S}}{}^2 \end{pmatrix}\right] \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \qquad \text{(Isoler constante } \vec{\omega}\text{)}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{L}_2 = I_\mathrm{S} \vec{\omega} \qquad \text{où} \qquad I_\mathrm{S} = \sum_{p=1}^{N} m_p \begin{pmatrix} r_{yp\mathrm{S}}{}^2 + r_{zp\mathrm{S}}{}^2 & -r_{xp\mathrm{S}} r_{yp\mathrm{S}} & -r_{xp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}} \\ -r_{xp\mathrm{S}} r_{yp\mathrm{S}} \omega_x & r_{xp\mathrm{S}}{}^2 + r_{zp\mathrm{S}}{}^2 & -r_{yp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}} \omega_z \\ -r_{xp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}} & -r_{yp\mathrm{S}} r_{zp\mathrm{S}} & r_{xp\mathrm{S}}{}^2 + r_{yp\mathrm{S}}{}^2 \end{pmatrix}$$

Le terme

$$\vec{L}_2 = \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{p/\mathrm{S}} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{p/\mathrm{S}}\right) = I_\mathrm{S} \vec{\omega}$$

représente le <u>moment cinétique de rotation</u> du corps rigide <u>autour de l'axe S</u> selon $\mathrm{O}xyz$.

Nous allons maintenant développer le 3e terme en sommation que l'on identifiera comme $\vec{L}_3$:

$$\vec{L}_3 = m\,\vec{r}_\mathrm{S} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_\mathrm{CMS}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{L}_3 = m\left(\vec{\omega}\left(\vec{r}_\mathrm{S} \cdot \vec{r}_\mathrm{CMS}\right) - \vec{r}_\mathrm{CMS}\left(\vec{r}_\mathrm{S} \cdot \vec{\omega}\right)\right) \qquad \vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A} \cdot \vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A} \cdot \vec{B}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{L}_3 = m\left(\vec{\omega}\left(r_{x\mathrm{S}} r_{x\mathrm{CMS}} + r_{y\mathrm{S}} r_{y\mathrm{CMS}} + r_{z\mathrm{S}} r_{z\mathrm{CMS}}\right) - \vec{r}_\mathrm{CMS}\left(r_{x\mathrm{S}} \omega_x + r_{y\mathrm{S}} \omega_y + r_{z\mathrm{S}} \omega_z\right)\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{L}_3 = m \begin{pmatrix} \left(r_{x\mathrm{S}} r_{x\mathrm{CMS}} + r_{y\mathrm{S}} r_{y\mathrm{CMS}} + r_{z\mathrm{S}} r_{z\mathrm{CMS}}\right)\omega_x \vec{i} - \left(r_{x\mathrm{S}} \omega_x + r_{y\mathrm{S}} \omega_y + r_{z\mathrm{S}} \omega_z\right) r_{x\mathrm{CMS}} \vec{i} \\ \left(r_{x\mathrm{S}} r_{x\mathrm{CMS}} + r_{y\mathrm{S}} r_{y\mathrm{CMS}} + r_{z\mathrm{S}} r_{z\mathrm{CMS}}\right)\omega_y \vec{j} - \left(r_{x\mathrm{S}} \omega_x + r_{y\mathrm{S}} \omega_y + r_{z\mathrm{S}} \omega_z\right) r_{y\mathrm{CMS}} \vec{j} \\ \left(r_{x\mathrm{S}} r_{x\mathrm{CMS}} + r_{y\mathrm{S}} r_{y\mathrm{CMS}} + r_{z\mathrm{S}} r_{z\mathrm{CMS}}\right)\omega_z \vec{k} - \left(r_{x\mathrm{S}} \omega_x + r_{y\mathrm{S}} \omega_y + r_{z\mathrm{S}} \omega_z\right) r_{z\mathrm{CMS}} \vec{k} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{L}_3 = m \begin{pmatrix} \left(r_{y\mathrm{S}} r_{y\mathrm{CMS}} + r_{z\mathrm{S}} r_{z\mathrm{CMS}}\right)\omega_x \vec{i} - \left(r_{y\mathrm{S}} \omega_y + r_{z\mathrm{S}} \omega_z\right) r_{x\mathrm{CMS}} \vec{i} \\ \left(r_{x\mathrm{S}} r_{x\mathrm{CMS}} + r_{z\mathrm{S}} r_{z\mathrm{CMS}}\right)\omega_y \vec{j} - \left(r_{x\mathrm{S}} \omega_x + r_{z\mathrm{S}} \omega_z\right) r_{y\mathrm{CMS}} \vec{j} \\ \left(r_{x\mathrm{S}} r_{x\mathrm{CMS}} + r_{y\mathrm{S}} r_{y\mathrm{CMS}}\right)\omega_z \vec{k} - \left(r_{x\mathrm{S}} \omega_x + r_{y\mathrm{S}} \omega_y\right) r_{z\mathrm{CMS}} \vec{k} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{L}_3 = m \begin{pmatrix} \left(\left(r_{y\mathrm{S}} r_{y\mathrm{CMS}} + r_{z\mathrm{S}} r_{z\mathrm{CMS}}\right)\omega_x - r_{x\mathrm{CMS}} r_{y\mathrm{S}} \omega_y - r_{x\mathrm{CMS}} r_{z\mathrm{S}} \omega_z\right)\vec{i} \\ \left(\left(r_{x\mathrm{S}} r_{x\mathrm{CMS}} + r_{z\mathrm{S}} r_{z\mathrm{CMS}}\right)\omega_y - r_{x\mathrm{S}} r_{y\mathrm{CMS}} \omega_x - r_{y\mathrm{CMS}} r_{z\mathrm{S}} \omega_z\right)\vec{j} \\ \left(\left(r_{x\mathrm{S}} r_{x\mathrm{CMS}} + r_{y\mathrm{S}} r_{y\mathrm{CMS}}\right)\omega_z - r_{x\mathrm{S}} r_{z\mathrm{CMS}} \omega_x - r_{y\mathrm{S}} r_{z\mathrm{CMS}} \omega_y\right)\vec{k} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{L}_3 = m \begin{pmatrix} \left(\left(r_{y\mathrm{S}} r_{y\mathrm{CMS}} + r_{z\mathrm{S}} r_{z\mathrm{CMS}}\right)\omega_x - r_{x\mathrm{CMS}} r_{y\mathrm{S}} \omega_y - r_{x\mathrm{CMS}} r_{z\mathrm{S}} \omega_z\right)\vec{i} \\ -r_{x\mathrm{S}} r_{y\mathrm{CMS}} \omega_x + \left(\left(r_{x\mathrm{S}} r_{x\mathrm{CMS}} + r_{z\mathrm{S}} r_{z\mathrm{CMS}}\right)\omega_y - r_{y\mathrm{CMS}} r_{z\mathrm{S}} \omega_z\right)\vec{j} \\ \left(-r_{x\mathrm{S}} r_{z\mathrm{CMS}} \omega_x - r_{y\mathrm{S}} r_{z\mathrm{CMS}} \omega_y + \left(r_{x\mathrm{S}} r_{x\mathrm{CMS}} + r_{y\mathrm{S}} r_{y\mathrm{CMS}}\right)\omega_z\right)\vec{k} \end{pmatrix} \qquad \text{(Réorganiser)}$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{L}_3 = m \begin{pmatrix} r_{y\mathrm{S}} r_{y\mathrm{CMS}} + r_{z\mathrm{S}} r_{z\mathrm{CMS}} & -r_{x\mathrm{CMS}} r_{y\mathrm{S}} & -r_{x\mathrm{CMS}} r_{z\mathrm{S}} \\ -r_{x\mathrm{S}} r_{y\mathrm{CMS}} & r_{x\mathrm{S}} r_{x\mathrm{CMS}} + r_{z\mathrm{S}} r_{z\mathrm{CMS}} & -r_{y\mathrm{CMS}} r_{z\mathrm{S}} \\ -r_{x\mathrm{S}} r_{z\mathrm{CMS}} & -r_{y\mathrm{S}} r_{z\mathrm{CMS}} & r_{x\mathrm{S}} r_{x\mathrm{CMS}} + r_{y\mathrm{S}} r_{y\mathrm{CMS}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \qquad \text{(En matrice)}$$

Pour simplifier l'écriture de notre matrice, nous allons introduire le calcul

$$\vec{r}_S \cdot \vec{r}_{CMS} = r_{xS} r_{xCMS} + r_{yS} r_{yCMS} + r_{zS} r_{zCMS}$$

à notre matrice ce qui va simplifier notre expression :

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_3 = m \begin{pmatrix} \vec{r}_S \cdot \vec{r}_{CMS} - r_{xS} r_{xCMS} & -r_{xCMS} r_{yS} & -r_{xCMS} r_{zS} \\ -r_{xS} r_{yCMS} & \vec{r}_S \cdot \vec{r}_{CMS} - r_{yS} r_{yCMS} & -r_{yCMS} r_{zS} \\ -r_{xS} r_{zCMS} & -r_{yS} r_{zCMS} & \vec{r}_S \cdot \vec{r}_{CMS} - r_{zS} r_{zCMS} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_3 = m \left[\begin{pmatrix} \vec{r}_S \cdot \vec{r}_{CMS} & 0 & 0 \\ 0 & \vec{r}_S \cdot \vec{r}_{CMS} & 0 \\ 0 & 0 & \vec{r}_S \cdot \vec{r}_{CMS} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r_{xS} r_{xCMS} & -r_{xCMS} r_{yS} & -r_{xCMS} r_{zS} \\ -r_{xS} r_{yCMS} & -r_{yS} r_{yCMS} & -r_{yCMS} r_{zS} \\ -r_{xS} r_{zCMS} & -r_{yS} r_{zCMS} & -r_{zS} r_{zCMS} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_3 = m \left[\vec{r}_S \cdot \vec{r}_{CMS} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_{xS} r_{xCMS} & r_{xCMS} r_{yS} & r_{xCMS} r_{zS} \\ r_{xS} r_{yCMS} & r_{yS} r_{yCMS} & r_{yCMS} r_{zS} \\ r_{xS} r_{zCMS} & r_{yS} r_{zCMS} & r_{zS} r_{zCMS} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_3 = m \left[\vec{r}_S \cdot \vec{r}_{CMS} \, I_3 - \begin{pmatrix} r_{xS} r_{xCMS} & r_{xCMS} r_{yS} & r_{xCMS} r_{zS} \\ r_{xS} r_{yCMS} & r_{yS} r_{yCMS} & r_{yCMS} r_{zS} \\ r_{xS} r_{zCMS} & r_{yS} r_{zCMS} & r_{zS} r_{zCMS} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \qquad \left(I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_3 = m \left[\vec{r}_S \cdot \vec{r}_{CMS} \, I_3 - \begin{pmatrix} r_{xCMS} r_{xS} & r_{xCMS} r_{yS} & r_{xCMS} r_{zS} \\ r_{yCMS} r_{xS} & r_{yCMS} r_{yS} & r_{yCMS} r_{zS} \\ r_{zCMS} r_{xS} & r_{zCMS} r_{yS} & r_{zCMS} r_{zS} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \qquad \text{(Réordonner, ligne-colonne)}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_3 = m \left[\vec{r}_{CMS} \cdot \vec{r}_S \, I_3 - \begin{pmatrix} r_{xCMS} \\ r_{yCMS} \\ r_{zCMS} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{xS} & r_{yS} & r_{zS} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_3 = m \left(\vec{r}_{CMS} \cdot \vec{r}_S \, I_3 - \vec{r}_{CMS} \vec{r}_S^{\,T} \right) \vec{\omega} \qquad \text{où} \qquad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{L}_3 = U_{CMS-S} \, \vec{\omega} \qquad \text{où} \qquad U_{CMS-S} = m \left(\vec{r}_{CMS} \cdot \vec{r}_S \, I_3 - \vec{r}_{CMS} \vec{r}_S^{\,T} \right)$$

Le terme

$$\vec{L}_3 = m \, \vec{r}_S \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{CM/S} \right) = U_{CM/S-S} \, \vec{\omega}$$

correspond au <u>moment cinétique de révolution</u> du <u>centre de masse</u> calculé <u>autour du point de référence S</u> selon Oxyz.

En remplaçant $\vec{L}_1$, $\vec{L}_2$ et $\vec{L}_3$ dans notre expression de $\vec{L}$, nous obtenons l'équation générale suivante :

$$\begin{aligned}\vec{L} &= m\,\vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \vec{v}_{\mathrm{S}} + I_{\mathrm{S}}\,\vec{\omega} + m\,\vec{r}_{\mathrm{S}} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}}\right) \\ &= m\,\vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \vec{v}_{\mathrm{S}} + \left(I_{\mathrm{S}} + U_{\mathrm{CM/S-S}}\right)\vec{\omega}\end{aligned} \quad \blacksquare \ (2)$$

(cas général)

- Si la position du point de référence $\vec{r}_{\mathrm{S}}$ est située à la position du centre de masse $\vec{r}_{\mathrm{CM}}$ tel que $\vec{r}_{\mathrm{S}} = \vec{r}_{\mathrm{CM}}$, alors $\vec{r}_{\mathrm{CM/S}} = \vec{r}_{\mathrm{CM/CM}} = 0$ ce qui nous permet de déduire que $\vec{L}_3 = m\,\vec{r}_{\mathrm{S}} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}}\right) = 0$. De plus, nous aurons $I_{\mathrm{S}} \equiv I_{\mathrm{CM}}$ ce qui réduit l'expression de $\vec{L}$ à l'équation suivante :

$$L = m\,\vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \vec{v}_{\mathrm{CM}} + I_{\mathrm{CM}}\,\vec{\omega} \quad \blacksquare \ (3)$$

(cas de la rotation autour du centre de masse)

- Si $\vec{v}_{\mathrm{S}} = 0$ et $\vec{r}_{\mathrm{S}} = 0$, alors $\vec{L}_1 = m\,\vec{r}_{\mathrm{CM}} \times \vec{v}_{\mathrm{S}} = 0$ et $\vec{L}_3 = m\,\vec{r}_{\mathrm{S}} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}}\right) = 0$. L'expression du moment d'inertie I_{S} passera à la définition I, car $\vec{r}_{\mathrm{S}} = 0$ correspondra à l'origine de $\mathrm{O}xyz$. Ces deux conditions réduit alors l'expression de $\vec{L}$ à l'équation

$$\vec{L} = I\,\vec{\omega} \quad \blacksquare \ (1)$$

(cas de la rotation pure du corps rigide)

Le tenseur U

Dans la démonstration du moment cinétique, nous avons obtenu un nouveau tenseur

$$U_{\text{CM/S-S}} = U\left(\vec{r}_{\text{CM/S}}, \vec{r}_{\text{S}}\right) = m\left(\vec{r}_{\text{CM/S}} \cdot \vec{r}_{\text{S}}\, I_3 - \vec{r}_{\text{CM/S}}\, \vec{r}_{\text{S}}^{\,T}\right) \quad \text{où} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Il a été obtenu à l'aide de l'expression

$$m\,\vec{r}_{\text{S}} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{CM/S}}\right) = U_{\text{CM/S-S}}\, \vec{\omega} \quad .$$

(On remarque l'ordre inversé des indices désignant l'ordre de priorité du produit vectoriel.)

La dérivée de $U_{\text{CM/S-S}}$ par rapport au temps t donnera l'expression suivante :

$$\frac{\mathrm{d}U_{\text{CM/S-S}}}{\mathrm{d}t} = m\left(\left(\vec{v}_{\text{CM/S}} \cdot \vec{r}_{\text{S}} + \vec{r}_{\text{CM/S}} \cdot \vec{v}_{\text{S}}\right) I_3 - \vec{v}_{\text{CM/S}} \vec{r}_{\text{S}}^{\,T} - \vec{r}_{\text{CM/S}}\, \vec{v}_{\text{S}}^{\,T}\right)$$

<u>Preuve :</u>

$$\frac{\mathrm{d}U_{\text{CM/S-S}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(m\left(\vec{r}_{\text{CM/S}} \cdot \vec{r}_{\text{S}}\, I_3 - \vec{r}_{\text{CM/S}} \vec{r}_{\text{S}}^{\,T}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}U_{\text{CM/S-S}}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}_{\text{CM/S}} \cdot \vec{r}_{\text{S}}\, I_3 - \vec{r}_{\text{CM/S}} \vec{r}_{\text{S}}^{\,T}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}U_{\text{CM/S-S}}}{\mathrm{d}t} = m\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}_{\text{CM/S}} \cdot \vec{r}_{\text{S}}\, I_3\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r}_{\text{CM/S}} \vec{r}_{\text{S}}^{\,T}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}U_{\text{CM/S-S}}}{\mathrm{d}t} = m\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\text{CM/S}}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{r}_{\text{S}}\, I_3 + \vec{r}_{\text{CM/S}} \cdot \frac{\mathrm{d}\left(\vec{r}_{\text{S}}\, I_3\right)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\text{CM/S}}}{\mathrm{d}t} \vec{r}_{\text{S}}^{\,T} - \vec{r}_{\text{CM/S}} \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\text{S}}^{\,T}}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}U_{\text{CM/S-S}}}{\mathrm{d}t} = m\left(\frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\text{CM/S}}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{r}_{\text{S}}\, I_3 + \vec{r}_{\text{CM/S}} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\text{S}}}{\mathrm{d}t} I_3 - \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\text{CM/S}}}{\mathrm{d}t} \vec{r}_{\text{S}}^{\,T} - \vec{r}_{\text{CM/S}} \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\text{S}}^{\,T}}{\mathrm{d}t}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}U_{\text{CM/S-S}}}{\mathrm{d}t} = m\left(\vec{v}_{\text{CM/S}} \cdot \vec{r}_{\text{S}}\, I_3 + \vec{r}_{\text{CM/S}} \cdot \vec{v}_{\text{S}} I_3 - \vec{v}_{\text{CM/S}} \vec{r}_{\text{S}}^{\,T} - \vec{r}_{\text{CM/S}} \vec{v}_{\text{S}}^{\,T}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}U_{\text{CM/S-S}}}{\mathrm{d}t} = m\left(\left(\vec{v}_{\text{CM/S}} \cdot \vec{r}_{\text{S}} + \vec{r}_{\text{CM/S}} \cdot \vec{v}_{\text{S}}\right) I_3 - \vec{v}_{\text{CM/S}} \vec{r}_{\text{S}}^{\,T} - \vec{r}_{\text{CM/S}} \vec{v}_{\text{S}}^{\,T}\right) \ \blacksquare$$

L'énergie cinétique d'un corps rigide

L'énergie cinétique d'un corps rigide constitué de *N* particules est égal à la somme de tous les énergies cinétiques des *N* particules positionnées par rapport à $Oxyz$ selon l'expression

$$K = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{2} m_p v_p^{\,2} \quad .$$

On peut toutefois comptabiliser l'énergie cinétique K du corps rigide à l'aide des différents paramètres décrivant le corps rigide. Une expression générale peut être simplifiée en fonction du choix du point de référence S utilisé pour décrire le mouvement du corps rigide et du contexte du mouvement à décrire :

Point de référence S du corps rigide immobile et situé à l'origine de $Oxyz$ (rotation pure du corps rigide dont la rotation du centre de masse autour de l'origine)	Point de référence S du corps rigide quelconque en mouvement selon $Oxyz$ (rotation du centre de masse autour du point de référence S en mouvement selon O)	Point de référence S du corps rigide situé sur le centre de masse du corps rigide selon $Oxyz$ (translation du centre de masse et rotation du corps rigide autour du centre de masse)
Exemple : Ouverture d'une porte en rotation autour de la charnière (la charnière est la position du point de référence S)	Exemple : Mouvement d'un avant-bras en rotation autour du coude où celui-ci est en mouvement (le coude est la position du point de référence S)	Exemple : Lancer un ballon en l'air avec rotation. (le centre du ballon est la position du point de référence S)
$K = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot I\,\vec{\omega}$ ($\vec{r}_S = \vec{v}_S = 0$)	$K = \frac{1}{2} m \vec{v}_S \cdot \vec{v}_{CM} + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\left(\vec{r}_{CM/S} \times \vec{v}_S\right) + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot I_S\,\vec{\omega}$ (cas générale)	$K = \frac{1}{2} m v_{CM}^{\,2} + \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot I_{CM}\,\vec{\omega}$ ($\vec{r}_S = \vec{r}_{CM}$)

Preuve :

Développons l'expression de l'énergie cinétique de nos *N* particules appartenant à notre système du corps rigide :

$$K = \sum_{p=1}^{N} \frac{1}{2} m_p v_p^{\,2}$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N} m_p \vec{v}_p \cdot \vec{v}_p \qquad (v_p^{\,2} = \sqrt{\vec{v}_p \cdot \vec{v}_p})$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N} \vec{v}_p \cdot m_p \vec{v}_p \qquad \text{(Commutativité du produit scalaire)}$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N} \left(\vec{v}_S + \vec{\omega}\times\vec{r}_{p/S}\right)\cdot m_p \vec{v}_p \qquad (\vec{v}_p = \vec{v}_S + \vec{\omega}\times\vec{r}_{p/S})$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N} \left(\vec{v}_S \cdot m_p \vec{v}_p\right) + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N} \left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{p/S} \cdot m_p \vec{v}_p\right)$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}\vec{v}_S \cdot \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{v}_p + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N} m_p \left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{p/S}\right)\cdot \vec{v}_p$$

En exploitant l'expression de la vitesse du centre de masse

$$\vec{v}_{\mathrm{CM}} = \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{N} m_p \vec{v}_p \quad ,$$

nous pouvons continuer de simplifier notre expression :

$$K = \frac{1}{2}\vec{v}_{\mathrm{S}} \cdot (m\vec{v}_{\mathrm{CM}}) + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N} m_p (\vec{\omega}\times\vec{r}_{p/\mathrm{S}}) \cdot \vec{v}_p \qquad \text{(Remplacer } m\vec{v}_{\mathrm{CM}} = \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{v}_p \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}m\vec{v}_{\mathrm{S}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N} m_p (\vec{\omega}\times\vec{r}_{p/\mathrm{S}}) \cdot \vec{v}_p$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}m\vec{v}_{\mathrm{S}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N} m_p \vec{v}_p \cdot (\vec{\omega}\times\vec{r}_{p/\mathrm{S}}) \qquad \text{(Produit scalaire commutatif)}$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}m\vec{v}_{\mathrm{S}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \frac{1}{2}\sum_{p=1}^{N} m_p \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_{p/\mathrm{S}} \times \vec{v}_p) \qquad (\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}))$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}m\vec{v}_{\mathrm{S}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \sum_{p=1}^{N} m_p (\vec{r}_{p/\mathrm{S}} \times \vec{v}_p)$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}m\vec{v}_{\mathrm{S}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \sum_{p=1}^{N} m_p (\vec{r}_{p/\mathrm{S}} \times (\vec{v}_{\mathrm{S}} + \vec{\omega}\times\vec{r}_{p/\mathrm{S}})) \qquad (\vec{v}_p = \vec{v}_{\mathrm{S}} + \vec{\omega}\times\vec{r}_{p/\mathrm{S}})$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}m\vec{v}_{\mathrm{S}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \sum_{p=1}^{N} m_p (\vec{r}_{p/\mathrm{S}} \times \vec{v}_{\mathrm{S}}) + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \sum_{p=1}^{N} m_p (\vec{r}_{p/\mathrm{S}} \times \vec{\omega}\times\vec{r}_{p/\mathrm{S}})$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}m\vec{v}_{\mathrm{S}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \left(\sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{p/\mathrm{S}}\right) \times \vec{v}_{\mathrm{S}} + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \sum_{p=1}^{N} m_p (\vec{r}_{p/\mathrm{S}} \times \vec{\omega}\times\vec{r}_{p/\mathrm{S}})$$

Avec la relation $\vec{r}_{\mathrm{CM/S}} = \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{p/\mathrm{S}}$ réécrite sous la forme $m\vec{r}_{\mathrm{CM/S}} = \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{p/\mathrm{S}}$, nous pouvons simplifier notre expression sous la forme

$$K = \frac{1}{2}m\vec{v}_{\mathrm{S}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_{\mathrm{CM/S}} \times \vec{v}_{\mathrm{S}}) + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \sum_{p=1}^{N} m_p (\vec{r}_{p/\mathrm{S}} \times \vec{\omega}\times\vec{r}_{p/\mathrm{S}}) \quad .$$

Avec $\vec{L}_2 = \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{p/\mathrm{S}} \times (\vec{\omega}\times\vec{r}_{p/\mathrm{S}}) = I_{\mathrm{S}}\vec{\omega}$, nous pouvons simplifier à nouveau notre équation de l'énergie cinétique et obtenir l'expression

$$K = \frac{1}{2}m\vec{v}_{\mathrm{S}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{CM}} + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot (\vec{r}_{\mathrm{CM/S}} \times \vec{v}_{\mathrm{S}}) + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot I_{\mathrm{S}}\,\vec{\omega} \quad \blacksquare \text{ (2)}$$

(cas général)

Le terme

$$K = \frac{1}{2} m \vec{v}_{\mathrm{S}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{CM}}$$

représente l'énergie cinétique de translation de la combinaison point de référence S et centre de masse du corps rigide de masse *m*.

Le terme

$$\frac{1}{2} m \vec{\omega} \cdot \left(\vec{r}_{\mathrm{CM/S}} \times \vec{v}_{\mathrm{S}} \right)$$

représente l'énergie cinétique de rotation du centre de masse autour du point de référence S. On retrouve une référence à des mètres dans $\vec{r}_{\mathrm{CM/S}}$ et $\vec{v}_{\mathrm{S}}$ pour forme de terme d'inertie en $[I] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2$ avec la masse *m* et une référence à la vitesse angulaire dans $\vec{v}_{\mathrm{S}}$ pour contribuer à $\vec{\omega}$ pour obtenir des unités de $[\omega^2] = \mathrm{rad}^2/\mathrm{s}^2$ et ainsi former un terme d'énergie $[K] = \frac{1}{2} \left(\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \right) \left(\mathrm{rad}^2/\mathrm{s}^2 \right)$

Le terme

$$\frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot I_{\mathrm{S}} \, \vec{\omega}$$

représente l'énergie cinétique de rotation de l'inertie du corps rigide (par l'expression du tenseur d'inertie) autour du point de référence.

- Si la position du point de référence $\vec{r}_{\mathrm{S}}$ est située à la position du centre de masse $\vec{r}_{\mathrm{CM}}$ tel que $\vec{r}_{\mathrm{S}} = \vec{r}_{\mathrm{CM}}$, alors $\vec{v}_{\mathrm{S}} = \vec{v}_{\mathrm{CM}} = 0$ et $\vec{r}_{\mathrm{CM/S}} = \vec{r}_{\mathrm{CM/CM}} = 0$ ce qui nous permet de déduire que $1/2 \, m \vec{\omega} \cdot \left(\vec{r}_{\mathrm{CM/S}} \times \vec{v}_{\mathrm{S}} \right) = 0$. De plus, nous aurons $I_{\mathrm{S}} \equiv I_{\mathrm{CM}}$ ce qui réduit l'expression de K à l'équation suivante :

$$K = \frac{1}{2} m \, v_{\mathrm{CM}}{}^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot I_{\mathrm{CM}} \, \vec{\omega} \quad \blacksquare \; (3)$$

(cas de la rotation autour du centre de masse)

- Si $\vec{r}_{\mathrm{S}} = 0$ et $\vec{v}_{\mathrm{S}} = 0$, alors $1/2 \, m \vec{v}_{\mathrm{S}} \cdot \vec{v}_{\mathrm{CM}} = 0$ et $1/2 \, m \vec{\omega} \cdot \left(\vec{r}_{\mathrm{CM/S}} \times \vec{v}_{\mathrm{S}} \right) = 0$. L'expression du moment d'inertie I_{S} passera à la définition I, car $\vec{r}_{\mathrm{S}} = 0$ correspondra à l'origine de $\mathrm{O}xyz$. Ces deux conditions réduit alors l'expression de K à l'équation

$$K = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot I \, \vec{\omega} \quad \blacksquare \; (1)$$

(cas de la rotation pure du corps rigide)