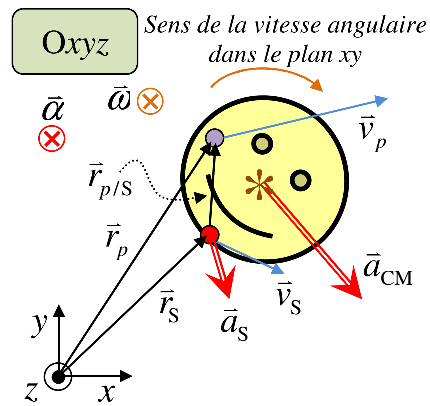
Chapitre 7.2 – La théorie du corps rigide : La cinématique

L'accélération du point de référence S du corps rigide

Afin d'évaluer l'évolution de la position $\vec{r}_{\mathrm{S}}$ et la vitesse $\vec{v}_{\mathrm{S}}$ du corps rigide, il nous faudra évaluer l'accélération $\vec{a}_{\mathrm{S}}$ du point de référence S autour duquel le corps rigide tourne. Puisque la dynamique nous permettra d'établir un lien entre la somme des forces ($\sum \vec{F}$) appliquée sur le corps rigide et l'accélération $\vec{a}_{\mathrm{CM}}$ du centre de masse du corps rigide, nous devrons utiliser l'expression suivante :



$$\vec{a}_{\mathrm{S}} = \vec{a}_{\mathrm{CM}} + \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} \times \vec{\alpha} - \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} \right)$$

$$\text{avec} \quad \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} = \vec{r}_{\mathrm{CM}} - \vec{r}_{\mathrm{S}}$$

où $\vec{a}_{\mathrm{S}}$: Accélération du point de référence S du corps rigide (m/s^2).
$\vec{a}_{\mathrm{CM}}$: Accélération du centre de masse du corps rigide (m/s^2).
$\vec{r}_{\mathrm{CM/S}}$: Position du centre de masse par rapport au point de référence S (m).
$\vec{\omega}$: Vitesse angulaire du corps rigide (rad/s).
$\vec{\alpha}$: Accélération angulaire du corps rigide (rad/s^2).

Preuve :

À partir de l'expression de la vitesse du centre de masse $\vec{v}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})} = \vec{v}_{\mathrm{CM}}$ dans le référentiel **O** décomposé en vitesse $\vec{v}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} = \vec{v}_{\mathrm{S}}$ du point de référence S et en vitesse relative $\vec{v}_{\mathrm{CM/S}}^{(\mathrm{O})} = \vec{v}_{\mathrm{CM/S}}$ du centre de masse par rapport au point de référence S, effectuons la dérivée par rapport au temps pour obtenir $\vec{a}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} = \vec{a}_{\mathrm{S}}$:

$$\vec{v}_{\mathrm{CM}} = \vec{v}_{\mathrm{S}} + \vec{v}_{\mathrm{CM/S}} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{\mathrm{CM}} = \vec{v}_{\mathrm{S}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{CM}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{v}_{\mathrm{S}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_{\mathrm{CM}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{v}_{\mathrm{S}} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_{\mathrm{CM}} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_{\mathrm{CM}} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} + \vec{\omega} \times \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{\mathrm{CM/S}}}{\mathrm{d}t}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_{\mathrm{CM}} = \vec{a}_{\mathrm{S}} + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} + \vec{\omega} \times \vec{v}_{\mathrm{CM/S}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_{\mathrm{CM}} = \vec{a}_{\mathrm{S}} + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_{\mathrm{S}} = \vec{a}_{\mathrm{CM}} - \vec{\alpha} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} - \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}_{\mathrm{S}} = \vec{a}_{\mathrm{CM}} + \vec{r}_{\mathrm{CM/S}} \times \vec{\alpha} - \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}}\right) \quad \blacksquare \quad (\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A})$$

Remarque : (rappel : $\vec{r}_{\mathrm{CM/S}} = \vec{r}_{\mathrm{CM}} - \vec{r}_{\mathrm{S}}$)

- Le terme $\vec{a}_{\mathrm{CM}}$ représente la portion d'accélération linéaire du point de référence S entrainé par l'accélération du centre de masse du corps rigide.
- Le terme $\vec{r}_{\mathrm{CM/S}} \times \vec{\alpha}$ représente l'accélération tangentielle du centre de masse par rapport au point de référence S.
- Le terme $-\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}_{\mathrm{CM/S}}\right)$ représente l'accélération centrifuge du centre de masse par rapport au point de référence S. L'accélération pointe de S vers CM ce qui invite le centre de masse à s'éloigne du point de référence S.
- Il n'y a pas d'accélération de Coriolis, car la distance entre le point S et le centre de masse reste constant.

La cinématique du corps rigide

Pour évaluer la cinématique d'un corps rigide, il nous faut connaître à un instant t :

Les conditions initiales du mouvement de translation et rotation du corps rigide :

$\vec{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})}$: La position du centre de masse dans le référentiel **S** (m) (**constant dans le temps**).

$\vec{v}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})}$: La vitesse du point de référence S dans le référentiel **O** (m/s).

$\vec{\omega}^{(\mathrm{O})}$: La vitesse angulaire dans le référentiel **O** (rad/s).

$\vec{r}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})}$: La position du point de référence S dans le référentiel **O** (m).

$\hat{q}^{(\mathrm{O})}$: La rotation dans le référentiel **O** (rad).

La résolution des équations de la dynamique de translation et rotation du corps rigide :

$\vec{\alpha}^{(\mathrm{O})}$: L'accélération angulaire dans le référentiel **O** (rad/s^2).

$\vec{a}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})}$: L'accélération du centre de masse dans le référentiel **O** (m/s^2).

Par la suite, la résolution des équations du mouvement peuvent être très complexe puisque dans un cas quelconque, aucun paramètre sera constant dans le temps ce qui rend l'analyse analytique très complexe. Pour cette raison, nous prendrons une approche numérique où nous serons en mesure d'évaluer une position $\vec{r}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})}$ et une rotation $\hat{q}^{(\mathrm{O})}$ finale ainsi qu'une vitesse de translation $\vec{v}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})}$ et de rotation $\vec{\omega}^{(\mathrm{O})}$ finale engendrée par un écoulement de temps Δt très petit.

Voici la séquence proposée pour un écoulement de temps Δt :

1) Évaluer la position du centre de masse dans **O** à partir de sa position fixe dans S et la rotation $\hat{q}^{(\mathrm{O})}$:

$$\hat{r}_{\mathrm{CM/S}}^{(\mathrm{O})} = \hat{q}\,\hat{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})}\,\hat{q}^{*} \qquad \text{avec} \qquad \hat{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})} = \left(0,\, \vec{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})}\right) \;\text{ et }\; \hat{r}_{\mathrm{CM/S}}^{\mathrm{O}} = \left(0,\, \vec{r}_{\mathrm{CM/S}}\right)$$

Remarque : Avec la représentation matricielle du quaternion $\hat{q}^{(\mathrm{O})}$, nous pouvons également calculer $\hat{r}_{\mathrm{CM/S}}^{(\mathrm{O})}$ de la façon suivante :

$$\vec{r}_{\mathrm{CM/S}}^{(\mathrm{O})} = R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}}\,\vec{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})} \qquad \text{où} \qquad R_{\mathrm{S}\to\mathrm{O}} \text{ est obtenu à partir de } \hat{q}^{(\mathrm{O})}$$

2) Évaluer l'accélération du point de référence S dans **O** à partir de l'accélération $\vec{a}_{\text{CM}}$ du centre de masse :

$$\vec{a}_{\text{S}} = \vec{a}_{\text{CM}} + \vec{r}_{\text{CM/S}} \times \vec{\alpha} - \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{CM/S}}\right)$$

(Accélération du point de référence S dans **O**)

<u>Remarque :</u> Si $\vec{r}_{\text{S}}^{(\text{O})} = r_{\text{CM}}^{(\text{O})}$, alors $\vec{r}_{\text{CM}}^{(\text{S})} = 0$ ce qui mène à la conclusion que $\vec{a}_{\text{S}} = \vec{a}_{\text{CM}}$ et l'étape 1) et 2) n'est pas requise.

3) Évaluer la vitesse finale $\vec{v}_{\text{S}f}^{(\text{O})}$ du point de référence S dans **O** à l'aide de l'équation d'Euler du 1er ordre :

$$\vec{v}_{\text{S}f} = \vec{v}_{\text{S}i} + \vec{a}_{\text{S}} \Delta t$$

(Vitesse du point de référence S dans **O**)

4) Évaluer la position finale $\vec{r}_{\text{S}f}^{(\text{O})}$ du point de référence S dans **O** à l'aide de l'équation d'Euler du 2e ordre :

$$\vec{r}_{\text{S}f} = \vec{r}_{\text{S}i} + \vec{v}_{\text{S}i} \Delta t + \frac{1}{2} \vec{a}_{\text{S}} \left(\Delta t\right)^2$$

(Position du point de référence S dans **O**)

5) Évaluer la vitesse angulaire finale $\vec{\omega}_f^{(\text{O})}$ autour du point de référence S dans O à l'aide de l'équation d'Euler du 1er ordre :

$$\vec{\omega}_f = \vec{\omega}_i + \vec{\alpha} \Delta t$$

(Vitesse angulaire du corps rigide dans **O**)

6) Évaluer la rotation finale $\hat{q}^{(\text{O})}$ autour du point de référence S dans O à l'aide d'une équation du 1er ordre :

$$\vec{\omega}_f = \left(\omega_{xf}, \omega_{yf}, \omega_{zf}\right)$$

(obtenir les composantes de la vitesse angulaire finale)

$$\omega_f = \left\|\vec{\omega}_f\right\|$$

(obtenir le module de la vitesse angulaire finale)

$$\Delta\theta = \omega_f \Delta t \qquad \text{avec} \quad \left[\omega \Delta t\right] = \text{rad}$$

(évaluer l'angle de rotation a effectuer)

$$\hat{q}_{\Delta\theta} = \left(\cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right), \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)\frac{\omega_{xf}}{\omega_f}, \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)\frac{\omega_{yf}}{\omega_f}, \sin\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)\frac{\omega_{zf}}{\omega_f}\right)$$

(obtenir le quaternion de la rotation a effectuer et $\hat{q}_{\Delta\theta}$ sera normalisé)

$$\hat{q}_f = \hat{q}_{\omega} \hat{q}_i$$

(obtenir l'état de la rotation finale du corps rigide)

Pour obtenir une position $\vec{r}_{S}^{(O)}$ et une rotation $\hat{q}^{(O)}$ valide numériquement sur un grand intervalle de temps, il faudra répéter cette procédure sur un grand nombre d'itération en employant un temps qui tend vers zéro (méthode numérique itérative).