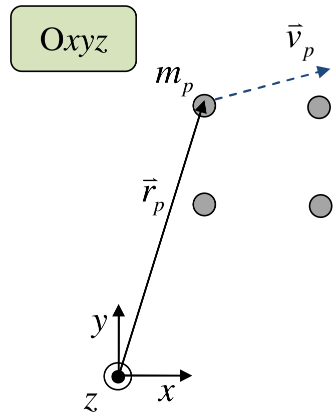
Chapitre 7.1 – La théorie du corps rigide

Un corps rigide

Un système de N particules de masse m_p est un regroupement de particule dont la masse totale est

$$m = \sum_{p=1}^{N} m_p \quad .$$

Dans un système de coordonnée Oxyz fixe (donc inertiel où la 2e loi de Newton est applicable sans force d'inertie), l'ensemble de ces particules peuvent être positionnées à l'aide d'un vecteur position $\vec{r}_p$ et se déplacer à l'aide d'un vecteur vitesse $\vec{v}_p$.

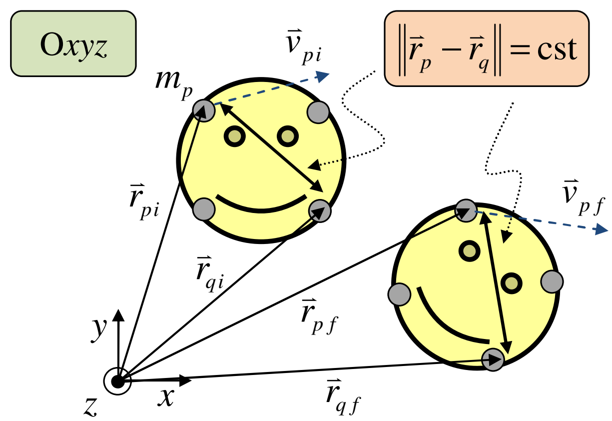


Système de particules localisé en Oxyz.

Pour que ce système de particules puisse représenter un corps rigide, il faut appliquer la contrainte suivante à l'ensemble des particules du système :

$$\left\| \vec{r}_p - \vec{r}_q \right\| = \text{constant} \ \forall \ p, q \in [1, N] \wedge q \neq p$$

Ainsi, peu importe le mouvement que va effectuer le corps rigide sous l'action des forces appliquées sur les particules du système, l'ensemble de ses particules qui le définit ne subiront <u>jamais de changement de distance entre elles</u>. Ainsi, les particules pourront effectuer des déplacements $\Delta\vec{r}_p$ et des changements de vitesse $\Delta\vec{v}_p$ sous <u>certaines contraintes</u>.



Déplacement d'un corps rigide composé de 4 particules.

Le rôle des forces interne du corps rigide

Au lieu de décrire le corps rigide à l'aide de N vecteurs position $\vec{r}_p$ et N vecteur vitesse $\vec{v}_p$ pour le mouvement de nos N particules ce qui ferait $2N$ paramètres et $3 \times 2N$ variables pour un <u>mouvement à trois dimensions</u>, nous exploiteront la contrainte

$$\left\| \vec{r}_p - \vec{r}_q \right\| = \text{constant} \ \forall \ p, q \in [1, N] \wedge q \neq p$$

pour réduire le nombre de variables requis pour bien localiser le corps rigide ainsi que ses particules qui le représente.

Cette affirmation sera possible puisque la structure rigide du corps rigide est possible grâce aux forces internes[1] au système tel que

$$\vec{F}_{qp} \equiv \vec{F}_{q\,\text{sur}\,p} \quad \text{et} \quad \vec{F}_{pq} \equiv F_{p\,\text{sur}\,q}$$

où $\vec{F}_{qp}$ est la force interne qu'applique la particule q sur la particule p et l'inverse pour la force interne $\vec{F}_{pq}$. Ces forces, malgré qu'elles soient très difficiles à évaluer et qu'elles varient dans le temps, seront rapidement écartées de notre analyse du corps rigide en dynamique (application de la 2e loi de Newton) par l'usage de la 3e loi de Newton ($\vec{F}_{qp} = -\vec{F}_{pq}$).

Ainsi, nous pourrons décrire notre corps rigide à l'aide de deux systèmes de coordonnées avec seulement **6 paramètres** et **26 variables** peu importent le nombre de particules du système.

Les systèmes de coordonnées

Voici les deux systèmes de coordonnées à exploiter pour décrire un corps rigide :

Système de coordonnées fixe :

$\mathrm{O}xyz$

(référentiel inertiel)

Système de coordonnée où le corps rigide est en translation et en rotation autour d'un point de référence S.

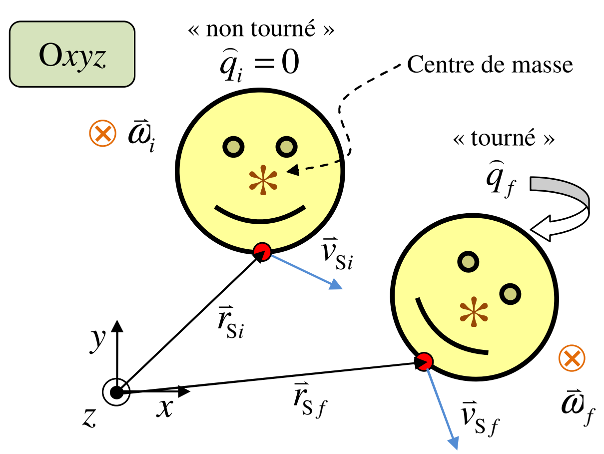
Le point de référence S peut être en mouvement selon $\mathrm{O}xyz$.

Système de coordonnées en rotation :

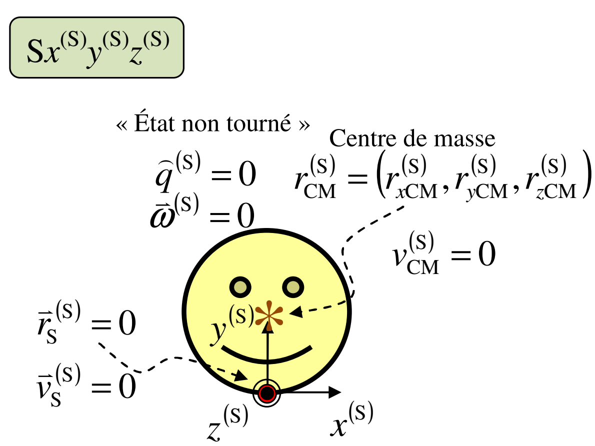
$\mathrm{S}x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$

(référentiel non-inertiel)

Système de coordonnée où le corps rigide est immobile. Par contre, ce système de coordonnée sera en rotation pure autour de son origine selon $\mathrm{O}xyz$ et sera localisé selon $\mathrm{O}xyz$ sur le point de référence S.



Déplacement d'un corps rigide en translation et en rotation selon *Oxyz*.



Corps rigide immobile selon $Sx^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$.

Remarque :

Les paramètres de translation $\vec{r}$ et $\vec{v}$ ainsi que les paramètres de rotation $\hat{q}$ et $\vec{\omega}$ vous seront présentés sous peu.

---

[1] La nature de la force est traditionnellement de nature électromagnétique à ce qui attrait à la force entre les atomes qui constitue un corps rigide. Les modules de ces forces ne seront pas nécessaires d'être évaluées en raison de notre stratégie de résolution de la 2e loi de Newton.

Les paramètres d'un corps rigide

Voici les différents paramètres qui seront exploité pour décrire le corps rigide dans l'espace et le temps :

<u>Masse du corps rigide :</u> m

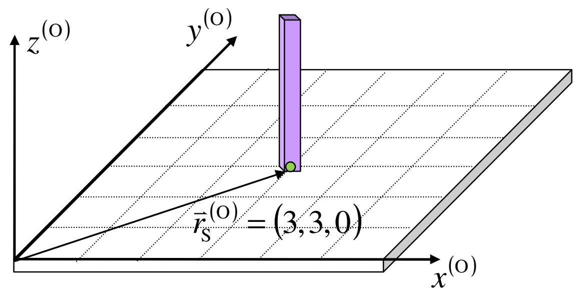
Ce paramètre permet de définir dans $\mathrm{O}xyz$ et $\mathrm{S}x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$ la masse totale du corps rigide. La masse totale sera <u>une constante</u> selon O et S.

Ce paramètre sera un scalaire positif : $m > 0$

<u>Position du corps rigide :</u> $\vec{r}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} \equiv \vec{r}_{\mathrm{S}}$

Ce paramètre permet de positionner dans $\mathrm{O}xyz$ le corps rigide. Cette position détermine la <u>position de référence</u> autour duquel le corps rigide sera <u>en rotation</u>. Par le fait même, cette position localise également l'origine du système de coordonnée $\mathrm{S}x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$ selon $\mathrm{O}xyz$.

Ce paramètre sera un vecteur à trois dimensions : $\vec{r}_{\mathrm{S}} = \left(r_{x\mathrm{S}}, r_{y\mathrm{S}}, r_{z\mathrm{S}}\right)$

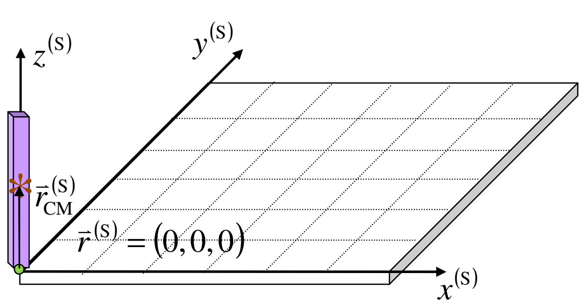


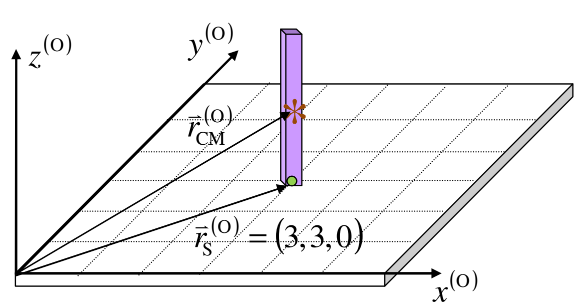
Dans cet exemple, le point de référence positionnant la tige est $\vec{r}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} = (3,3,0)$. Ce point n'a pas besoin d'être la position du centre de masse $\vec{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})}$ du corps rigide. Cependant, s'ils sont égaux ($\vec{r}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} = r_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})}$), les équation de la dynamique appliquée sur le corps rigide seront plus simple à traiter.

<u>Position du centre de masse du corps rigide :</u> $\vec{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})}$

Ce paramètre permet de définir dans $\mathrm{S}x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$ la position du centre de masse du système de particules. Dans le système de coordonnées $\mathrm{S}x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$, la position du centre de masse $\vec{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})}$ est <u>une constante</u>, car les particules y sont immobiles.

Ce paramètre sera un vecteur à trois dimensions : $\vec{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})} = \left(r_{x\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})}, r_{x\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})}, r_{x\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})}\right)$

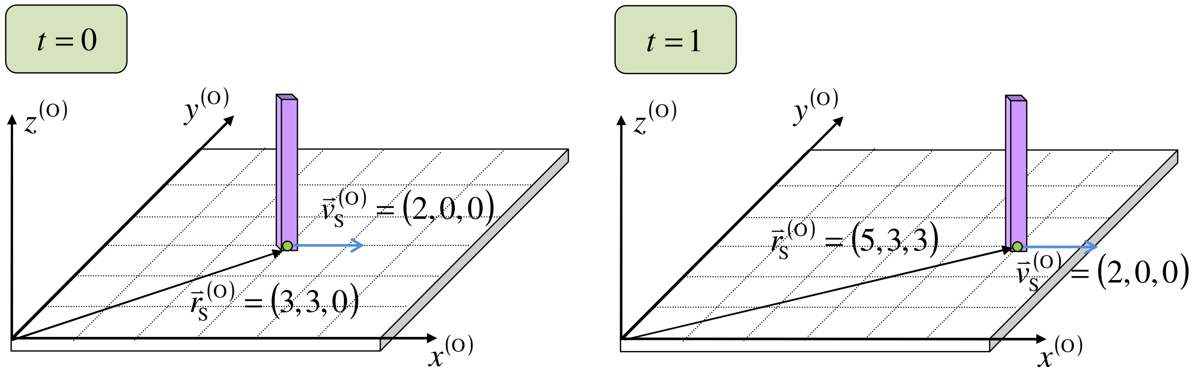




Vitesse du corps rigide : $\vec{v}_S^{(O)} \equiv \vec{v}_S$

Ce paramètre permet de définir dans $Oxyz$ la vitesse du point de référence autour duquel le corps rigide sera en rotation.

Ce paramètre sera un vecteur à trois dimensions : $\vec{v}_S = (v_{xS}, v_{yS}, v_{zS})$

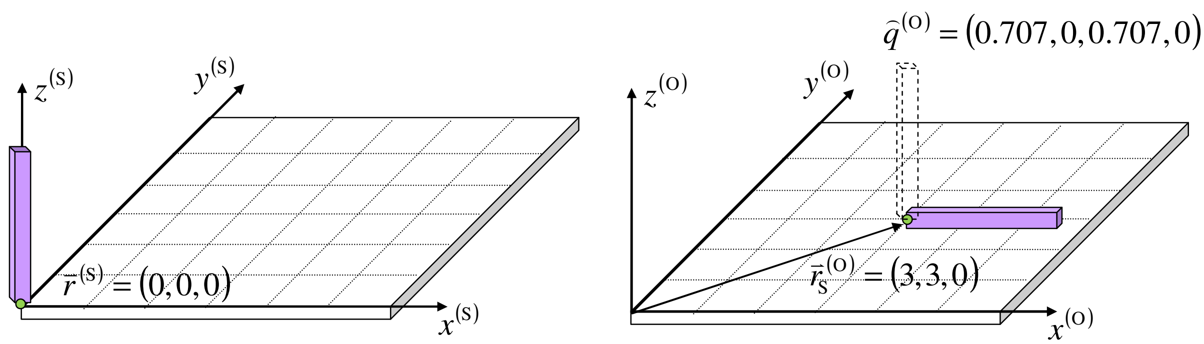


Dans cet exemple, le corps rigide subit uniquement une translation de son point de référence $\vec{r}_S^{(O)} = (3,3,0)$ à une vitesse constante de $\vec{v}_S^{(O)} = (2,0,0)$ pendant 1 seconde le déplaçant à la coordonnée $\vec{r}_S^{(O)} = (5,3,0)$.

Rotation du corps rigide : $\hat{q}^{(O)} \equiv \hat{q}$

Ce paramètre permet de définir dans $Oxyz$ l'état de rotation du corps rigide autour de la position de référence $\vec{r}_S^{(O)}$. L'état du corps rigide sans rotation (la référence initiale) sur lequel la rotation $\hat{q}$ sera appliquée sera déterminée dans un système de coordonnée $Sx^{(S)}y^{(S)}z^{(S)}$ où le corps rigide demeure toujours immobile.

Ce paramètre sera un quaternion[2] normalisé ayant quatre termes pour le définir : $\hat{q} = (q_w, q_x, q_y, q_z)$



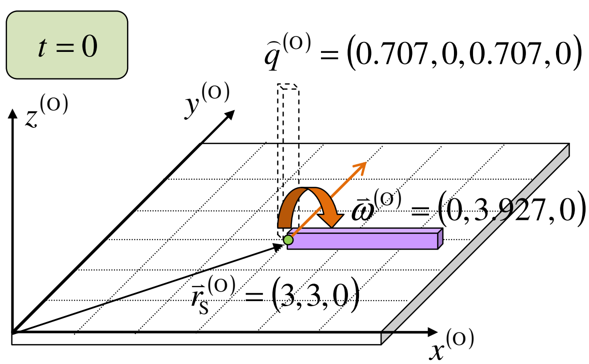
Malheureusement, l'espace des quaternions ne permet pas explicitement de déterminer l'état de la rotation du corps rigide en regardant les composantes de celui-ci, car le groupe des rotations n'est pas commutatif (contrairement à la translation *xyz*). Dans cet exemple, le quaternion $\hat{q}^{(O)} = (0.707, 0, 0.707, 0)$ représente un corps rigide tournée d'un angle $\theta = 90°$ autour de l'axe *y*.

[2] Une description mathématique du quaternion sera présentée sous peu. Un quaternion normalisé possède une longueur unitaire (égal à 1).

Vitesse angulaire du corps rigide : $\vec{\omega}^{(\mathrm{O})} \equiv \vec{\omega}$

Ce paramètre permet de définir dans $\mathrm{O}xyz$ la vitesse angulaire de rotation du corps rigide ainsi que l'orientation de l'axe de rotation. L'axe de rotation sera situé sur le point de référence $\vec{r}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})}$ selon S.

Ce paramètre sera un vecteur à trois dimensions : $\vec{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$



Dans l'exemple, le vecteur $\vec{\omega}^{(\mathrm{O})}$ représente une vitesse angulaire ω_y de 3.927 rad/s (correspondant à 225° par seconde). Ainsi, le tige initialement tournée de 90° tournera de 225° pendant une seconde donnant une rotation finale $\hat{q}^{(\mathrm{O})} = (-0.924, 0, 0.383, 0)$ de 315° autour de l'axe y. Il est important de précision qu'il faudra transformer le vecteur $\vec{\omega}^{(\mathrm{O})}$ en quaternion avant qu'il puisse agir sous l'action d'une multiplication sur le quaternion de rotation $\hat{q}^{(\mathrm{O})}$.

Tenseur d'inertie du corps rigide dans **S** : $I^{(\mathrm{S})}$

Ce paramètre permet de définir dans $\mathrm{S}x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$ la distribution de la masse du système de particules et ainsi la forme du corps. Le but de ce paramètre sera d'évaluer la difficulté (l'inertie) à faire tourner le corps rigide autour d'un axe de rotation dans **O** passant par un point de référence $\vec{r}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})}$. Puisque le corps rigide pourra tourner autour d'un axe quelconque à trois dimensions selon $\mathrm{O}xyz$, sa structure mathématique en sera plus complexe. Dans le système de coordonnées $\mathrm{S}x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$, le tenseur d'inertie $I^{(\mathrm{S})}$ est une constante, car les particules y sont immobiles.

Ce paramètre sera une matrice symétrique 3×3 : $I^{(\mathrm{S})} = \begin{pmatrix} I_{xx}^{(\mathrm{S})} & I_{xy}^{(\mathrm{S})} & I_{xz}^{(\mathrm{S})} \\ I_{yx}^{(\mathrm{S})} & I_{yy}^{(\mathrm{S})} & I_{yz}^{(\mathrm{S})} \\ I_{zx}^{(\mathrm{S})} & I_{zy}^{(\mathrm{S})} & I_{zz}^{(\mathrm{S})} \end{pmatrix}$ où $I_{ij} = I_{ji}$

Dans le système de coordonnée $\mathrm{O}xyz$ où l'on veut décrire le mouvement du corps rigide, le tenseur d'inertie $I^{(\mathrm{S})}$ ne sera pas constant en raison du changement de la rotation $\hat{q}^{(\mathrm{O})}$ du corps rigide :

Tenseur d'inertie selon $\mathrm{O}xyz$ par rapport à l'origine	Tenseur d'inertie selon $\mathrm{O}xyz$ par rapport à la position $\vec{r}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})}$	Tenseur d'inertie selon $\mathrm{O}xyz$ par rapport au centre de masse $\vec{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})}$ ($\vec{r}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} \equiv \vec{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})}$)
$I^{(\mathrm{O})} = \begin{pmatrix} I_{xx}^{(\mathrm{O})} & I_{xy}^{(\mathrm{O})} & I_{xz}^{(\mathrm{O})} \\ I_{yx}^{(\mathrm{O})} & I_{yy}^{(\mathrm{O})} & I_{yz}^{(\mathrm{O})} \\ I_{zx}^{(\mathrm{O})} & I_{zy}^{(\mathrm{O})} & I_{zz}^{(\mathrm{O})} \end{pmatrix}$	$I_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} = \begin{pmatrix} I_{xx\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} & I_{xy\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} & I_{xz\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} \\ I_{yx\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} & I_{yy\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} & I_{yz\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} \\ I_{zx\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} & I_{zy\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} & I_{zz\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} \end{pmatrix}$	$I_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})} = \begin{pmatrix} I_{xx\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})} & I_{xy\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})} & I_{xz\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})} \\ I_{yx\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})} & I_{yy\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})} & I_{yz\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})} \\ I_{zx\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})} & I_{zy\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})} & I_{zz\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})} \end{pmatrix}$

Nous apprendrons à transformer (calculer) $I^{(\mathrm{S})}$ dans le référentiel Oxyz en fonction de l'état de rotation $\hat{q}^{(\mathrm{O})}$ du corps rigide dans **O** ce qui nous permettra de calculer $I_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})}$ à partir de la rotation $\hat{q}^{(\mathrm{O})}$ et $I^{(\mathrm{S})}$.

Une notation lourde mais nécessaire

Pour bien décrire et calculer les paramètres d'un corps rigide, il est important d'utiliser une notation qui permettra de distinguer le référentiel **O** du référentiel **S** dans lequel les paramètres sont exprimés. En plus, il faudra préciser si une mesure est prise par rapport à l'origine du référentiel ou par rapport à une autre position du référentiel.

1. L'exposant en parenthèse : ($I^{(\mathrm{O})}$, $I^{(\mathrm{S})}$)

L'exposant en parenthèse comme dans les paramètres $I^{(\mathrm{O})}$ ou $I^{(\mathrm{S})}$ représente dans quel référentiel le paramètre est exprimé.

Exemple : $I^{(\mathrm{O})}$ sera le moment d'inertie dans le référentiel **O** par rapport à l'origine de **O** et $I^{(\mathrm{S})}$ sera le même moment d'inertie, mais dans le référentiel **S** par rapport à l'origine de **S**.

2. L'indice : ($\vec{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})}, \vec{r}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})}$)

L'indice comme dans les paramètres $\vec{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})}$ et $\vec{r}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})}$ représente le sujet du paramètre.

Exemple : $\vec{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})}$ sera la position du centre de masse selon **O** et $\vec{r}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})}$ sera la position du point de référence du corps rigide selon **O**.

3. Le séparateur « / » entre deux indices : ($\vec{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})}$, $\vec{r}_{\mathrm{CM/S}}^{(\mathrm{O})}$)

Le séparateur « / » dans le double indice d'un paramètre signifie <u>qu'une mesure</u> est prise <u>par rapport à un autre point de référence</u> que <u>l'origine du référentiel</u> où est exprimé le paramètre.

Exemple : $\vec{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})}$ sera la position du centre de masse du corps rigide dans le référentiel **O** par rapport à l'origine de **O** et $\vec{r}_{\mathrm{CM/S}}^{(\mathrm{O})}$ sera la position du centre de masse du corps rigide dans le référentiel **O** par rapport à la position $\vec{r}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})}$ du point de référence **S** (selon **O**).

Cette notation permettra de représenter les paramètres à l'aide d'une relation mathématique tel que

$$\vec{r}_{\mathrm{CM/S}}^{(\mathrm{O})} = \vec{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})} - \vec{r}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} \quad .$$

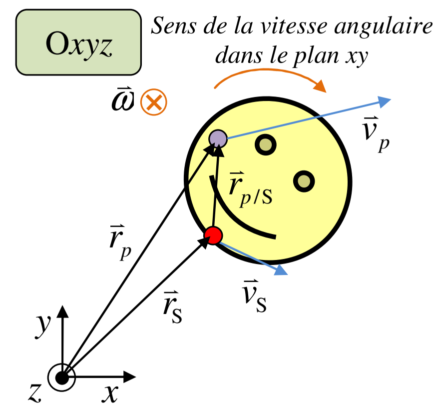
<u>Remarque :</u>

Afin d'alléger la notation, il est possible que l'exposant (**O**) soit retiré à l'occasion de la notation, car **O** représente le référentiel où l'on désire exprimer le comportement du corps rigide. Il devient ainsi le référentiel d'importance. Nous simplifierons la notation sous la forme suivante :

$$\vec{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{O})} \equiv \vec{r}_{\mathrm{CM}} \qquad \text{et} \qquad I^{(\mathrm{O})} \equiv I \quad .$$

La position et la vitesse des particules *p* d'un corps rigide

L'ensemble des N particules décrivant le corps rigide possède une position $\vec{r}_p$ et une vitesse $\vec{v}_p$ dans nos deux systèmes de coordonnée Oxyz et S$x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$. Elles se déplacent à une vitesse $\vec{v}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})}$ avec le corps rigide tout en tournant autour du point $\vec{r}_{\mathrm{S}}$ dans Oxyz avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$. Cependant, elles sont immobiles selon S$x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$.



Voici l'ensemble des relations que nous pouvons établir pour définir un corps rigide ainsi que ses N particules dans le système de coordonnée Oxyz et S$x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$

Description du paramètre	Mesure par rapport au référentiel Oxyz (toujours fixe, celui qui observe corps rigide en mouvement)	Mesure par rapport au référentiel S$x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$ (en translation et rotation selon O, celui qui observe le corps rigide immobile)
Masse totale des N particules composant le corps rigide	$m = \sum_{p=1}^{N} m_p$	
Position du corps rigide (le point de référence)	$\vec{r}_{\mathrm{S}} = \vec{r}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} = (r_{x\mathrm{S}}, r_{y\mathrm{S}}, r_{y\mathrm{S}})$	$\vec{r}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{S})} = (0,0,0)$ (le point de référence est à l'origine selon **S**)
Vitesse du corps rigide	$\vec{v}_{\mathrm{S}} = \vec{v}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} = (v_{x\mathrm{S}}, v_{y\mathrm{S}}, v_{z\mathrm{S}})$	$\vec{v}_{\mathrm{S}}^{(\mathrm{S})} = (0,0,0)$ (le corps rigide ne bouge pas selon **S**)
Rotation du corps rigide	$\hat{q} = \hat{q}^{(\mathrm{O})} = (q_w, q_x, q_y, q_z)$ (le quaternion doit être normalisé)	$\hat{q}^{(\mathrm{S})} = (0,0,0,0)$ (le corps rigide n'est pas tourné selon **S**)
Vitesse angulaire du corps rigide	$\vec{\omega} = \vec{\omega}^{(\mathrm{O})} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$	$\vec{\omega}^{(\mathrm{S})} = (0,0,0)$ (le corps rigide ne tourne pas selon **S**)
Position d'une particule p	$\vec{r}_p = \vec{r}_p^{(\mathrm{O})} = (r_{xp}, r_{yp}, r_{zp})$ et $\vec{r}_p = \vec{r}_{\mathrm{S}} + \vec{r}_{p/\mathrm{S}}$	$\vec{r}_p^{(\mathrm{S})} = (r_{xp}^{(\mathrm{S})}, r_{yp}^{(\mathrm{S})}, r_{zp}^{(\mathrm{S})})$ (la particule est localisée dans le référentiel du corps rigide et elle est <u>fixe dans le temps</u>)
La position $\vec{r}_{p/\mathrm{S}}$ d'une particule p par rapport à l'axe de rotation S à partir de $\vec{r}_p^{(\mathrm{S})}$ et de la rotation $\hat{q}$	$\vec{r}_{p/\mathrm{S}} = \vec{r}_{p/\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} = (r_{xp/\mathrm{S}}, r_{yp/\mathrm{S}}, r_{zp/\mathrm{S}})$ où $\hat{r}_{p/\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} = \hat{q}\,\hat{r}_p^{(\mathrm{S})}\hat{q}^*$ avec $\hat{r}_{p/\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})} = (0,\ \vec{r}_{p/\mathrm{S}}^{(\mathrm{O})})$ et $\hat{r}_p^{(\mathrm{S})} = (0,\ \vec{r}_p^{(\mathrm{S})})$	
Vitesse d'une particule p	$\vec{v}_p = \vec{v}_p^{(\mathrm{O})} = (v_{xp}, v_{yp}, v_{zp})$ et $\vec{v}_p = \vec{v}_{\mathrm{S}} + \vec{v}_{p/\mathrm{S}}$ (la vitesse de la particule dépend de sa position par rapport à S dans Oxyz)	$v_p^{(\mathrm{S})} = (0,0,0)$ (toutes les particules sont immobiles selon S)
La vitesse $\vec{v}_{p/\mathrm{S}}$ d'une particule p par rapport à l'axe de rotation S à partir de $\vec{r}_{p/\mathrm{S}}$ et de la vitesse angulaire $\vec{\omega}$	$\vec{v}_{p/\mathrm{S}} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{p/\mathrm{S}}$ (vitesse purement rotative autour de S et l'orientation dépend de la position de la particule p)	

Le centre de masse d'un corps rigide

Voici les relations équations permettant de calculer la position et la vitesse du centre de masse du système de particules dans le système de coordonnées $\mathrm{O}xyz$ et $\mathrm{S}x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$ ainsi que l'équation permettant de transformer la position du centre de masse de $\mathrm{S}x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$ vers la valeur du centre de masse dans $\mathrm{O}xyz$:

Description du paramètre	Mesure par rapport au référentiel $\mathrm{O}xyz$ (toujours fixe, celui qui observe corps rigide en mouvement)	Mesure par rapport au référentiel $\mathrm{S}x^{(\mathrm{S})}y^{(\mathrm{S})}z^{(\mathrm{S})}$ (en translation et rotation, celui qui observe le corps rigide immobile)
Position du centre de masse	$\vec{r}_{\mathrm{CM}} = \left(r_{x\mathrm{CM}}, r_{y\mathrm{CM}}, r_{z\mathrm{CM}}\right)$ $= \dfrac{1}{m}\sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_p$ $= \vec{r}_{\mathrm{S}} + \vec{r}_{\mathrm{CM/S}}$ (position qui varie dans le temps)	$\vec{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})} = \left(r_{x\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})}, r_{y\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})}, r_{z\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})}\right)$ $= \dfrac{1}{m}\sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_p^{(\mathrm{S})}$ (position constante dans le temps)
La position du centre de masse $\vec{r}_{\mathrm{CM/S}}^{(\mathrm{O})}$ par rapport à l'axe de rotation S à partir de $\vec{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})}$ et de l'état de rotation $\hat{q}$	$\vec{r}_{\mathrm{CM/S}}^{(\mathrm{O})} = \left(r_{x\mathrm{CM/S}}^{(\mathrm{O})}, r_{y\mathrm{CM/S}}^{(\mathrm{O})}, r_{z\mathrm{CM/S}}^{(\mathrm{O})}\right)$ où $\hat{r}_{\mathrm{CM/S}}^{(\mathrm{O})} = \hat{q}\,\hat{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})}\,\hat{q}^{*}$ avec $\hat{r}_{\mathrm{CM/S}}^{(\mathrm{O})} = \left(0,\, \vec{r}_{\mathrm{CM/S}}^{(\mathrm{O})}\right)$ et $\hat{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})} = \left(0,\, \vec{r}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})}\right)$	
La vitesse du centre de masse	$\vec{v}_{\mathrm{CM}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}_{\mathrm{CM}}}{\mathrm{d}t}$ $= \dfrac{1}{m}\sum_{p=1}^{N} m_p \vec{v}_p$ $= \vec{v}_{\mathrm{S}} + \vec{v}_{\mathrm{CM/S}}$	$\vec{v}_{\mathrm{CM}}^{(\mathrm{S})} = 0$ (centre de masse immobile)
La vitesse $\vec{v}_{\mathrm{CM\,S}}$ du centre de masse par rapport à l'axe de rotation S à partir de $\vec{r}_{\mathrm{CM\,S}}$ et de la vitesse angulaire $\vec{\omega}$ du corps rigide	$\vec{v}_{\mathrm{CM/S}} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{\mathrm{CM/S}}$ (vitesse purement rotative autour de S et l'orientation dépend de la position du centre de masse)	

Une propriété intéressante qui sera exploitée sera

$$\vec{r}_{\mathrm{CM/S}} = \vec{r}_{\mathrm{CM}} - \vec{r}_{\mathrm{S}} = \frac{1}{m}\sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{p/\mathrm{S}}$$

ce qui permet d'affirmer que de comptabiliser le centre de masse dans **S** et d'en faire la rotation pour obtenir $\vec{r}_{\mathrm{CM/S}}$ sera équivalent à faire la rotation des positions $\vec{r}_p^{(\mathrm{S})}$ pour obtenir $\vec{r}_{p/\mathrm{S}}$ et d'en faire la comptabilité du centre de masse dans **O** pour obtenir $\vec{r}_{\mathrm{CM/S}}$.

Preuve :

$$\vec{r}_{\mathrm{CMS}} = \vec{r}_{\mathrm{CM}} - \vec{r}_{\mathrm{S}} \quad \Rightarrow \quad \vec{r}_{\mathrm{CMS}} = \left(\frac{1}{m} \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_p \right) - \vec{r}_{\mathrm{S}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{\mathrm{CMS}} = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_p - \frac{1}{m} m \vec{r}_{\mathrm{S}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{\mathrm{CMS}} = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_p - \frac{1}{m} \left(\sum_{p=1}^{N} m_p \right) \vec{r}_{\mathrm{S}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{\mathrm{CMS}} = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_p - \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{\mathrm{S}}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{\mathrm{CMS}} = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{N} m_p \left(\vec{r}_p - r_{\mathrm{S}} \right)$$

$$\Rightarrow \quad \vec{r}_{\mathrm{CMS}} = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^{N} m_p \vec{r}_{p/\mathrm{S}} \quad \blacksquare$$