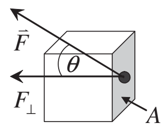
Chapitre 5.1 – La pression

La pression

La **pression** est une mesure de **force** par **unité de surface**. Dans cette définition, nous utilisons seulement la composante de la force qui est perpendiculaire à la surface. Bien que la force soit un vecteur, la pression est considérée comme un scalaire :

$$P = \frac{F\cos\theta}{A} = \frac{F_\perp}{A}$$



où P : La pression associée à un élément de surface (Pa)
$F_\perp$: Force perpendiculairement à la surface (N)
A : Surface sur laquelle est appliquée la force (m^2)
θ : Angle entre la force et la normale à la surface

Unité SI (pascal) : $\text{Pa} = [P] = \frac{[F]}{[A]} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg m/s}^2}{\text{m}^2} = \text{kg m}^{-1}\text{s}^{-2}$

Situation A : ***La pression d'un piston.*** Un piston pousse horizontalement sur un cylindre plein de 10 cm de rayon avec une force de 80 N. On désire évaluer la pression qu'exerce le piston sur la surface du cylindre.

Nous pouvons évaluer la surface du cylindre :

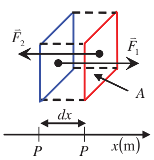
$$A = \pi R^2 \quad \Rightarrow \quad A = \pi(0{,}1)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 0{,}0314\ \text{m}^2}$$

Évaluons maintenant la pression exercée par le piston :

$$P = \frac{F_\perp}{A} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{(80)}{(0{,}0314)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = 2548{,}8\ \text{Pa}}$$

L'équilibre et la pression

Selon la 2$^{\text{ième}}$ loi de Newton, l'équilibre est atteint lorsque la somme des forces est nulle. Dans le cas de la pression, l'équilibre est atteint[1] lorsque la pression évaluée de chaque côté d'une surface d'épaisseur infinitésimale est égale et qu'elle est produite par des forces de signes opposées.



$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = F$$

$$P = \frac{F}{A}$$

[1] Cette règle ne s'applique pas lorsque la gravité influence le calcul de la pression.

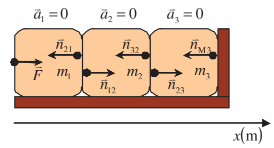
Théorème de la transmission horizontale de la pression

Le théorème de la transmission horizontale de la pression dans un système au repos s'énonce de la façon suivante :

Dans un système de masses incompressibles horizontales ***au repos*** *de surface identique, la pression est constante en tout point sur un axe horizontal et elle est égale à la pression externe causée par une force $\vec{F}$ qui se propage horizontalement à l'ensemble du système.*

Preuve :

Considérons un groupe de 3 cubes de surface A alignés horizontalement et appuyés contre un mur du côté droit. On applique une force $\vec{F}$ du côté gauche afin de pousser les cubes vers le mur. Les cubes sont incompressibles (le volume ne change pas sous la présence d'une force).



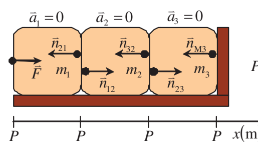
À partir de la 2$^{\text{ième}}$ loi de Newton selon l'axe x ($\sum F_x = ma_x$), évaluons les forces normales de contact entre les cubes. Utilisons le fait que l'accélération est nulle pour tous les cubes sont incompressibles :

Bloc m_1	Bloc m_2	Bloc m_3
$F - n_{21} = 0$	$n_{12} - n_{32} = 0$	$n_{23} - n_{M3} = 0$
$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
$F = n_{21}$	$n_{12} = n_{32}$	$n_{23} = n_{M3}$

En utilisant la 3$^{\text{ième}}$ loi de Newton ($\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$), on réalise que toutes les forces ont le même module même si les cubes n'ont pas la même masse :

$$F = n_{12} = n_{23} = n_{M3}$$

Évaluons la pression sur l'ensemble des surfaces verticales des différents cubes :



$$P = \frac{F}{A}$$

Puisqu'il y a une force normale de module F qui est appliquée sur chacune des surfaces verticales des différents cubes, alors la pression causée par la force $\vec{F}$ d'origine se propage sur l'ensemble des cubes. ■

Théorème de la transmission verticale de la pression sous l'influence de la gravité

Le théorème de la transmission verticale de la pression dans un système au repos sous l'influence de la gravité s'énonce de la façon suivante :

Dans un système de masses incompressibles verticales ***au repos*** *de surface identique, la pression externe causée par une force $\vec{F}$ se propage verticalement à l'ensemble du système et la variation de pression gravitationnelle causée par l'accumulation de masse au-dessus d'une surface est proportionnelle à la force gravitationnelle $m\vec{g}$ appliquée sur cette masse.*

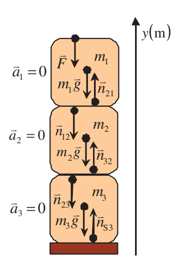
Mathématiquement, ce théorème se résume de la façon suivante :

$$P = P_{\text{ext}} + \Delta P_g$$

où P : Pression mesurée à la surface (Pa)
P_{ext} : Pression externe (Pa) ($P_{\text{ext}} = F_\perp / A$)
ΔP_g : Variation de pression causée par la gravité (Pa) ($\Delta P_g = m_{tot}\, g / A$)

Preuve :

Considérons un groupe de 3 cubes de surface A alignés verticalement et appuyés contre le sol. On applique une force $\vec{F}$ sur le cube du haut afin de pousser les cubes vers le sol. Les cubes sont incompressibles (le volume ne change pas sous la présence d'une force).



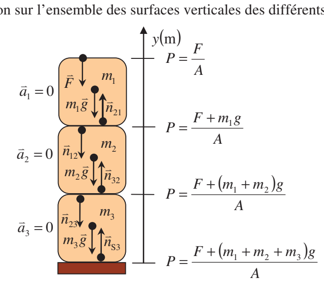
À partir de la 2$^{\text{ième}}$ loi de Newton selon l'axe y ($\sum F_y = ma_y$), évaluons les forces normales de contact entre les cubes. Utilisons le fait que l'accélération est nulle pour tous les cubes incompressibles :

Bloc m_1	Bloc m_2	Bloc m_3
$n_{21} - m_1 g - F = 0$	$n_{32} - m_2 g - n_{12} = 0$	$n_{S3} - m_3 g - n_{23} = 0$
$\Rightarrow$	$\Rightarrow$	$\Rightarrow$
$n_{12} = m_1 g + F$	$n_{32} = m_2 g + n_{12}$	$n_{S3} = m_3 g + n_{23}$

En utilisant la 3$^{\text{ième}}$ loi de Newton ($\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$), nous pouvons évaluer nos forces normales à partir de la force externe $\vec{F}$ et de la force gravitationnelle totale appliquée sur les cubes au-dessus de la surface où la force normale est évaluée :

Surface cube 1-2	$n_{21} = m_1 g + F$
Surface cube 2-3	$n_{32} = (m_1 + m_2) g + F$
Surface cube 3 et le sol	$n_{S3} = (m_1 + m_2 + m_3) g + F$

Évaluons la pression sur l'ensemble des surfaces verticales des différents cubes :



Généralisons l'expression de la pression de cette situation :

$$P = \frac{F + (m_1 + m_2 + m_3) g}{A} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{F + m_{tot}\, g}{A} \qquad \text{(Remplacer } m_{tot} = m_1 + m_2 + m_3\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad P = P_{ext} + \Delta P_g \ ■ \qquad \text{(Remplacer } P_{ext} = F_\perp / A,\ \Delta P_g = m_{tot}\, g / A\text{)}$$

La pression atmosphérique

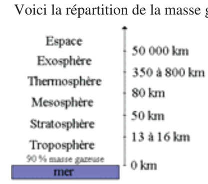
En 1648, le jeune prodige français Blaise Pascal a continué les travaux sur le vide de Torricelli[2] ce qui a permis de confirmer l'existence de la **pression atmosphérique** causée par le **poids** de **l'atmosphère**.

Blaise Pascal (1623-1662)

Au niveau de la mer, la pression atmosphérique moyenne est égale à la valeur suivante :

$$P_{\text{atm}} = P_A = 101{,}3\ \text{kPa} = 1{,}013 \times 10^5\,\text{Pa}$$

Voici la répartition de la masse gazeuse dans atmosphère de la Terre :



- La pression atmosphérique est très faible à des hauteurs supérieures à 16 km.
- Sous une altitude de 30 km à 40 km, on peut retrouver 99% de la masse atmosphérique.
- On évalue la masse de l'atmosphère terrestre à 5,13 10^{18} kg, soit environ un millionième de la masse de Terre.

[2] Evangelista Torricelli a inventé le baromètre à tube de mercure. Le torr (unité de pression correspondant à une colonne de mercure de 1 mm) lui a été dédié en l'honneur de ses travaux non publiés.

La pression dans un fluide homogène

Evangelista Torricelli (1608-1647)

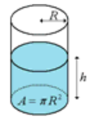
Les travaux du physicien et mathématicien italien Evangelista Torricelli sur le baromètre à tube de mercure permis d'établir un lien entre la variation de pression exercée par une colonne d'un fluide[3] homogène et la hauteur de la colonne en question. Ainsi, la variation de pression ΔP causée par une colonne d'un fluide homogène dépend de la masse volumique ρ du fluide, de la hauteur h de la colonne du fluide et de la gravité g. La pression augmente vers le bas de la colonne et diminue vers le haut de la colonne :

$$\Delta P_g = \pm \rho\, g\, h$$

où ΔP_g : Variation de pression causée par la gravité appliquée sur une colonne (Pa)
ρ : Masse volumique de la matière (kg/m^3)
g : Champ gravitationnel appliqué sur la colonne (N/kg)
h : Hauteur de la colonne de matière (m)

Signe : (+) Positif si la colonne est au-dessus du point de mesure.
(-) Négatif si la colonne est sous le point de mesure.

Preuve :



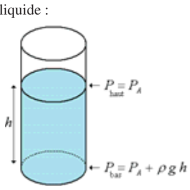
Évaluons la variation de la pression causée par la gravité appliquée sur la colonne de liquide d'une hauteur h, de rayon R et de masse volumique ρ. Utilisons le théorème précédent pour définir une expression initiale à la variation de la pression :

$$\Delta P_g = \frac{m_{tot}\, g}{A} \quad\Rightarrow\quad \Delta P_g = \frac{(\rho V)g}{A} \qquad \text{(Remplacer } m_{tot} = \rho V\text{)}$$

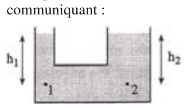
$$\Rightarrow\quad \Delta P_g = \frac{\rho(A h)g}{A} \qquad \text{(Remplacer } V = A h\text{)}$$

$$\Rightarrow\quad \Delta P_g = \rho\, g\, h \;\blacksquare \qquad \text{(Simplifier } A\text{)}$$

Pression dans une colonne de liquide :



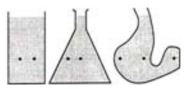
Principe du vase communiquant :



$h_1 = h_2$ car $P_1 = P_2$

Cette situation est valide uniquement lorsque la pression à la surface des deux côtés est identique.

Pression lors d'une colonne « virtuelle » de matière :



Il y a transmission de la pression horizontale même s'il n'y a pas réellement de liquide au-dessus du point.

[3] Un fluide est un milieu parfaitement déformable (ex: liquide, gaz)

Densité de fluide

Voici une table de différentes masses volumiques associées à quelques liquides. La densité relative correspond au rapport entre la densité absolue et la densité de l'eau :

Fluide	Densité absolue ρ (kg/m^3) (masse volumique)	Densité relative
Air	1,3	0,0013
Eau	1000	1
Sang	1 050	1,05
Plasma sanguin	1 030	1,03
Fer	7 700	7,7
Mercure	13 600	13,6

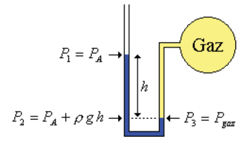
Définition de la densité relative :

$$\text{Densité relative} = \frac{\text{Densité (absolue) d'un substance}}{\text{Densité (absolue) de l'eau}}$$

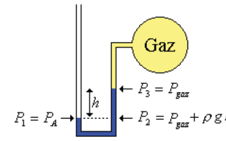
Le manomètre en U

Pour mesurer la pression d'un gaz (**jaune**) à l'intérieur d'un volume V, nous pouvons utiliser un manomètre en U. Cet instrument fonctionne grâce à la pression atmosphérique (**blanc**) et à la variation de pression causée par une colonne d'un liquide (**bleu**). On utilise très souvent du mercure dans un tel montage, car sa masse volumique est très élevée ($\rho = 13600$ kg/m^3). Cela signifie qu'une grande pression peut être mesurée sans avoir recours à une grande colonne de liquide :

Si : $P_{gaz} > P_A$
Alors : $P_{gaz} = P_A + \rho\, g\, h$ $\quad (P_2 = P_3)$

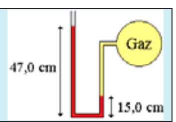


Si : $P_{gaz} < P_A$
Alors : $P_{gaz} = P_A - \rho\, g\, h$ $\quad (P_1 = P_2)$



où P_{gaz} : Pression du gaz (Pa)
P_A : Pression atmosphérique (Pa)
ρ : Masse volumique de la matière dans la colonne (kg/m^3)
g : Gravité appliquée sur la masse (N/kg)
h : Hauteur de la colonne de liquide mesuré entre P_{gaz} et P_A (m)

Situation B : *La pression du gaz*. Un gaz est contenu dans une sphère de 5 cm de rayon à une température de 22 C. Lorsque cette sphère est raccordée à un manomètre en U contenant du mercure ($\rho = 13600$ kg/m^3), la colonne de mercure prend la position suivante à l'équilibre (voir schéma ci-contre). On désire évaluer la pression du gaz.



Évaluons la hauteur de la colonne de mercure :

$$h = y_1 - y_2 \quad\Rightarrow\quad h = (0{,}470) - (0{,}150)$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{h = 0{,}320 \text{ m}}$$

Évaluons la pression du gaz sachant que la colonne de mercure est poussée par le gaz dans la sphère et que l'autre extrémité du tube est en contact avec l'atmosphère :

$$P_{gaz} = P_{atm} \pm \Delta P_g \quad\Rightarrow\quad P_{gaz} = P_{atm} \pm (\rho\, g\, h) \qquad (\Delta P_g = \rho\, g\, h)$$

$$\Rightarrow\quad P_{gaz} = P_{atm} + \rho\, g\, h \qquad (P_{gaz} > P_{atm})$$

$$\Rightarrow\quad P_{gaz} = (101\times10^3) + (13600)(9{,}8)(0{,}320) \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow\quad P_{gaz} = 101\times10^3 + 42650 \qquad \text{(Calculer } \rho\, g\, h\text{)}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{P_{gaz} = 143{,}65\times10^3 \text{ Pa}} \qquad \text{(Simplifier)}$$

Unités de pression

Voici différentes autres façons de mesurer la pression :

mm de mercure[4] : (mm de Hg)

Mesure de pression fréquemment utilisée dans le domaine médical. Cette mesure fait référence à la variation de pression gravitationnelle générée par une colonne de mercure dans un manomètre en U. Une hauteur de 1 mm de mercure produit sur la Terre ($g = 9{,}8$ N/kg) la pression suivante :

$$1 \text{ mm de Hg} = 133{,}3 \text{ Pa}$$

Atmosphère : (atm)

Mesure de pression fréquemment utilisée dans le domaine de la météorologie et dans le domaine de la plongée sous-marine. Cette mesure fait référence à la variation de pression gravitationnelle exercée par l'atmosphère à la surface de la Terre :

$$1 \text{ atm} = 1{,}013\times10^5 \text{ Pa} \quad \text{et} \quad 1 \text{ atm} = 760 \text{ mm Hg}$$

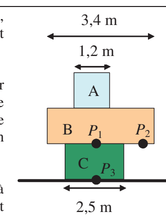
[4] L'unité suivant porte également le nom de « torr ».

Exercices

Exercice A : *Les boîtes empilées*. Une boîte A de 3 kg, une boîte B de 8 kg ainsi qu'une boîte C et 5 kg sont empilées sur le sol tel qu'illustré sur le schéma ci-contre.

Les boîtes ont toutes une profondeur de 1 m et une hauteur de 1,2 m. Par contre, la boîte A possède une largeur de 1,2 m, la boîte B possède une largeur de 3,4 m et la boîte C possède une largeur de 2,5 m. Évaluez **(a)** la pression P_1, **(b)** la pression P_2 et **(c)** la pression P_3.

On suppose que la pression du gaz extérieur est égale à zéro (dans le vide) et que la pression est uniformément répartie sur les surfaces en contact.



Solutions

Exercice A : *Les boîtes empilées*.

(a) La pression P_1 :

$$P_1 = P_{ext} + \Delta P_g = P_{gaz} + \frac{n_{CB}}{A} = (0) + \frac{(m_A + m_B)g}{A} = \frac{(3+8)(9{,}8)}{(2{,}5)(1)} = 43{,}12 \text{ Pa}$$

(b) La pression P_2 :

Il n'y a pas de force normale appliquée sur ce point situé sur la surface de la boîte B.

$$P_2 = P_{ext} = P_{gaz} = 0 \text{ Pa}$$

P.S. À l'intérieur de la boîte B, la pression peut être supérieure à zéro, mais cela devient impossible à évaluer avec nos techniques.

(c) La pression P_3 :

$$P_3 = P_{ext} + \Delta P_g = P_{gaz} + \frac{n_{sol}}{A} = (0) + \frac{(m_A + m_B + m_C)g}{A} = \frac{(3+8+5)(9{,}8)}{(2{,}5)(1)} = 62{,}72 \text{ Pa}$$

Chapitre 5.2 – La pression d'un gaz

La pression d'un gaz

Lorsqu'on emprisonne un gaz dans un ballon, le gaz applique une force sur la membrane du ballon, car celle-ci se déforme à mesure que le gaz entre dans le ballon. Ainsi, un gaz comprimé applique une pression sur son contenant.


Un ballon contient de l'air comprimé.

Au lieu de parler de force appliquée par le gaz sur son contenant, nous pouvons concevoir la pression d'un gaz comme un phénomène de collision :

> *La pression d'un gaz comprimé est une mesure statistique du nombre moyen de collisions effectuées par toutes les molécules d'un gaz sur les différentes surfaces de son contenant.*

- Le **nombre de collisions** effectuées par le gaz est **directement proportionnel** à **énergie cinétique** du gaz, car une augmentation de l'énergie augmente la vitesse du gaz ce qui permet aux molécules de percuter les parois plus fréquemment.
- Dans un ballon élastique, une augmentation du nombre de collisions internes augmente le volume du ballon.
- Dans un ballon élastique, une diminution du nombre de collisions internes diminue le volume du ballon.

La pression et l'énergie cinétique

Si l'on analyse les unités de la pression, on réalise que la **pression** P d'un gaz est une mesure statistique de **l'énergie cinétique** K totale d'un gaz **par unité de volume** V :

$$[P] = \text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}\frac{\text{m}}{\text{m}} = \frac{\text{Nm}}{\text{m}^3} = \frac{\text{J}}{\text{m}^3} = \frac{[K]}{[V]}$$

Remarque :

- Une augmentation de l'énergie cinétique d'un gaz entraîne une augmentation de la pression exercée par ce gaz ($\uparrow K \;\Rightarrow\; \uparrow P$).
- Une diminution du volume occupé par un gaz (sans changer le nombre de molécules) entraîne une augmentation de la pression exercée par ce gaz. ($\downarrow V \;\Rightarrow\; \uparrow P$).

Puisqu'on utilise la **température** T pour **mesurer l'énergie cinétique moyenne** d'un **gaz**, alors on peut affirmer que la **température** T est **proportionnel** au **produit** de la **pression** P d'un gaz et du **volume** V qu'il occupe :

$$P \propto \frac{K}{V} \qquad \Rightarrow \qquad PV \propto K \qquad \Rightarrow \qquad PV \propto T$$

La loi des gaz parfaits

Un **gaz parfait**[1] est un **modèle** en thermodynamique permettant de décrire le **comportement** d'un **gaz** effectuant **peu de collisions** entre les molécules du gaz et ayant une **faible interaction électrique** entre les molécules du gaz. Cette équation est applicable uniquement lorsque le gaz est à l'équilibre thermique (lorsque la température du système est constante en tout point) :

$$PV = nRT$$

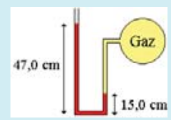
où
P : Pression du gaz (Pa)
V : Volume du gaz (m^3)
n : Quantité de particule de gaz (mol)
R : Constante des gaz parfait $8{,}31\ \text{J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$
T : Température du gaz (K) ($0\ \text{C} = 273\ \text{K}$) $\qquad (T(K) = T(C) + 273)$

Théorème de la pression d'un gaz à l'équilibre thermique

Le théorème de la pression d'un gaz à l'équilibre thermique s'énonce de la façon suivante :

> *À **l'équilibre thermique**, la pression d'un gaz à l'intérieur d'un volume est constante en tout point si l'on considère la masse du gaz comme étant négligeable.*

Situation A : *La quantité inconnue de gaz.* Un gaz est contenu dans une sphère de 5 cm de rayon à une température de 22 C. Lorsque cette sphère est raccordée à un manomètre en U contenant du mercure ($\rho = 13600\ \text{kg/m}^3$), la colonne de mercure prend la position suivante à l'équilibre (voir schéma ci-contre). On désire déterminer le nombre de mole de gaz enfermé dans la sphère. On suppose que la colonne de gaz est de volume négligeable.



À partir de la solution à la situation B du chapitre 5.1 (**Situation B : *La pression du gaz***), nous avons obtenu la pression suivante pour le gaz :

$$P_{gaz} = 143{,}65 \times 10^3\ \text{Pa}$$

Ce gaz est enfermé dans le volume d'une sphère : (on néglige le volume de la petite colonne)

$$V_{sphère} = \frac{4\pi R^3}{3} \quad \Rightarrow \quad V_{sphère} = \frac{4\pi (0{,}05)^3}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{V_{sphère} = 5{,}24 \times 10^{-4}\ \text{m}^3}$$

[1] Lorsqu'un gaz n'est plus parfait, les liaisons entre les molécules du gaz ne sont plus négligeables ce qui influence la pression du gaz.

Avec la loi des Gaz Parfaits s'appliquant dans la situation présente :

$$PV = nRT \quad \Rightarrow \quad n = \frac{PV}{RT}$$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{(143{,}65 \times 10^3)(5{,}24 \times 10^{-4})}{(8{,}31)(22 + 273)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{n = 0{,}0307\ \text{mol}}$$

Pression produite par une membrane extensible

Une **membrane extensible** est comparable à un **ressort**. Lorsqu'elle est étirée, elle applique des forces sur l'objet qui l'étire. Lorsque c'est la pression d'un gaz qui étire une membrane, c'est le gaz qui subit alors cette force. La membrane atteint l'équilibre et cesse d'être déformée lorsque :

$$P_{\text{gaz}} = P_{\text{ext}} \pm P_{\text{membrane}}$$

où
P_{gaz} : Pression du gaz à l'intérieur de la membrane (Pa)
P_{ext} : Pression appliquée à l'extérieur de la membrane (Pa)
P_{membrane} : Pression exercée par la déformation de la membrane sur le gaz (Pa)

Convension de signe :
Membrane étirée : $P_{\text{gaz}} = P_{\text{ext}} + P_{\text{membrane}}$
Membrane comprimée : $P_{\text{gaz}} = P_{\text{ext}} - P_{\text{membrane}}$

- Une membrane est habituellement toujours étirée et jamais comprimée.
- Lorsque la membrane extérieure est en contact avec l'atmosphère, on peut remplacer la pression extérieure (P_{ext}) par la pression atmosphérique (P_{atm}).

La déformation d'une membrane

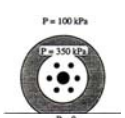
La **pression exercée** par une **membrane** sur un gaz est une **mesure** de la **déformation** de la membrane (le volume occupé par la membrane). Voici deux situations où l'on observe un pneu étiré de la même façon :

1) Pneu sur la Terre :

$P_{gaz} = 350\ \text{kPa}$
$P_{pneu} = 250\ \text{kPa}$
$P_{atm} = 100\ \text{kPa}$

À Équilibre :

$P_{\text{intérieur}} = P_{\text{extérieur}}$
$P_{gaz} = P_{pneu} + P_{atm}$

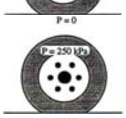


2) Pneu dans l'espace :

$P_{gaz} = 250\ \text{kPa}$
$P_{pneu} = 250\ \text{kPa}$
$P_{vide} = 0\ \text{kPa}$

À l'équilibre :

$P_{\text{intérieur}} = P_{\text{extérieur}}$
$P_{gaz} = P_{pneu} + P_{vide}$



Pression relative ou manométrique

La **pression relative** est une mesure de pression sans l'influence de la pression atmosphérique. Cette mesure est pertinente puisque la pression atmosphérique est relativement constante à la surface de la Terre :

$$P_{\text{relative}} = \tilde{P} = P - P_{\text{atm}}$$

Où
$\tilde{P}$: Pression relative (sans l'influence de la pression atmosphérique) (Pa)
P : Pression totale (pression absolue) (Pa)
P_{atm} : Pression atmosphérique (Pa)

Remarque :
$\tilde{P} > 0 \;\Rightarrow\; P > P_{\text{atm}}$
$\tilde{P} < 0 \;\Rightarrow\; P < P_{\text{atm}}$

Cette définition de la pression est utilisée dans :

- La pression sanguine.
- Chambre à pression négative dans les hôpitaux.
- Pression mesurée par les garagistes dans les pneus.

Situation A : *Le pneu d'Albert sur Mars.* Albert a construit un pneu qui peut supporter jusqu'à 420 kPa sur la Terre à 1 atm. Albert voulant contribuer à la recherche spatial, il désire utiliser son pneu sur le prochain module roulant sur Mars. Sachant que la pression atmosphérique sur Mars est de 600 Pa, on désire évaluer la pression maximale que pourra supporter le pneu sur la planète Mars.

Sur la Terre, le pneu supporte la pression relative suivante. Cette mesure est une caractéristique du pneu valable quelque soit le milieu :

$$\tilde{P} = P - P_{\text{atm}} \quad \Rightarrow \quad \tilde{P} = P - (1\ \text{atm})$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{P} = (420 \times 10^3) - (1{,}01 \times 10^5)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tilde{P} = 3{,}19 \times 10^5\ \text{Pa}}$$

On peut maintenant évaluer la pression maximale supportée par le pneu sur Mars :

$$\tilde{P} = P - P_{\text{atm}} \quad \Rightarrow \quad P = \tilde{P} + P_A$$

$$\Rightarrow \quad P = (3{,}19 \times 10^5) + (600)$$

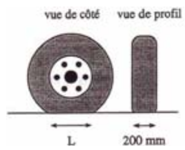
$$\Rightarrow \quad \boxed{P = 3{,}196 \times 10^5\ \text{Pa}}$$

Exercices

<u>Référence :</u> Mécanique Tome 2 de Pierre Fourneaux, Page 6-76, Question 1

Les pneus d'une fourgonnette de 2100 kg (poids réparti uniformément sur les quatre pneus) sont gonflés à une pression de 250 kPa (pression sans l'influence de la pression atmosphérique). La largeur de ces pneus est de 200 mm. (**P.S.** Prenez g = 10 N/kg)

a) Quelle est la surface de contact en cm^2, d'un pneu avec le sol ?
b) Quelle est la longueur de contact, en cm, du pneu avec le sol (L sur le schéma)?



Solutions

<u>Référence :</u> Mécanique Tome 2 de Pierre Fourneaux, Page 6-76, Question 1

Appliquons la 2$^{\text{ième}}$ loi de Newton à l'ensemble des 4 pneus :

$$\sum F_y = n - mg = ma_y = 0 \qquad \Rightarrow \qquad n = mg$$

Puisque le poids est réparti uniformément sur les 4 pneus :

$$n_{pneu} = \frac{n}{4} = \frac{(mg)}{4} \qquad \Rightarrow \qquad n_{pneu} = \frac{mg}{4}$$

La **partie du caoutchouc** en **contact** avec le **sol n'est pas étirée**. Ceci implique qu'à cet endroit, la membrane n'applique pas de force sur le gaz. Par contre, la force normale applique une pression sur le gaz. C'est cette pression qui sera égale à la pression du gaz à l'intérieur du pneu :

$$P_{normale} = P_{gaz\ pneu} = 250 \times 10^3 \text{ Pa} \qquad \Rightarrow \qquad P_{normale} = \frac{F_{normale}}{A} = \frac{n_{pneu}}{A} = 250 \times 10^3 \text{ Pa}$$

$$\Rightarrow \qquad A = \frac{n_{pneu}}{250 \times 10^3} = \frac{mg/4}{250 \times 10^3}$$

$$\Rightarrow \qquad A = \frac{(2100)(10)/4}{250 \times 10^3} = 0{,}021 \text{ m}^2$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{A = 210 \text{ cm}^2} \qquad \text{a)}$$

Nous pouvons avoir la longueur de contact :

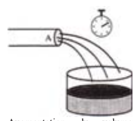
$$A = hL \qquad \Rightarrow \qquad L = \frac{A}{h} = \frac{(0{,}021)}{(0{,}200)} = 0{,}105 \text{ m} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{L = 10{,}5 \text{ cm}} \qquad \text{b)}$$

Chapitre 5.3 – Le débit

Le débit

Le débit est une mesure du taux de variation d'un volume d'un fluide sur un intervalle de temps. Ainsi, le **débit** est **l'agent** qui fait **varier** le **volume** d'un fluide dans le **temps** :

$$D = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$$



Augmentation du volume d'une citerne grace à un débit.

où D : Débit du fluide (m^3/s)
V : Volume du fluide (m^3)
t : Temps (s)

Situation A : ***Le niveau monte.*** Le niveau d'eau d'une cuve de forme cylindrique de 4 m de rayon augmente d'une hauteur de 2 m par heure. On désire évaluer le débit d'eau moyen qui coule dans la cuve en m^3/s.

Évaluons la surface du tuyau cylindrique :

$A = \pi R^2 \quad \Rightarrow \quad A = \pi(4)^2$ (Remplacer valeurs numériques)

$\Rightarrow \quad \boxed{A = 50{,}27\ \mathrm{m}^2}$ (Évaluer A)

Évaluons l'augmentation du volume d'eau de la cuve :

$\Delta V = A\Delta h \quad \Rightarrow \quad \Delta V = (50{,}27)(2)$ (Remplacer valeurs numériques)

$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta V = 100{,}5\ \mathrm{m}^3}$ (Évaluer ΔV)

Évaluons le débit d'eau en m^3/s :

$D = \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{(100{,}5)}{(60 * 60)}$ (Remplacer et $\Delta t = 1\ \mathrm{h} = 3600\ \mathrm{s}$)

$\Rightarrow \quad \boxed{D = 2{,}793 \times 10^{-2}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}}$ (Évaluer D)

Le litre

Le litre est une unité de volume fréquemment utilisé dans le domaine des liquides et des gaz. On utilise la lettre « ℓ » ou « L » pour désigner le litre et sa correspondance un pour un avec le mètre cube est la suivante :

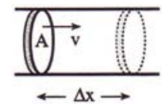
$$1\ \mathrm{cm}^3 = 1\ \mathrm{m}\ell = 1\ \mathrm{mL}$$

$$1\ \mathrm{L} = 1\ \mathrm{L} * \frac{1000\ \mathrm{mL}}{1\ \mathrm{L}} * \frac{1\ \mathrm{cm}^3}{1\ \mathrm{mL}} * \left(\frac{1\ \mathrm{dm}}{10\ \mathrm{cm}}\right)^3 = 1\ \mathrm{dm}^3 = 1 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^3$$

Le débit et la vitesse

On peut également définir le débit D comme étant un élément de surface A se déplaçant avec une vitesse :

$$D = Av$$



où D : Débit du fluide (m^3/s)
A : Surface d'un élément de volume (m^2)
v : Vitesse d'écoulement du fluide (m/s)

Preuve :

À partir de la définition fondamentale du débit, évaluons une autre expression au débit :

$D = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{A\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ (Remplacer $\mathrm{d}V = A\mathrm{d}x$)

$\Rightarrow \quad D = Av \quad \blacksquare$ (Remplacer $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$)

Situation B : ***Un tuyau de pompier.*** Un tuyau de pompier cylindrique possède un rayon de 3 cm. On désire évaluer le débit de l'écoulement de l'eau sachant que l'eau se déplace avec une vitesse moyenne de 1,2 m/s.

Évaluons la surface du tuyau cylindrique :

$A = \pi R^2 \quad \Rightarrow \quad A = \pi(0{,}03)^2$ (Remplacer valeurs numériques)

$\Rightarrow \quad \boxed{A = 2{,}83 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^2}$ (Évaluer A)

Évaluons le débit à partir de la surface et de la vitesse moyenne de l'eau :

$D = A\ v \quad \Rightarrow \quad D = (2{,}83 \times 10^{-3})(1{,}2)$ (Remplacer valeurs numériques)

$\Rightarrow \quad \boxed{D = 3{,}40 \times 10^{-3}\ \mathrm{m}^3/\mathrm{s}}$ (Évaluer D)

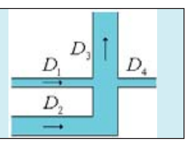
Conservation de la masse

Lorsqu'il y a écoulement d'un liquide incompressible, il ne peut pas y avoir d'accumulation de liquide dans une tuyauterie déjà rempli d'eau. Cela signifie qu'une **quantité d'eau** qui **entre** dans une **surface** doit nécessairement en **ressortir** de **l'autre côté** en **même quantité**. Ainsi, il y a **conservation de la masse** :

$$\sum D_{\text{entrant}} = \sum D_{\text{sortant}}$$

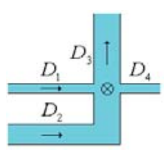
Il y a conservation de la masse dans l'écoulement d'un liquide.

Situation C : ***Le débit inconnu.*** Dans une canalisation circulent quatre débits d'eau orientés selon les directions précisées sur le schéma ci-contre. Sachant que le débit $D_1 = 30\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$, que le débit $D_2 = 70\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$ et que le débit $D_3 = 120\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$, on désire évaluer **(a)** le débit D_4 et **(b)** son orientation.



Appliquons la conservation de la masse au point marqué d'un X :

$$\sum D_{\text{entrant}} = \sum D_{\text{sortant}}$$



Supposons le **courant** D_4 comme **sortant** :

- $\sum D_{\text{entrant}} = D_1 + D_2 = (30) + (70) = 100\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}$
- $\sum D_{\text{sortant}} = D_3 + D_4 = (120) + D_4 = 120 + D_4$

Nous avons ainsi l'égalité suivante :

$\sum D_{\text{entrant}} = \sum D_{\text{sortant}} \quad \Rightarrow \quad 100 = 120 + D_4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{D_4 = -20\ \mathrm{cm}^3/\mathrm{s}}$

(a) Le courant D_4 est égal à 20 cm^3/s.

(b) Le courant D_4 n'est pas un courant sortant, car le résultat obtenu avec la conservation de la masse **est négatif**. Cela signifie que notre **hypothèse** était **fausse**. Le courant D_4 est donc un débit entrant et orienté vers la **gauche**.

Changement de vitesse dans un tuyau

Lorsqu'un tuyau changement de dimension, le débit D demeure constant tout au long du tuyau par conservation de la masse. Cependant, la vitesse de l'écoulement de l'eau variera en fonction de la taille du tuyau par $D = Av$.

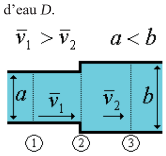
- Surface A du tuyau $\uparrow \quad \Rightarrow \quad$ vitesse v de l'écoulement $\downarrow$.
- Surface A du tuyau $\downarrow \quad \Rightarrow \quad$ vitesse v de l'écoulement $\uparrow$.

Exemple : Tuyau à surface carré parcouru par un débit d'eau D.

Position 1 : $\bar{v}_1 = \frac{D}{a^2}$

Position 2 : $\sum D_{\text{entrant}} = D$ et $\sum D_{\text{sortant}} = D$

Position 3 : $\bar{v}_2 = \frac{D}{b^2}$



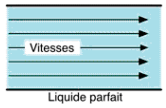
Chapitre 5.4 – L'écoulement des fluides sans viscosité

Fluide parfait et visqueux

Les fluides qui circulent dans les tuyaux ne sont pas parfaits. Cela signifie que le **module** de la **vitesse** des différents volumes du fluide n'est **pas toujours uniforme**.

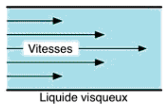
Fluide parfait :

Fluide ayant **aucune interaction** avec les **parois** du guide d'écoulement (le tuyau). Les volumes du fluide se déplacent tous à la même vitesse. Il n'y a **pas** de **résistance** à l'écoulement du fluide.



Fluide visqueux :

Fluide ayant une **interaction** avec les **parois** du guide d'écoulement (le tuyau). La vitesse des volumes du fluide près du guide est inférieure à la vitesse des volumes du fluide au centre du guide. La **viscosité** représente une **résistance** à l'écoulement du fluide.

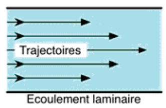


Régime d'écoulement

Les fluides ne s'écoulent pas toujours avec un régime stable (écoulement régulier). Cela signifie que la **trajectoire** des volumes du fluide n'est **pas toujours rectiligne**.

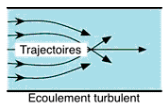
Écoulement laminaire :

Fluide se déplaçant **uniquement** dans le **sens** du **guide d'écoulement** (même sens que le tuyau). Il y a glissement entre les différentes couches de volume du fluide sans croisement. Ce mode d'écoulement se fait habituellement à **débit faible**.



Écoulement turbulent :

Fluide se déplaçant dans le **sens** du **guide d'écoulement**, **mais** avec des **trajectoires** non rectiligne. Il y aura croisement de trajectoire pour l'ensemble des couches de volume de fluide en mouvement ce qui occasionne des interactions entre les volumes de fluide et des **collisions** sur les **parois** du guide d'écoulement. Ces collisions peuvent occasionner du **bruit**. Ce type d'écoulement est très dur à analyser.



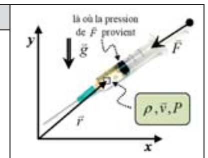
La mécanique des fluides

Contrairement à la mécanique classique ou l'objectif est de décrire le mouvement d'une particule se déplaçant dans l'espace, la mécanique des fluides tend à décrire l'évolution dans le temps en un endroit de l'espace les propriétés physiques des fluides qui voyageront dans l'espace en question.

Cette théorie permet d'appliquer des forces aux fluides afin d'y définir la pression et la cinématique des fluides circulant dans l'espace en étude permet d'y décrire des **mouvements ondulatoires** et **turbulents**.

http://www.laterredufutur.com/accueil/formation-et-explication-dune-tornade-a-multi-vortex/tornade-4/
La mécanique des fluides permet de comprendre la formation d'une tornade.

Propriété de l'espace	Propriété physique du fluide
• Coordonnée dans le fluide $\vec{r}(x, y, z)$ • Temps t	• Masse volumique (densité) ρ • Vitesse du fluide $\vec{v}$ • Pression du fluide P



http://jadaperlas.com/fr/france-un-eleve-pique-ses-camarades-avec-une-seringue-trouvee-dans-un-bus/

La densité d'énergie cinétique d'un fluide

La densité d'énergie cinétique $\widetilde{K}$ d'un fluide correspond à l'énergie cinétique transportée par une densité de masse ρ de fluide en mouvement à vitesse v occupant un volume dV et ayant une masse totale dm :

$$\widetilde{K} = \frac{1}{2}\rho v^2$$

où $\widetilde{K}$: Densité d'énergie cinétique du fluide (J/m^3)
ρ : Masse volumique du fluide (kg/m^3) ($\rho = m/V$)
v : Vitesse du fluide (m/s)

Preuve :

À partir de la définition de l'énergie cinétique, appliquons ce concept à une densité masse ρ :

$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow \left(\frac{1}{V}\right)K = \left(\frac{1}{V}\right)\frac{1}{2}mv^2$ (Diviser par le volume V occupé par m)

$\Rightarrow \widetilde{K} = \frac{1}{2}\rho v^2$ ■ (Remplacer $\widetilde{K} = \frac{K}{V}$ et $\rho = \frac{m}{V}$)

Effet Venturi

Lorsqu'un fluide parfait incompressible s'écoule le long d'une canalisation, la densité énergétique totale du fluide est constante. Puisque celui-ci doit circuler à plus haute vitesse lorsque la canalisation rétrécie ($D = Av$) afin de maintenir le débit constant ($D =$ constant), le fluide doit nécessairement augmenter sa densité d'énergie cinétique.

https://en.wikipedia.org/wiki/Giovanni_Battista_Venturi
Giovanni Battista Venturi
(1746-1822)

Ainsi, la pression P du fluide correspond alors à une densité d'énergie potentielle qui peut être transformée temporairement en densité d'énergie cinétique pour maintenir le débit constant.

Cette découverte est historiquement associée au physicien italien Giovanni Battista Venturi.

Voici l'équation qui en découle :

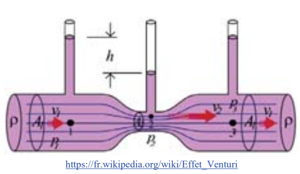
$$\widetilde{E} = P + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante}$$

Une bouteille vaporisateur exploite l'effet Venturi

où $\widetilde{E}$: Densité d'énergie (J/m^3)
P : Pression exercée sur le fluide (Pa)
ρ : Masse volumique du fluide (kg/m^3) ($\rho = m/V$)
v : Vitesse du fluide (m/s)

Fluide parfait :

- $D_1 = D_2$
- $A_1 > A_2$
- $v_1 < v_2$
- $P_1 > P_2$
- $P_2 = P_1 - \rho gh$
- $P_1 = P_3$



https://fr.wikipedia.org/wiki/Effet_Venturi

Preuve :

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique à un fluide incompressible sous l'action d'un travail conservatif associé à une pression externe :

$W = \Delta K \Rightarrow W_P = \Delta K$ (Travail de la pression : $W = W_P$)

$\Rightarrow -\Delta U_P = \Delta K$ (Travail conservatif : $W = -\Delta U$)

$\Rightarrow \frac{-\Delta U_P}{V} = \frac{\Delta K}{V}$ (Diviser par le volume V)

$\Rightarrow -\Delta\frac{U_P}{V} = \Delta\frac{K}{V}$ (Distribuer $1/V$)

$\Rightarrow -\Delta P = \Delta\widetilde{K}$ ($P = \frac{U_P}{V}$ et $\widetilde{K} = \frac{K}{V}$)

$\Rightarrow -(P_2 - P_1) = \widetilde{K}_2 - \widetilde{K}_1$ ($\Delta X = X_2 - X_1$)

$\Rightarrow P_1 + \widetilde{K}_1 = P_2 + \widetilde{K}_2$ (Regrouper 1 et 2)

$\Rightarrow P + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante}$ ■ (Remplacer $\widetilde{K} = \frac{1}{2}\rho v^2$)

La densité énergétique gravitationnelle d'un fluide

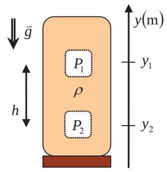
La densité énergétique $\widetilde{E}$ d'un fluide parfait incompressible est constante pour l'ensemble du fluide même s'il y a des variations de hauteurs dans le fluide. Ceci s'explique par le fait que la diminution de la densité énergétique gravitationnelle du fluide se fait au rythme de l'augmentation de la pression causée par la gravité elle-même :

$$\widetilde{E} = P + \rho g y = \text{constante}$$

où $\widetilde{E}$: Densité d'énergie (J/m^3)
P : Pression exercée sur le fluide (Pa)
ρ : Masse volumique du fluide (kg/m^3)
g : Accélération gravitationnelle (m/s^2)
y : Position verticale du fluide (m)

Preuve :

Considérons une colonne d'un fluide incompressible de masse volumique ρ. Évaluons la densité énergétique du fluide pour différente hauteur et vérifions qu'elle est constante à partir de la variation de la pression causée par la gravité :



$$\Delta P_g = \pm \rho g h \quad \Rightarrow \quad P_2 = P_1 + \rho g h$$

$$\Rightarrow \quad P_2 = P_1 + \rho g (y_1 - y_2)$$

$$\Rightarrow \quad P_2 + \rho g y_2 = P_1 + \rho g y_1$$

$$\Rightarrow \quad P + \rho g y = \text{constante} \quad \blacksquare$$

Équation de Bernoulli

En 1738, le médecin-physicien-mathématicien Daniel Bernoulli établie un lien entre un changement de pression d'un fluide et son accélération. Dans une canalisation, un fluide incompressible parfait en écoulement non turbulent et laminaire respecte un principe de conservation d'énergie par unité de volume permettant d'établir la relation constante suivante :

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante}$$

où P : Pression du fluide incompressible (Pa)
ρ : Masse volumique du fluide (kg/m^3)
v : Vitesse de l'écoulement du fluide (m/s)
g : Accélération gravitationnelle (m/s^2)
y : Hauteur du fluide (m)

https://fr.wikipedia.org/wiki/Daniel_Bernoulli
Daniel Bernoulli
(1700-1782)

Preuve : (par assemblage de preuve)

Lors d'un écoulement d'un fluide incompressible parfait, il y a les relations suivantes qui ont été démontrées :

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante} \quad \text{et} \quad P + \rho g y = \text{constante}$$

Si l'on regroupe ces deux processus de variation de pression qui sont des mécanismes conservatifs, nous pouvons conclure que :

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{constante} \qquad \blacksquare$$

Chapitre 5.5 – L'écoulement des liquides avec viscosité

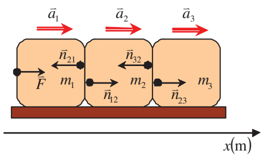
Théorème de la l'écoulement horizontal des fluides

Le théorème de l'écoulement horizontal dans un système subissant une variation de pression s'énonce de la façon suivante :

> *Dans un système de masses incompressibles horizontales de surface identique, il y aura écoulement s'il y a une variation de pression le long de l'axe horizontal. L'écoulement s'effectue toujours dans le sens décroissant de la pression.*

Preuve :

Considérons un groupe de 3 cubes de surface A alignés horizontalement. On applique une force $\vec{F}$ du côté gauche afin de pousser les cubes vers le mur. Les cubes sont incompressibles (le volume ne change pas sous la présence d'une force).



À partir de la 2ième loi de Newton selon l'axe x ($\sum F_x = ma_x$), évaluons les forces normales de contact entre les cubes. Puisque tous les cubes sont incompressibles, ils auront tous la même accélération a_x :

Bloc m_1	Bloc m_2	Bloc m_3
$F - n_{21} = m_1 a_x$	$n_{12} - n_{32} = m_2 a_x$	$n_{23} = m_3 a_x$

En utilisant la 3ième loi de Newton ($\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$), nous pouvons évaluer l'accélération des blocs après avoir additionné toutes nos équations. Voici l'expression de l'accélération :

$$F = (m_1 + m_2 + m_3)a_x$$

Supposons que tous les blocs ont la même masse. L'accélération a_x aura la forme suivante :

$$m = m_1 = m_2 = m_3 \quad \Rightarrow \quad F = (3m)a \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = F/3m}$$

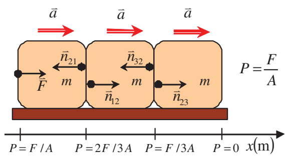
À partir de cette accélération, évaluons la force normale appliquée sur chacun des surfaces de nos blocs :

$$n_{23} = m_3 a_x \quad \Rightarrow \quad n_{23} = (m)(F/3m) \quad \Rightarrow \quad \boxed{n_{23} = F/3}$$

$$n_{12} - n_{32} = m_2 a_x \quad \Rightarrow \quad n_{12} - (F/3) = (m)(F/3m) \quad \Rightarrow \quad \boxed{n_{12} = 2F/3}$$

$$F - n_{21} = m_1 a_x \quad \Rightarrow \quad F - (2F/3) = (m)(F/3m) \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = 3F/3}$$

Évaluons la pression sur l'ensemble des surfaces verticales des différents cubes :



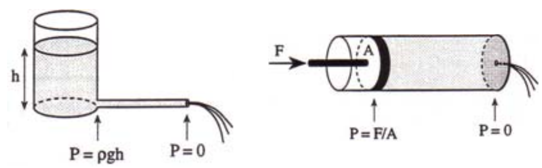
Constatations :

- La pression mesurée sur l'axe x dépend de la force externe $\vec{F}$ appliquée ($P_{externe} = F/A$).
- Puisque les masses des blocs sont identiques, la variation de pression entre chaque bloc est constante ($|\Delta P| = F/3A$, le nombre 3 représente le nombre de bloc).
- Les blocs accélèrent dans le sens décroissant de la pression.

On peut ainsi conclure que l'accélération des blocs sera dans le sens décroissant de la variation de la pression. ■

Écoulement sous une différence de pression

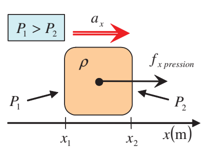
Lorsqu'il y aura une différence de pression aux extrémités d'un tuyau rempli d'eau à section ouverte, il y aura écoulement d'un liquide :



1) Les pressions indiquées sur les schémas sont des **pressions relatives**.
2) La pression $P = \rho g h$ est **valide seulement lorsque** l'extrémité droite du tube est bouchée. Lorsqu'elle est ouverte, la pression diminue car la colonne de liquide n'est plus immobile en raison d'une augmentation de l'énergie cinétique dans la colonne de liquide.

Force de pression

La **force de pression** est une **force** par unité de **volume** associée à une variation de pression. Celle-ci peut être évaluée grâce à la **variation de pression** ΔP par unité de **longueur** Δx. Il est important de noter que la force de pression est **orientée** dans le **sens décroissant** de la **variation de pression**. De plus, la force de pression ne s'applique pas sur une masse mais sur densité de masse[1] (masse volumique) ρ :



Selon l'axe x : $$f_{x\,pression} = -\frac{\Delta P}{\Delta x}$$

Vectorielle[2] : $$\vec{f}_{pression} = -\vec{\nabla} P$$

où ΔP : Variation de pression (Pa) ($\Delta P = P_2 - P_1$)
Δx : Variation de position (m) ($\Delta x = x_2 - x_1$)
$f_{x\,pression}$: Force de pression (N/m^3)
ρ : Masse volumique (kg/m^3)

Résistance d'un liquide dans un tuyau

Expérimentalement, on réalise que si l'on applique une **différence de pression** aux **extrémités d'un tuyau** rempli d'eau à section ouverte, l'eau s'écoule avec un **débit constant** (le débit de l'eau provenant d'un robinet est constant). Puisque le débit D dans le tuyau est initialement nulle et devient constant très rapidement, cela signifie qu'il y a de la **résistance** dans le processus d'écoulement d'un liquide dans un tuyau.

Stabilisation très rapide d'une debit constant après l'ouverture d'un robinet.

Le frottement appliqué par les parois du tuyau sur le liquide provient de la **viscosité** (adhérence du liquide avec les parois) du liquide. Expérimentalement, on constante que la force de viscosité de pression f_{vis} est une fonction du débit du liquide D, du rayon r du tuyau et du régime d'écoulement :

$$f_{vis} = f_{vis}(D, r) \quad \text{et} \quad [f_{vis}] = \text{N/m}^3$$

Analogie :

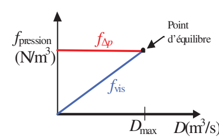
On peut comparer le débit constant dans un tuyau à une vitesse limite atteinte lors d'un saut en parachute lorsque la résistance de l'air est égale à la force gravitationnelle.

[1] La preuve sera présentée à la page suivante à l'aide de la 2ième loi de Newton.
[2] Le gradient ($\vec{\nabla}$) est un opérateur sur une fonction scalaire et produit une fonction vectorielle. On définit le gradient en coordonnée cartésienne (x, y, z) de la façon suivante : $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$

Lorsqu'on applique une différence de pression aux deux extrémités d'un tuyau, le débit évolue de la façon suivante :

1) Accélération :
Lorsque le débit est faible, la force de pression causée par la différence de pression est supérieure à la force de viscosité de pression et le fluide peut accélérer. Le débit augmentera.

2) Débit maximum :
Lorsque le débit est maximum, la force causée par la différence de pression est égale à la force de frottement et le liquide ne peut pas accélérer. Le débit est alors maximisé.

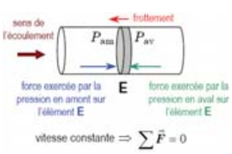


La résistance hydraulique

Un fluide visqueux s'écoulera en régime stationnaire non turbulent à un débit D constant proportionnelle à la différence de pression ΔP qu'il subit et en proportion inverse à la résistance hydraulique associé à l'écoulement :

$$\Delta P = -R\,D$$

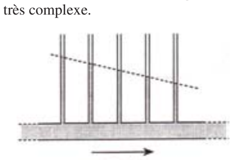
(lorsque $\sum \vec{f} = 0$, régime stationnaire)



où ΔP : Variation de la pression aux extrémités du tuyau (Pa)
D : Débit du liquide à l'équilibre (m^3/s)
R : Résistance hydraulique associée à la section de tuyau ($\text{Pa} \cdot \text{s}/\text{m}^3$)

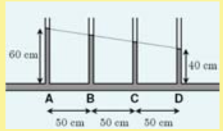
Remarque :

1) Le signe négatif signifie qu'un débit positif (bonne orientation) représente un écoulement de la pression la plus élevée vers la pression la moins élevée.
2) La **résistance hydraulique** R dépend de la **taille**, de la **forme** et la **longueur** de la canalisation, des **propriétés du fluide** (comme la viscosité) et du **régime d'écoulement**. L'expression mathématique peut être très complexe.
3) Dans un tuyau uniforme à **écoulement laminaire** :
   - La résistance hydraulique est constante le long de la canalisation.
   - La différence de pression varie de façon constante.
   - On peut mesurer l'évolution de la perte de pression pour lutter contre la force de pression de viscosité du fluide grâce au principe de pression hydrostatique.



Réduction de la pression lors d'un écoulement laminaire visqueux dans une canalisation régulière.

Situation 2 : *La diminution de la pression*. Du mercure ($\rho = 13600$ kg/m^3) circule de gauche à droite dans un tuyau horizontal (schéma ci-contre) avec un débit de 3 cm^3/s. À intervalles de 50 cm le long du tuyau horizontal se trouvent quatres tubes verticaux (**A**, **B**, **C** et **D**) ouverts dans le haut. Dans le tube **A**, le mercure s'élève à 60 cm; dans le tube **D**, situé 1,5 m plus loin, le mercure s'élève à 40 cm. On désire déterminer la résistance hydraulique de la portion de tuyau située entre le tube **A** et le tube **D**.



Évaluons la pression relative dans le bas du tube **A** :

$\tilde{P}_A = \rho g h_A \quad \Rightarrow \quad \tilde{P}_A = (13600)(9,8)(0,60) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tilde{P}_A = 7,997 \times 10^4 \text{ Pa}}$

Évaluons la pression relative dans le bas du tube **D** :

$\tilde{P}_D = \rho g h_D \quad \Rightarrow \quad \tilde{P}_D = (13600)(9,8)(0,40) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tilde{P}_D = 5,331 \times 10^4 \text{ Pa}}$

Évaluons le débit en m^3/s :

$$D = 3 \text{ cm}^3/\text{s} \times \left(\frac{1\,\text{m}}{100\,\text{cm}}\right)^3 = 3 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$$

Évaluons la résistance hydraulique de la portion de tuyau située entre **A** et **D** :

$\Delta P = -R D \quad \Rightarrow \quad (P_D - P_A) = -R D$ (Remplacer $\Delta P = P_D - P_A$)

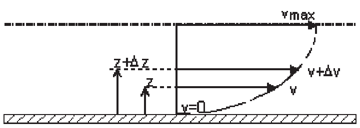
$\Rightarrow \quad (5,331 \times 10^4) - (7,997 \times 10^4) = -R(3 \times 10^{-6})$ (Remplacer val. num.)

$\Rightarrow \quad \boxed{R = 8,887 \times 10^9 \text{ Pa} \cdot \text{s/m}^3}$ (Évaluer R sur 1,5 m)

Profil de vitesse dans l'écoulement laminaire

En construction …

$v = v(z)$ tel que $v(z = \text{"centre"}) = v_{max}$



Dans ce schéma, on considère la vitesse près des parois à $v(z = 0) = 0$

La loi de Poiseuille

En 1844, le médecin français Jean-Louis-Marie Poiseuille permet d'établir expérimentalement une loi régissant **l'écoulement laminaire** en régime stationnaire des fluides **visqueux** dans des **tubes** (tuyau à ouverture circulaire). Ayant effectué son expérimentation sur l'écoulement sanguin, Poiseuille fut en mesure d'établir un lien entre le **débit sanguin** D et la **variation de pression** sanguine ΔP le long d'un vaisseau sanguin de **longueur** L. Les variations de pression dépendaient également de la **viscosité** du sang η ainsi que du **rayon** r du vaisseau sanguin :

Jean-Louis-Marie Poiseuille (1797-1869)

$$\Delta P = -R\,D \qquad \text{et} \qquad R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$$

où
- ΔP : Variation de la pression aux extrémités du tuyau (Pa)
- η : Viscosité du liquide (Ns/m^2)
- L : La longueur du tuyau (m)
- r : Rayon du tuyau (m)
- D : Débit du liquide à l'équilibre (m^3/s)

Preuve :

En construction …

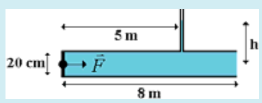
Profil de vitesse : $v(r) = v_{max}\left(1 - r^2 / R^2\right)$ où R : Rayon du tuyau circulaire

La viscosité de fluide

La viscosité représente une résistance à un écoulement laminaire d'un fluide. Il est important de préciser que la viscosité dépend de plusieurs facteurs comme la température :

Substances	Viscosité η (Ns/m^2)	Température (C)
Eau	0,001	20
Plasma sanguin	0,0015	37
Sang	0,004	37
Mercure	0,0015	20
Air	0,000018	20

Situation B : *La hauteur de la colonne d'eau*. Un piston cylindrique de 20 cm de diamètre pousse de l'eau contenue dans un tuyau cylindrique de 8 m de long avec une force de 50 N. Une petite cheminée est située à 5 m du piston. On désire évaluer la hauteur de la colonne d'eau qui s'élèvera dans la cheminée. (On suppose l'approximation de la loi de Poiseuille valide.)



Évaluons la **pression relative** (retirer la pression atmosphérique) au piston ($x = 0$) :

$P_0 = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi R^2} \quad \Rightarrow \quad P_0 = \frac{(50)}{\pi (0,10)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_0 = 1,59 \times 10^3 \text{ Pa}}$

Nous avons la **pression relative** suivante en haut de la colonne d'eau et au bout du tuyau ($x = 8$) :

$$P_8 = P_{haut\ colonne} = 0 \text{ Pa}$$

Nous pouvons évaluer la différence de pression aux deux extrémités du tuyau :

$\Delta P = P_8 - P_0 \quad \Rightarrow \quad \Delta P = (0) - (1,59 \times 10^3) \Rightarrow \quad \boxed{\Delta P = -1,59 \times 10^3 \text{ Pa}}$

Nous pouvons évaluer le débit d'eau dans le tuyau :

$\Delta P = -\frac{8\eta L}{\pi r^4} D \quad \Rightarrow \quad D = -\Delta P \frac{\pi r^4}{8\eta L}$

$\Rightarrow \quad D = -(-1,59 \times 10^3)\frac{\pi (0,10)^4}{8(0,001)(8)}$

$\Rightarrow \quad \boxed{D = 7,80 \text{ m}^3/\text{s}}$

Puisque le **débit est constant** dans un tuyau, nous pouvons évaluer la **pression relative** à 5 m du piston ($x = 5$):

$\Delta P = -\frac{8\eta L}{\pi r^4} D \quad \Rightarrow \quad P_5 - P_0 = -\frac{8\eta L}{\pi r^4} D$

$\Rightarrow \quad P_5 = -\frac{8\eta L}{\pi r^4} D + P_0$

$\Rightarrow \quad P_5 = -\frac{8(0,001)(5)}{\pi (0,1)^4}(7,80) + (1,59 \times 10^3)$

$\Rightarrow \quad \boxed{P_5 = 0,60 \times 10^3 \text{ Pa}}$

Puisque l'eau à cet endroit peut monter dans la cheminée, la pression en bas de la cheminée doit être égale à la pression produite par la colonne d'eau :

$P_5 = P_{haut\ colonne} + \rho g h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{P_5 - P_{haut\ colonne}}{\rho g}$

$\Rightarrow \quad h = \frac{(0,60 \times 10^3) - (0)}{(1000)(9,8)}$

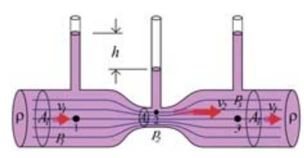
$\Rightarrow \quad \boxed{h = 0,061 \text{ m}}$

Effet Venturi avec résistance

Lors de l'effet Venturi, la réduction de l'ouverture d'une canalisation peut augmenter localement la résistance hydraulique et occasionner une perte de pression permanente pour des causes de viscosité. La pression du fluide après son passage dans le venturi va augmenter, mais pas à sa valeur initiale (avant le passage dans la zone de résistance) en raison d'une perte de densité énergétique.

Avec liquide parfait :

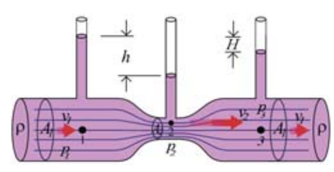
- $D_1 = D_2$
- $A_1 > A_2$
- $v_1 < v_2$
- $P_1 > P_2$
- $P_2 = P_1 - \rho g h$
- $P_1 = P_3$



Avec liquide visqueux : (chute de pression par résistance hydraulique, $\Delta P = -RD$)

- $D_1 = D_2$
- $A_1 > A_2$
- $v_1 < v_2$
- $P_1 > P_2$
- $P_2 = P_1 - \rho g h$
- $P_3 = P_1 - \rho g H$

où $\rho g H = RD$



Chapitre 5.6 – Applications de l'hydrostatique

Transfusion sanguine

Pour effectuer une transfusion de sang à un patient, on utilise la force gravitationnelle :

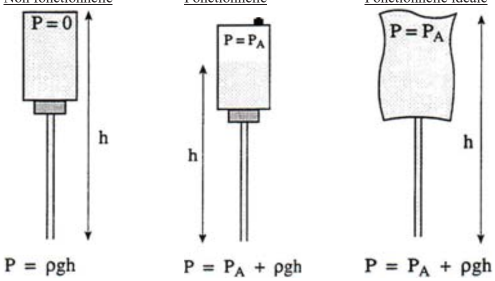
1) Remplir un contenant avec le sang à administrer.
2) Suspendre le contenant à une hauteur supérieure au patient.
3) Raccorder le contenant à un tube d'écoulement.

Le choix du contenant est très important. Pour avoir un **écoulement**, il faut **briser l'équilibre statique** :

Écoulement vers le bas si : $P_{extérieur\ tube} < P_{haut\ contenant} + \rho g h$

Explication : Si la pression à l'extérieur du tube d'écoulement ne peut pas supporter la colonne de liquide, il y aura écoulement.

Bouteille rigide (sans entrée d'air)	Bouteille rigide (avec entrée d'air)	Bouteille de plastique souple (sans entrée d'air)
Non fonctionnelle	Fonctionnelle	Fonctionnelle idéale



- On branche le tube d'écoulement à une **veine** du patient, car la **pression sanguine** dans les veines est **légèrement supérieure** à la **pression atmosphérique**. Ceci empêche le sang de monter dans le contenant. Pour faciliter ou accélérer l'écoulement, il est préférable de suspendre le contenant à une hauteur très élevée (usage de support mobile).

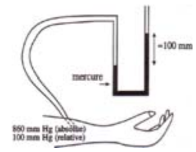
- Il est préférable d'utiliser une bouteille de plastique souple, car ceci empêche de mélanger le sang avec des contaminants (bactéries, poussières) provenant de l'air.

Pression sanguine en mode hydrostatique

Afin de mesurer la **pression sanguine** produite par le **cœur** (pression cardiaque moyenne), il est possible d'introduire dans **l'artère** d'un bras une **canule** (petit tube stérilisé) relié à un **manomètre en U**. La **pression** générée par le cœur pousse la colonne de mercure et une lecture de **pression relative** est possible. Il est important de réaliser que cette mesure de **pression** est **hydrostatique** (pression d'un liquide immobile) :

$$P_{relative} = h$$

où $P_{relative}$: Pression relative (mm Hg)
h : Hauteur de la colonne de mercure (mm)



Rappel : $1\ \text{mmHg} = 133\ \text{Pa}$
$1\ \text{atm} = 760\ \text{mm de Hg}$

- Typiquement, cette **pression relative** pour un patient est d'environ **100 mm Hg**.
- Cette pression est égale à la pression générée par **l'extension des vaisseaux sanguins**.
- La **pression sanguine absolue** (pression cardiaque moyenne) est typiquement égale à **860 mm Hg** ($P_{atmosphérique} + P_{relative}$).

L'oreille et les changements de pression

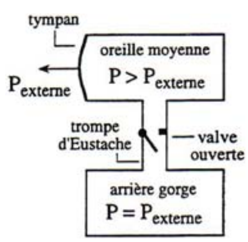
L'oreille est l'organe qui permet d'analyser la vibration des molécules d'air en traduisant cette information sous forme de « son ». Pour bien vibrer, le tympan doit être non déformé. Ainsi, l'oreille doit ajuster constamment sa pression interne afin d'être égale à la pression externe.

Baisse de pression du milieu externe

- Prendre de l'altitude en avion.
- Remonter à la surface de l'eau.

Mécanisme de régulation de la pression :

1) Le tympan est déformé vers **l'extérieur**.
2) Un **surplus d'air** est localisé dans **l'oreille moyenne**.
3) Transfert d'air de l'oreille moyenne à l'arrière gorge via un petit canal appelé trompe d'Eustache. La trompe d'Eustache se comporte comme une valve en position ouverte.
4) **Baisse de la pression** dans **l'oreille moyenne**.
5) Tympan retrouve sa forme normale.

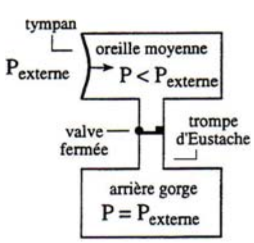


Hausse de pression du milieu externe

- Perdre de l'altitude en avion.
- Plonger sous l'eau.

Mécanisme de régulation de la pression :

1) Le tympan est déformé vers **l'intérieur**.
2) Un **manque d'air** est localisé dans **l'oreille moyenne**.
3) Transfert difficile de l'air provenant de l'arrière gorge à l'oreille moyenne, car la trompe d'Eustache se comporte comme une petite valve en position fermée. Ceci occasionne des **douleurs**.
4) Déblocage mécanique de la trompe d'Eustache en avalant, mâchant ou en baillant.
5) **Hausse de la pression** dans **l'oreille moyenne**.
6) Tympan retrouve sa forme normale.



Les Poumons

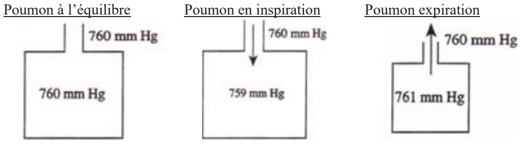
Le rôle des poumons est d'effectuer les échanges gazeux du système. Ce mécanisme fonctionne via une **différence de pression** entre la pression à **l'intérieur des poumons** et la pression à **l'extérieur des poumons**.

La pression à l'intérieur des poumons dépend du volume de chaque poumon. À l'aide de l'équation des gaz parfaits ($PV = nRT$), nous pouvons comprendre le mécanisme d'inspiration et d'expiration. Puisque la pression tend toujours à s'équilibrer, il y aura **échange gazeux** du milieu à **haute pression <u>vers</u>** le milieu à **basse pression**.

- À l'équilibre, le volume du poumon est tel que la pression du gaz dans le poumon est égale à la pression extérieure. Pas d'échange gazeux.
- $\uparrow V_{poumon} \Rightarrow \downarrow P_{poumon} \Rightarrow$ inspiration ($\uparrow$ % O_2) ($P_{poumon} < P_{extérieur}$)
- $\downarrow V_{poumon} \Rightarrow \uparrow P_{poumon} \Rightarrow$ expiration ($\downarrow$ % CO_2) ($P_{poumon} > P_{extérieur}$)

Schéma : Pression à l'équilibre : $P_{équilibre} = P_A = 101\ \text{kPa} = 760\ \text{mm de Hg}$
Variation de pression : $\Delta P = \pm 1\ \text{mm de Hg}$ (respiration normale)

Poumon à l'équilibre | Poumon en inspiration | Poumon expiration



Mécanisme détaillé de la respiration

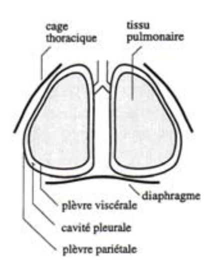
Plèvre viscérale : Membrane qui entoure le tissu pulmonaire.

Plèvre pariétale : Membrane qui entoure la plèvre viscérale.

Cavité pleurale : Cavité à pression relative négative **empêchant l'affaissement des tissus pulmonaire** et **contrôlant** le **volume du poumon**.

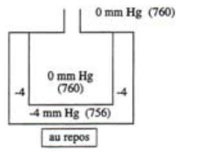
Diaphragme : Muscle qui augmente ou diminue le volume de la cavité pleurale.

Cage thoracique : Augmente ou diminue le volume de la cavité pleurale via les muscles respiratoires.



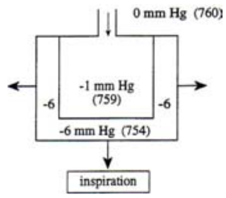
Pression aux repos

- La pression relative à l'intérieur des poumons est de 0 mm Hg (pression atmosphérique de 760 mm Hg).
- La cavité pleurale possède une pression relative de -4 mm Hg.
- **Le tissu pulmonaire est étiré au repos**. Le tissu pulmonaire applique une pression de 4 mm Hg sur le gaz dans les poumons



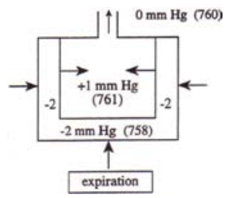
Poumon en inspiration normale

1) Augmentation du volume de la cavité pleurale (diaphragme et muscles de la cage thoracique tirent sur la plèvre pariétale).
2) Réduction de la pression relative à l'intérieur de la cavité pleurale (-4 mm Hg $\rightarrow$ -6 mm Hg).
3) Augmentation du volume des poumons ($\uparrow V_{poumon}$).
4) Réduction de la pression relative à l'intérieur des poumons (0 mm Hg $\rightarrow$ -1 mm Hg).
5) L'air externe entre dans les poumons jusqu'à ce que la pression relative à l'intérieur des poumons soit égale à 0 mm Hg ($P_{poumon} = P_{extérieur}$).



Poumon en expiration normale

1) Réduction du volume de la cavité pleurale (diaphragme et muscles de la cage thoracique pousse sur la plèvre pariétale).
2) Augmentation de la pression relative à l'intérieur de la cavité pleurale (-6 mm Hg $\rightarrow$ -2 mm Hg).
3) Réduction du volume des poumons ($\downarrow V_{poumon}$).
4) Augmentation de la pression relative à l'intérieur des poumons (0 mm Hg $\rightarrow$ +1 mm Hg).
5) L'air sort des poumons jusqu'à ce que la pression relative à l'intérieur des poumons soit égale à 0 mm Hg ($P_{poumon} = P_{extérieur}$).



La plongée sous-marine

La respiration est possible grâce au diaphragme et aux muscles de la cage thoracique. Ceux-ci déforment la cavité pleurale ce qui a pour conséquence de déformer le volume des poumons. Si le volume des poumons augmente, l'air peut entrer dans les poumons.

Fait expérimental :

- Lorsque la pression extérieure dépasse la pression des poumons d'environ **85 mm Hg**, les muscles ne sont plus assez forts pour augmenter le volume des poumons (extension des poumons) et le sujet ne peut plus respirer, car **l'air ne peut plus entrer**.
- Lorsque la pression des poumons dépasse la pression extérieure d'environ **85 mm Hg**, les muscles ne sont pas assez forts pour diminuer le volume des poumons (compression des poumons) et le sujet ne peut plus respirer, car **l'air ne peut plus sortir**.

Plongée avec tuba

La pression de l'air respiré en plongée avec tuba est toujours égale à la **pression atmosphérique**, car le plongeur prend son **air** à la **surface de l'eau**. Ainsi, le plongeur est confronté à **respirer** de **l'air** dont la **pression est inférieure** à la **pression extérieure de l'eau** :

$$P_{poumon} = P_{air} = 760 \text{ mm Hg}$$
$$P_{eau} = P_{air} + \rho g h$$

Situation A : *La profondeur critique*. Un plongeur effectue de la plongée sous-marine avec un tuba de 1,0 m de long. La distance entre sa bouche et ses poumons est de 30 cm. Le plongeur peut respirer si la différence de pression entre l'eau et la pression à l'intérieur de ses poumons est inférieure à 85 mm Hg. On désire déterminer si le plongeur peut respirer à cette profondeur.

Les poumons sont situés à la distance suivante de la surface :
$h = L_{tuba} + d_{poumon-bouche} = (1,0) + (0,3) = 1,3 \text{ m}$

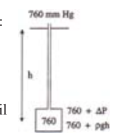
Évaluons notre différence de pression :
$\Delta P = P_{eau} - P_{poumon} = (P_A + \rho g h) - (P_A) = \rho g h = (1000)(9,8)(1,3) = 12,7 \times 10^3 \text{ Pa}$

Nous pouvons évaluer rapidement la différence de pression en mm Hg :

$\Delta P = 12700 \text{ Pa} = 12700 \text{ Pa} * \dfrac{1 \text{ mmHg}}{133 \text{ Pa}} = 95,5 \text{ mm Hg}$

Puisque : $\Delta P = 95,5 \text{ mm Hg} > 85 \text{ mm Hg}$

Le plongeur ne peut pas respirer. Pour respirer confortablement, il faut que la différence de pression soit inférieure à environ 40 mm Hg.



Plongée sous-marine avec bouteille

Pour effectuer de la plongée sous-marine à grande profondeur, il faut utiliser une technique plus sophistiquée que l'usage d'un tuba, car la pression externe exercée par l'eau augmente très rapidement en fonction de la profondeur.

Ex : 30 m de profondeur ($1 \text{ atm} = 101 \text{ kPa}$)

$$P_{eau} = P_A + P_{gravitationnelle} = P_A + \rho g h = (101 \times 10^3) + (1000)(9,8)(30) = 395 \text{ kPa}$$

$$\Rightarrow \quad P_{eau} = 3,91 \text{ atm}$$

Remarque : De façon approximative, on remarque que la pression de l'eau s'élève de 1 atm pour chaque tranche de 10 m de profondeur.

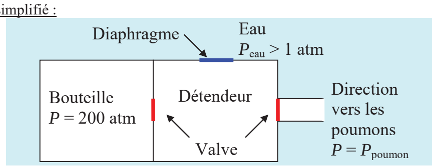
La bouteille d'air :

La bouteille d'air est un contenant métallique en forme de cylindre (plus résistant à la pression de l'air) contenant une grande quantité d'air causant une très grande pression sur son contenant. L'objectif de la bouteille est de **fournir l'air** au **plongeur** afin que celui-ci puisse **respirer**.

Le détendeur :

Le détendeur est une chambre de dépressurisation permettant à une petite quantité d'air contenu dans la bouteille d'atteindre une pression particulière. L'objectif du détendeur est de **fournir l'air** au plongeur à la **pression de l'eau** (variable selon la profondeur) afin d'aider les muscles respiratoires à fonctionner normalement (comme à la surface).

Schéma simplifié :



Description :

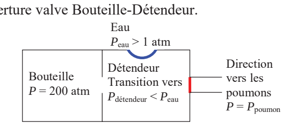
Bouteille : Contenant pour l'air. Ce gaz est pressurisé à 200 atm environ.

Valve : Porte fermée ou ouverte permettant le passage de l'air de la bouteille au détendeur et du détendeur aux poumons (**en rouge**).

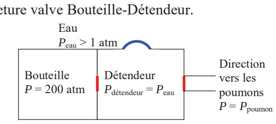
Diaphragme : Membrane déformable contrôlant chaque valve (**en bleu**).

Fonctionnement de la bouteille et du détendeur :

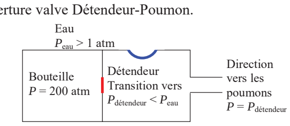
1) Remplir le détendeur d'air :
Action : Ouverture valve Bouteille-Détendeur.



2) Détendeur rempli d'air à la pression extérieure :
Action : Fermeture valve Bouteille-Détendeur.



3) Vidage partiel du détendeur et respiration du plongeur :
Action : Ouverture valve Détendeur-Poumon.



Dangers de la plongée sous-marine :

Surpression pulmonaire : Si un plongeur remonte vers la surface sans libérer l'air de ses poumons, ceux-ci vont gonfler car la pression externe de l'eau diminue et les muscles respiratoires ne pourront pas supporter la pression à l'intérieur des poumons. Ceci peut occasionner la déchirure des poumons (pneumothorax).

Ivresse des profondeurs : Une trop grande quantité de gaz (O_2 et N_2) dans le sang affecte le système nerveux. Pour un mélange d'air normal (20% O_2 et 80% N_2), un plongeur est limité à une profondeur de 90 m. Avec un mélange composé de 2% O_2 et 98% He, les records de plongée oscillent autour de 500 m.

Remontée trop rapide : Formation de bulle de N_2 au cerveau ce qui peut causer une embolie cérébrale. Pour éviter ce problème, il faut remonter tranquillement en arrêtant à plusieurs paliers de décompression.

Exemple : vitesse maximum : 15 m/min (1h à une profondeur de 35 m) palier #1 : 22 minutes à 6m palier #2 : 50 minutes à 3m

Effet de la position sur la pression sanguine

À l'aide d'une canule et d'un manomètre en U, il est possible de mesurer la pression hydrostatique sanguine produite par le cœur (pression cardiaque moyenne). Cependant, cette pression n'est pas uniforme partout. Cela dépend de la position (verticale ou horizontale) de la personne. Cette **pression hydrostatique** est **influencée** par la **force gravitationnelle**.

Exemple : Une personne de 1,80 m.

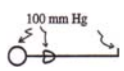
- Pression cardiaque de 100 mm Hg ($P_{coeur} = 100 \ \text{mm Hg}$).
- Distance de 0,45 m entre le Cœur et la Tête.
- Distance de 1,35 m entre le Cœur et les Pieds.

Nous avons les relations suivantes : ($g = 9{,}8 \ \text{N/kg}$)

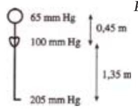
- $1 \ \text{mm Hg} = 133 \ \text{Pa}$
- $\Delta P_{1 \ \text{cm}} = \rho g h_{1 \ \text{cm}} = (1050)(9{,}8)(0{,}01) = 102{,}9 \ \text{Pa} = 0{,}77 \ \text{mm Hg}$

Position horizontale

La pression est uniforme.



Position verticale



$$\begin{aligned} P_{tête} &= P_{coeur} - \Delta P_{45 \ \text{cm}} \\ &= P_{coeur} - 45 \ \Delta P_{1 \ \text{cm}} \\ &= (100) - 45 \ (0{,}77) \\ &= 65{,}35 \ \text{mm Hg} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} P_{pieds} &= P_{coeur} + \Delta P_{135 \ \text{cm}} \\ &= P_{coeur} + 135 \ \Delta P_{1 \ \text{cm}} \\ &= (100) + 135 \ (0{,}77) \\ &= 204{,}0 \ \text{mm Hg} \end{aligned}$$

Situation : Que ce passe-t-il lorsqu'une personne passe de la position horizontale à la position verticale trop rapidement ?

Conséquences : **Réduction** de la **pression hydrostatique** au **niveau du cerveau** ce qui provoque des **étourdissements** et même un **évanouissement**, car le débit de sang au cerveau a diminué.

Hausse de la **pression hydrostatique** dans les **membres inférieurs** ce qui provoque des étirements dans les vaisseaux sanguins causant ainsi une accumulation de sang, car le débit du sang a augmenté.

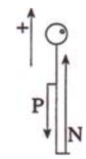
Solutions développées par le corps humain pour rétablir un débit de sang adéquat :

- Conscription des vaisseaux sanguins des membres inférieurs.
- Dilatation des vaisseaux sanguins du cerveau (réduit la résistance et facilite l'écoulement même à plus faible pression).
- Accélération du rythme cardiaque.
- Augmentation de l'activité musculaire au niveau des jambes pour réduire l'accumulation de sang.

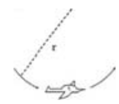
Pression et accélération

Lorsqu'un corps est en mouvement circulaire, le poids apparent est influencé par l'accélération centripète :

Exemple : Looping vers le bas, pilote en position verticale



2ième loi de Newton : $\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{n} + m\vec{g} = m\vec{a}$



$$\Rightarrow \quad n - mg = ma_C = m\frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow \quad n = m\left(g + \frac{v^2}{r}\right)$$

On peut imposer la définition suivante à la force normale. Celle-ci nous donnera l'expression suivante pour l'accélération gravitationnelle :

$$n = m g' \qquad \Rightarrow \qquad g' = g + \frac{v^2}{r} \quad (\textit{looping} \text{ vers le bas})$$

$$g' = g - \frac{v^2}{r} \quad (\textit{looping} \text{ vers le haut})$$

Comparons la différence de pression entre le cœur et les pieds d'un pilote d'avion dans les deux situations suivantes : (g = 10 m/s^2)

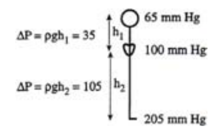
Rappel : $P_{coeur} = 100 \ \text{mm de Hg}$ $\qquad h_1 = 0{,}45 \ \text{m}$

$h_2 = 1{,}35 \ \text{m}$

Situation 1 : Trajectoire rectiligne ($r = \infty$) :

$$g'_1 = g + \frac{v_1^{\ 2}}{r_2} = (10) + \frac{v_1^{\ 2}}{(\infty)} = 10 \ \text{m/s}^2$$

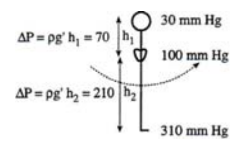
- ❖ La différence de pression est normale.



Situation 2 : Looping est le bas (v = 200 m/s et r = 4 km) :

$$g'_2 = g + \frac{v_2^{\ 2}}{r_2} = (10) + \frac{(200)^2}{(4 \times 10^3)} = 20 \ \text{m/s}^2$$

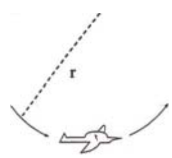
- ❖ La différence de pression a doublée.
- ❖ Baisse de pression au cerveau.



Chute de pression au cerveau

Problème :

- Réduction de l'alimentation du cerveau en sang.
- Réduction de l'alimentation des yeux en sang.
- Perte de vision (« voile noir »).
- Évanouissement.
- Accumulation de sang au niveau des jambes.



Solution :

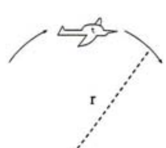
- Le pilote doit être assis.
- Porter une combinaison « anti-g » (combinaison serrant les jambes réduisant l'expansion des vaisseaux sanguins).

Conclusion : Un pilote de F18 (avion de chasse) peut supporter pendant quelques secondes une accélération gravitationnelle apparente de l'ordre de 10 g.

Hausse de pression au cerveau

Problème :

- Trop grande alimentation du cerveau en sang.
- Éclatement de petits vaisseaux sanguins du cerveau.
- Trop grande alimentation des yeux en sang.
- Saignement des paupières et du globe oculaire (« voile rouge »).



Solution :

- Aucune

Conclusion : Éviter cette situation.

Exercices

2.11.10 ***La pression aux pieds et à la tête.*** La pression sanguine au niveau du coeur de Béatrice est de 100 mmHg (pression manométrique). Lorsque Béatrice est debout, son coeur est à 1,32 m du sol et sa tête est à 1,75 m du sol. Calculez la pression manométrique au niveau de la tête et au niveau des pieds, en considérant sans corps comme un reservoir de sang immobile. (La densité du sang est de 1,05.)

2.13.32 ***La pression au fond.*** La voiture dans laquelle Albert se trouve roule à 100 km/h. Albert tient une bouteille d'eau : la hauteur du liquid est de 20 cm. Quelle est la pression manométrique au fond de la bouteille au moment où la voiture passe par le sommet d'une colline dont le rayon de courbures est de 100 m ?

Solutions

En construction …

Référence : Pierre Fourneaux, Mécanique Tome 2 Page 14
Marc Séguin, Physique XXI Volume A
Note de cours rédigée par : Simon Vézina
Référence : Pierre Fourneaux, Mécanique Tome 2 Page 15
Marc Séguin, Physique XXI Volume A
Note de cours rédigée par : Simon Vézina
Référence : Pierre Fourneaux, Mécanique Tome 2 Page 16
Marc Séguin, Physique XXI Volume A
Note de cours rédigée par : Simon Vézina

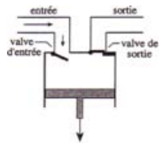
Chapitre 5.7 – Applications de l'hydrodynamique

La pompe aspirante et foulante

Voici le fonctionnement d'une pompe de type aspirante et foulante :

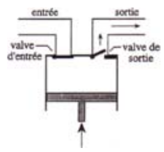
Entrée du liquide (aspirante)

1) Piston entraîné vers le bas.
2) Augmentation du volume de la pompe.
3) Formation d'une sous-pression engendrée par le vide partiel de la pompe.
4) Écoulement du liquide par le tuyau d'entrée.



Sortie du liquide (foulante)

1) Piston entraîné vers le haut.
2) Réduction du volume de la pompe.
3) Formation d'une surpression engendrée par la force du piston.
4) Écoulement du liquide dans le tuyau de sortie (blocage de la valve d'entrée).
5) Non refoulement du liquide dans la pompe grâce à la valve de sortie.

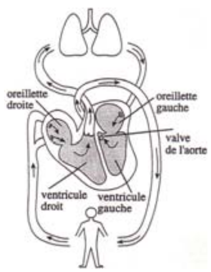


Fonctionnement du cœur

Le cœur peut être comparé à une pompe de type aspirante et foulante :

Partie droite du cœur :

Objectif : Oxygénation du sang.
Provenance du sang : Veines
Circulation vers : Poumons

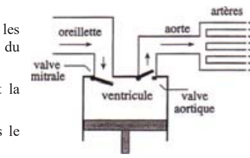


Partie gauche du cœur :

Objectif : Circulation du sang vers les organes du corps.
Provenance du sang : Poumons
Circulation vers : Aorte et artères

Voici la comparaison du cœur à la pompe de type aspirante et foulante :

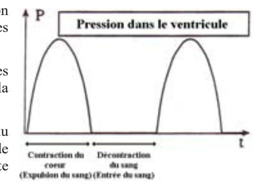
Oreillette : Tuyau d'entrée vers le ventricule.
Valve mitrale : Valve empêchant le refoulement vers les poumons du sang lors de la contraction du cœur.
Ventricule : Chambre d'accumulation du sang avant la contraction.
Valve aortique : Valve empêchant le retour du sang vers le ventricule lors de la contraction du cœur.
Aorte : Tuyau de sortie vers les artères.
Artères : Tuyau redirigeant le sang vers les organes.



Pression à l'aorte

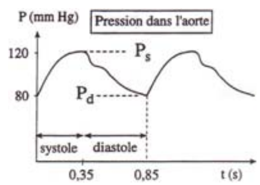
Voici un graphique simplifié d'une mesure expérimentale de **pression** dans le **ventricule gauche** (section du cœur propulsant le sang vers les organes) :

- La contraction du cœur produit une augmentation rapide de la pression. Ce sont les muscles cardiaques qui produisent cette hausse de pression.
- Lorsque la contraction du cœur se termine, les muscles cardiaques ne sont plus en action et la pression chute à zéro.
- La décontraction du cœur augmente le volume du ventricule ce qui invite le sang provenant de l'oreillette à retourner dans le ventricule. Cette action se produit à faible pression.



Voici un graphique simplifié d'une mesure expérimentale de **pression** dans **l'aorte** chez une personne jeune et en santé :

- **Pression systolique** (P_s) : Pression maximale atteinte lors de la contraction du cœur (0,35 s)
- **Pression diastolique** (P_d) : Pression minimale atteinte lors de la dilatation du cœur (0,50 s)
- Lors de la diastole, la pression chute vers zéro dans le ventricule, mais diminue graduellement dans l'aorte.
- La pression dans l'aorte ne chute jamais jusqu'à zéro, car un battement de cœur se produit assez rapidement pour rehausser la pression.



L'aorte semi-élastique

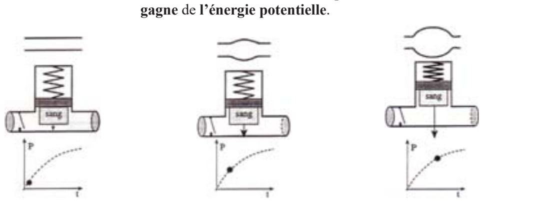
Le **rôle de l'aorte** et des autres artères est de **régulariser** la **pression** engendrée par le cœur ce qui permet d'avoir un écoulement sanguin à **débit relativement constant**. Pour ce faire, l'aorte utilise une **propriété d'élasticité**.

On peut comparer l'élasticité de l'aorte au système mécanique suivant :

> Cylindre vertical fermé, dans lequel peut coulisser un piston étanche attaché en haut du cylindre par un ressort qui se comprimera sous la poussée du sang. Le ressort peut accumuler et perdre de l'énergie potentielle.

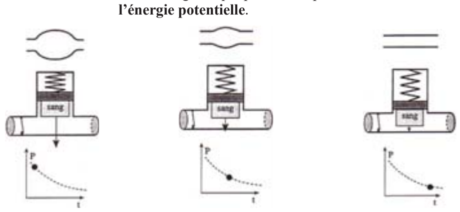
Systole : Début du flot sanguin sortant du ventricule et ouverture de la valve aortique.

Pression produite par : Le cœur.
Élasticité de l'aorte : **Augmentation** de l'étirement de l'aorte, car le sang applique une force sur la membrane via la pression du cœur. La **membrane gagne** de **l'énergie potentielle**.



Diastole : Arrêt du flot sanguin sortant du ventricule et fermeture de la valve aortique.

Pression produite par : La membrane de l'aorte (elle est étirée).
Élasticité de l'aorte : **Réduction** de l'étirement de l'aorte, car l'aorte applique une force sur le sang ce qui produit la pression. La **membrane perd** de **l'énergie potentielle**.



Vitesse du sang dans les vaisseaux et pression dans les vaisseaux

La pression à l'intérieur des vaisseaux sanguins n'est pas constante, car il y a écoulement du sang. La perte de pression dans les différents vaisseaux sanguins dépend du débit et de la résistance du vaisseau. Si le débit est laminaire (non turbulent), nous avons la relation suivante :

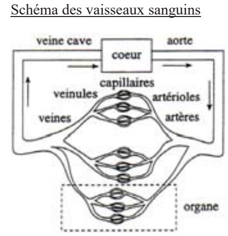
$$\Delta P = -R\,D \qquad \text{où} \qquad R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}$$

(Loi de Poiseuille)

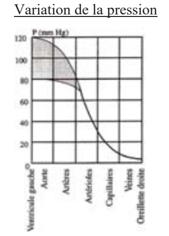
- Petit vaisseau ⇒ petit rayon r ⇒ grande résistance R
- Grand vaisseau ⇒ grand rayon r ⇒ petite résistance R

Puisque les vaisseaux n'ont pas tous la même taille, la **variation de pression n'est pas constante tout au long de l'écoulement**. La **plus grande variation de pression** est observée dans les **artérioles** et les **capillaires** (petit rayon, grande résistance) :

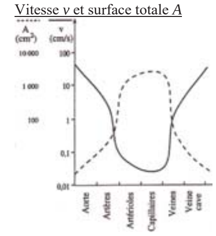
Schéma des vaisseaux sanguins



Variation de la pression



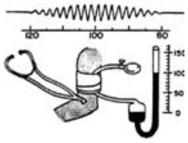
Vitesse v et surface totale A



- Le rayon de l'aorte est beaucoup plus grand que le rayon d'un capillaire, mais le grand nombre de capillaires fait en sorte que la section de surface totale des capillaires est beaucoup plus grande que celle de l'aorte.
- Même si les **artérioles** et les **capillaires** sont très nombreux pour séparer le débit provenant de l'aorte, ils représentent quand même la **moitié** de la **résistance totale** de l'ensemble des vaisseaux.
- La **vitesse** du sang est **très lente** dans les **capillaires** ce qui **favorise** les **échanges** (oxygène, CO_2, aliments, déchets) **par diffusion** entre le sang et les cellules.
- Puisque la pression est élevée dans les artères et faible dans les veines, l'évolution humaine a favorisé l'organisation suivante : **artères à l'intérieur du corps** et **veines en surface du corps** (moins de dommage lors d'une coupure).

Sphygmomanomètre

Le sphygmomanomètre est un appareil permettant de mesurer les pressions systolique et diastolique à l'artère brachiale (l'artère dans le bras).

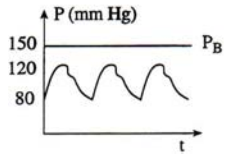


Pourquoi mesurer la pression dans le bras ?

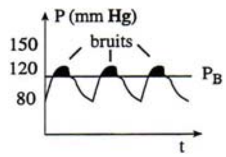
1) Cette pression est comparable à la pression cardiaque, puisque le bras est à la même hauteur que le cœur (même pression hydrostatique).
2) La perte de pression causée par l'écoulement du sang dans les artères est relativement faible (même pression hydrodynamique).

Fonctionnement :

1) Gonfler le brassard.
   - Hausse de la pression relative jusqu'à 150 mm Hg.
   - Pression relative supérieure à la pression systolique.
   - L'artère brachiale est trop comprimée et le sang ne circule plus dans l'avant-bras.



2) Laisser échapper un peu d'air du brassard.
   - Pression relative égale à la pression systolique.
   - L'artère peut prendre un peu d'expansion.
   - L'écoulement du sang s'effectue avec turbulence, car la vitesse du sang est très élevée en raison de la grande résistance occasionnée par le petit rayon de l'artère.
   - Formation de bruits que l'on peut entendre avec un stéthoscope.
   - **Donc :** On détecte la pression systolique lorsqu'il y a formation de bruits.



3) Laisser échapper l'air du brassard.
   - Pression relative égale à la pression diastolique.
   - L'artère peut reprendre son extension normale.
   - L'écoulement du sang s'effectue sans turbulence (écoulement laminaire).
   - Les bruits disparaissent.
   - **Donc :** On détecte la pression diastolique lorsqu'il n'y a plus présence de bruits.