

# Chapitre 1.1 – La physique

## La physique

La physique peut se définir de la façon suivante :

*La physique est la science qui étudie les lois fondamentales régissant l'interaction de la matière dans l'espace et dans le temps.*

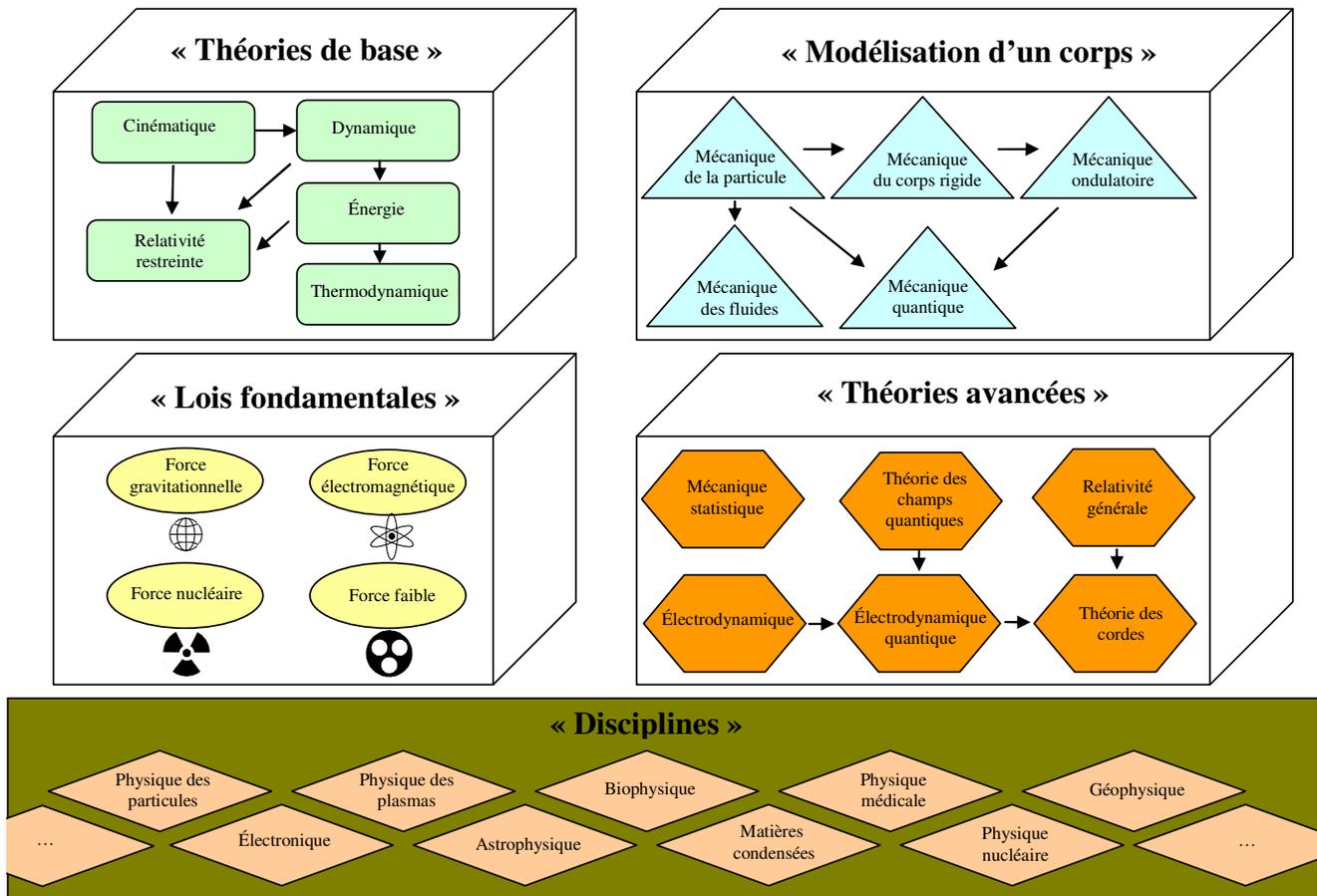
Cette science aura donc pour but de construire des théories permettant de décrire la nature<sup>1</sup>. Pour ce faire, il suffit d'identifier des **causes** et de prédire leurs **conséquences**. Si une **expérience** permet de faire la démonstration de la **relation cause à effet**, la **théorie** peut être **acceptée** et être utilisée pour effectuer des prédictions.



<https://www.futura-sciences.com/sciences/definitions/mathematiques-equation-375/>

## Les branches de la physique

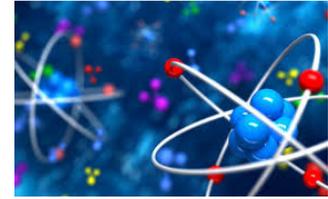
La physique est une science qui a évolué de 500 av. J.-C. jusqu'à présent. Elle s'est principalement intéressée au mouvement de la matière et aux motifs de son mouvement : la force. Voici quelques exemples de théories élaborées jusqu'à présent à l'aide des lois fondamentales découvertes :



<sup>1</sup> Le terme « physique » vient du grec signifiant « nature ».  
Référence : Marc Séguin, Physique XXI Tome A  
Note de cours rédigée par Simon Vézina

## Propriété de la matière et paramètre physique

Pour étudier la physique, il faut identifier des propriétés à la matière et des paramètres physiques pour la décrire. En mécanique classique, nous pouvons décrire la matière de façon générale contrairement à la mécanique quantique où la matière est constituée d'atomes dénombrables. Les propriétés de la matière permettent de décrire la matière elle-même et les paramètres physiques permettent de décrire l'évolution de la matière dans son environnement.



<https://www.futura-sciences.com/sciences/definitions/chimie-atome-1990/>

Voici les deux propriétés de la matière les plus connues :

Caractéristique de la matière	Unité physique	Théorie utilisée	Application	Exemple
Masse	gramme (g)	Force gravitationnelle	Des masses s'attirent	Un objet tombe sur le sol.
Charge	coulomb (C)	Électromagnétisme	Des charges s'attirent ou se repousse	Le courant électrique.

Voici les deux paramètres physiques associées aux théories physiques de base :

Paramètre physique	Unité physique	Théorie utilisée	Application	Exemple
Position linéaire	mètre (m)	Toutes les théories	Évaluer des distances.	Distance Montréal/Hull
Position rotative	radian (rad)	Toutes les théories	Évaluer des rotations.	Rotation de la Terre.
Temps	seconde (s)	Toutes les théories	Évaluer des intervalles de temps.	Temps du voyage entre Montréal/Hull

## Préfixe métrique

Pour faciliter les calculs en physique, on utilise des préfixes métriques qui représentent des puissances de 10. Ces préfixes ne sont pas des unités, mais des valeurs numériques :

Préfixes métriques	Prononciation	Puissance de 10	Exemple
n	nano	$1 \times 10^{-9}$	1 nC = $1 \times 10^{-9}$ C
$\mu$	micro	$1 \times 10^{-6}$	5 $\mu$ C = $5 \times 10^{-6}$ C
m	mili	$1 \times 10^{-3}$	32 mm = $32 \times 10^{-3}$ m
c	centi	$1 \times 10^{-2}$	4 cm = $4 \times 10^{-2}$ m
d	déci	$1 \times 10^{-1}$	3,7 dm = $3,7 \times 10^{-1}$ m
		$1 \times 10^0 = 1$	
k	kilo	$1 \times 10^3$	3 kg = $3 \times 10^3$ g
M	méga	$1 \times 10^6$	166 MHz = $166 \times 10^6$ Hz
G	giga	$1 \times 10^9$	2 GHz = $2 \times 10^9$ Hz

# Les grandeurs de la physique en mécanique

Les lois physiques et les grandeurs physiques qui en découlent sont construites à partir des caractéristiques de la matière, des paramètres physiques ainsi que des préfixes métriques. À l'aide d'une formule mathématique, on peut regrouper plusieurs concepts afin de réaliser une prédiction ou une conséquence.

Dans le cours de mécanique, vous serez invités à étudier les différentes grandeurs physiques<sup>2</sup> suivantes :



<https://statbel.fgov.be/fr/themes/energie>

L'énergie est une grandeur physique qui permet de comparer plein de système entre eux.

- La vitesse  $\vec{v}$  en *mètre par seconde* :

$$[\vec{v}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

- L'accélération  $\vec{a}$  en *mètre par seconde carrée* :

$$[\vec{a}] = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- La force  $\vec{F}$  en *newton* :

$$[\vec{F}] = \text{N} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}$$

- Le champ gravitationnel  $\vec{g}$  en *newton par kilogramme* :

$$[\vec{g}] = \frac{\text{N}}{\text{kg}} = \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

- L'énergie  $E$  en *joule* :

$$[E] = \text{J} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$$

- La puissance  $P$  en *watt* :

$$[P] = \text{W} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3}$$

- La quantité de mouvement  $\vec{p}$  en *kilogramme mètre par seconde* :

$$[\vec{p}] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$$

- La pression  $P$  en *pascal* :

$$[P] = \text{pa} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2 \text{m}}$$

- Le débit  $D$  en *mètre cube par seconde* :

$$[D] = \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

- La vitesse angulaire  $\omega$  en *radian par seconde* :

$$[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

- L'accélération angulaire  $\alpha$  en *radian par seconde carrée* :

$$[\alpha] = \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

- Le moment de force<sup>3</sup>  $\vec{\tau}$  en *newton-mètre* :

$$[\vec{\tau}] = \text{N} \cdot \text{m} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^2}$$

- Le moment d'inertie  $I$  en *kilogramme mètre carré* :

$$[I] = \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

- Le moment cinétique  $\vec{L}$  en *kilogramme mètre carré par seconde* :

$$[\vec{L}] = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

<sup>2</sup> Les grandeurs physiques avec une « flèche » seront des concepts vectoriels et celles sans flèche seront des concepts scalaires.

<sup>3</sup> Bien que le moment de force possède les mêmes unités que l'énergie, ces deux concepts sont totalement différents car le premier est vectoriel et le second est scalaire.











# Chapitre 1.2 – La vitesse moyenne et la vitesse scalaire moyenne

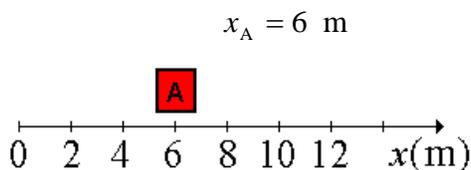
## La position

La position est une mesure permettant de localiser un objet dans l'espace. On utilise un système d'axe afin de graduer notre mesure.

Notation mathématique :  $position = x$

Unité (mètre) :  $[x] = m$

Exemple :



Un arbre préserve toujours sa position sauf s'il est transplanté.

## Le temps

Le temps est une mesure permettant d'ordonner une séquence d'événements non simultanés.

Notation mathématique :  $temps = t$

Unité (seconde) :  $[t] = s$



On utilise l'horloge pour mesurer le temps.

## La distance

La distance (ou longueur) est une variation de position entre deux objets. Les deux positions doivent être simultanées.

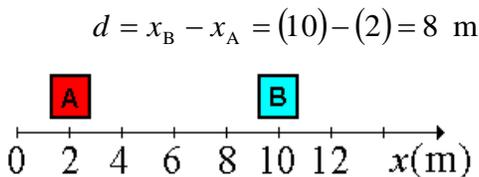
Notation mathématique :  $d = x_B - x_A$

Unité (mètre) :  $[d] = m$



On utilise le ruban à mesurer pour évaluer des longueurs.

Exemple :



# Le déplacement

Le déplacement est une variation de position d'un même objet. Puisque cette variation de position s'effectue dans le temps, on associe à chaque position à une valeur de temps :

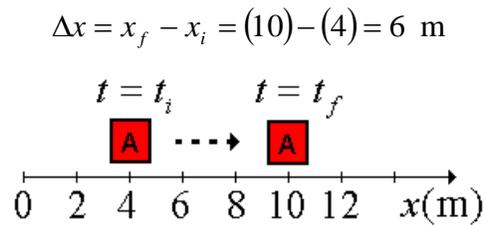
Notation mathématique :  $\Delta x = x_f - x_i$

Unité (mètre):  $[\Delta x] = \text{m}$



Un usager effectue des déplacements dans un réseau de métro.

Exemple :



# L'intervalle de temps

L'intervalle de temps est une mesure de variation de temps. On peut évaluer l'intervalle de temps requis pour effectuer un déplacement.

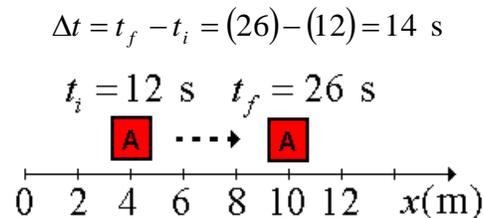
Notation mathématique :  $\Delta t = t_f - t_i$

Unité (seconde) :  $[\Delta t] = \text{s}$



On utilise le chronomètre pour mesurer l'écoulement du temps.

Exemple :



## La vitesse moyenne

La vitesse moyenne correspond à un taux moyen de déplacement effectué sur un intervalle de temps. La **vitesse** est l'**agent** qui fait **varier** la **position** dans le **temps**.



Photo d'une moto en mouvement.

Notation mathématique :  $\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

Unité (mètre par seconde):  $[\bar{v}_x] = \text{m/s}$

### Convention de signe :

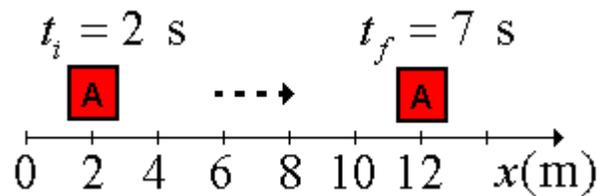
Vitesse positive ( $v_x > 0$ )  $\Rightarrow$  déplacement dans le sens positif de l'axe  $x$

Vitesse négative ( $v_x < 0$ )  $\Rightarrow$  déplacement dans le sens négatif de l'axe  $x$

**P.S.** Habituellement, un déplacement vers la droite correspond à une vitesse positive et un déplacement vers la gauche correspond à une vitesse négative, car la graduation des axes pour la position est positive du côté droit de l'origine.

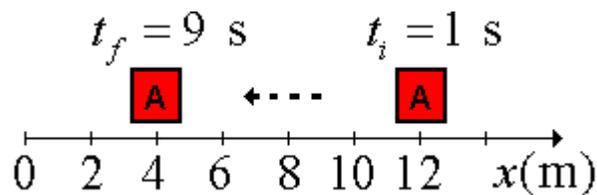
### Exemple 1 : Vitesse moyenne positive (vers la droite)

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{(12) - (2)}{(7) - (2)} = 2 \text{ m/s}$$



### Exemple 2 : Vitesse moyenne négatives (vers la gauche)

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} = \frac{(4) - (12)}{(9) - (1)} = -1 \text{ m/s}$$



**Situation 2 : Où est Béatrice?** Béatrice roule vers l'est sur l'autoroute 20 à la vitesse constante de 100 km/h. À 8h, elle est située à la borne kilométrique 120. On désire déterminer à quelle borne elle est située une heure et demie plus tard.

Voici les informations de l'énoncé :

Valeurs connues	Valeurs inconnues
Sens positif de l'axe : l'est	
Vitesse moyenne : $\bar{v}_x = 100 \text{ km/h}$	Déplacement : $\Delta x = ?$
Position initiale : $x_i = 120 \text{ km}$	Position finale : $x_f = ?$
Temps initial : $t_i = 8 \text{ h}$	Temps final : $t_f = ?$
Intervalle de temps : $\Delta t = 1,5 \text{ h}$	

Développons notre expression de la vitesse moyenne afin d'obtenir une expression permettant d'évaluer la position finale :

$$\begin{aligned} \bar{v}_x &= \frac{\Delta x}{\Delta t} &\Rightarrow \Delta x &= \bar{v}_x \Delta t && \text{(Isoler } \Delta x \text{)} \\ &&\Rightarrow (x_f - x_i) &= \bar{v}_x \Delta t && \text{(Remplacer } \Delta x = x_f - x_i \text{)} \\ &&\Rightarrow \boxed{x_f = x_i + \bar{v}_x \Delta t} &&& \text{(Isoler } x_f \text{)} \\ &&\Rightarrow x_f &= (120 \text{ km}) + \left(100 \frac{\text{km}}{\text{h}}\right)(1,5 \text{ h}) && \text{(Remplacer valeurs numériques)} \\ &&\Rightarrow \boxed{x_f = 270 \text{ km}} &&& \text{(Calcul)} \end{aligned}$$

Béatrice se trouve donc à la borne kilométrique 270.

## Variété de la vitesse

Afin d'illustrer la grande variété de vitesse observable, voici quelques situations :

Vitesse d'une voiture :	Vitesse avion de ligne :	Record vitesse au sol (1997) :	Vitesse du son :	Vitesse de la lumière :
100 km/h ( $\approx 27,8 \text{ m/s}$ )	800 km/h ( $\approx 222 \text{ m/s}$ )	1228 km/h ( $\approx 341 \text{ m/s}$ )	340 m/s ( $\approx 1224 \text{ km/h}$ )	$3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ( $\approx 1,1 \times 10^9 \text{ km/h}$ )
				









# Chapitre 1.3 – La vitesse instantanée

## La vitesse dans un graphique de position

On peut obtenir une **vitesse moyenne**  $\bar{v}_x$  à l'aide d'un graphique de position  $x(t)$  en fonction du temps  $t$  en effectuant un **calcul de pente**. Puisqu'une pente est un rapport entre une variation selon l'axe des ordonnées (la position :  $x(t)$ ) et une variation selon l'axe des abscisses (le temps :  $t$ ), la vitesse moyenne  $\bar{v}_x$  peut s'obtenir de la façon suivante :

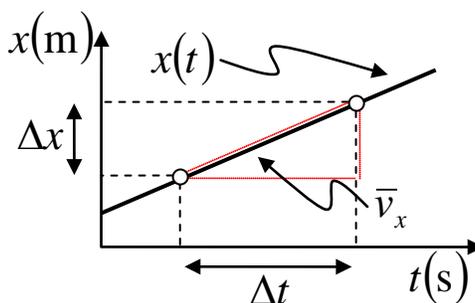
Définition de la vitesse moyenne :

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

où  $\bar{v}_x$  : Vitesse moyenne (m/s)

$\Delta x$  : Variation de la position (m)

$\Delta t$  : Variation du temps (s)



## La vitesse instantanée à l'aide de la droite tangente

La vitesse moyenne  $\bar{v}_x$  n'est pas toujours une information précise, car la vitesse d'un objet n'est pas toujours constante. Lorsque la vitesse varie dans le temps, il faut évaluer la vitesse à chaque instant pour bien évaluer l'évolution de la position dans le temps.

Dans un graphique de position  $x(t)$ , on peut calculer une **vitesse instantanée**  $v_x$  à un temps  $t$  donné à partir de la **pente** d'une **droite tangente**<sup>1</sup> touchant le graphique de position à l'instant  $t$ . Cette définition est valide, car la pente d'une droite dans un graphique de position correspond à une information de vitesse.

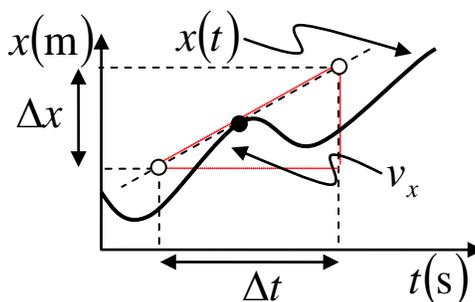
Définition de la vitesse instantanée :

$$v_x = \left. \frac{\Delta x}{\Delta t} \right|_{\text{droite tangente}}$$

où  $v_x$  : Vitesse instantanée (m/s)

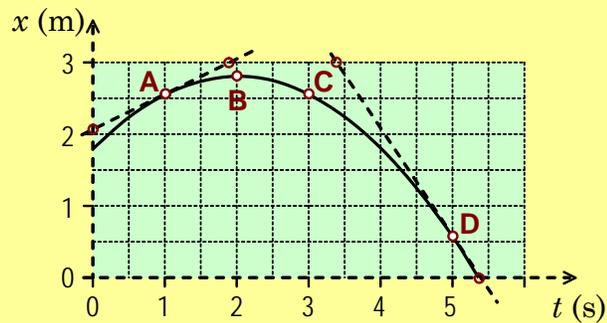
$\Delta x$  : Variation de la position (m)

$\Delta t$  : Variation du temps (s)

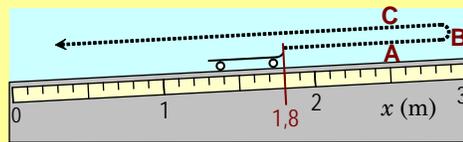


<sup>1</sup> Une droite tangente est une droite qui touche qu'à un seul point d'un graphique.

**Situation 3 : Une planche à roulettes sur un plan incliné.** Sur une piste en béton légèrement inclinée ( $3^\circ$  par rapport à l'horizontale), on lance avec la main une planche à roulettes vers le haut de la piste (schéma ci-dessous, à gauche). On observe que la planche ralentit en montant, puis redescend en allant de plus en plus vite.



En plaçant une règle graduée à côté de la piste et en filmant le mouvement, on obtient le graphique  $x(t)$  ci-dessous, à droite. (On a commencé à filmer un peu après avoir lancé la planche et on a noté à chaque instant la position du point le plus à droite de la planche). À partir du graphique  $x(t)$ , on désire obtenir le graphique  $v_x(t)$  correspondant.



En traçant la tangente au point **A**, on peut évaluer la vitesse à **1 s**. La pente de cette droite sera la vitesse instantanée de l'objet à 1 s, car la pente effectue le calcul  $v_x = \Delta x / \Delta t$  :

Deux points sur la tangente :  $x_1 = 2,1 \text{ m}$  , à  $t_1 = 0 \text{ s}$  (Point 1)

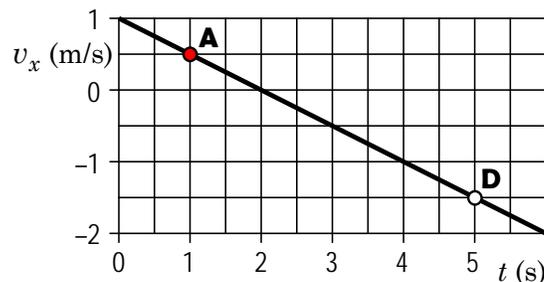
$x_2 = 3,0 \text{ m}$  , à  $t_2 = 1,8 \text{ s}$  (Point 2)

$$v_{xA} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v_{xA} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \quad (\text{Remplacer } \Delta x \text{ et } \Delta t)$$

$$\Rightarrow v_{xA} = \frac{(3) - (2,1)}{(1,8) - (0)} \quad (\text{Remplacer valeurs numériques})$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{xA} = 0,5 \text{ m/s}} \quad (\text{Évaluer } v_{xA})$$

On peut effectuer plusieurs de ces calculs pour tous les temps entre 0 et 5 secondes (faire plusieurs droites tangentes) et obtenir le graphique de la vitesse en fonction du temps :



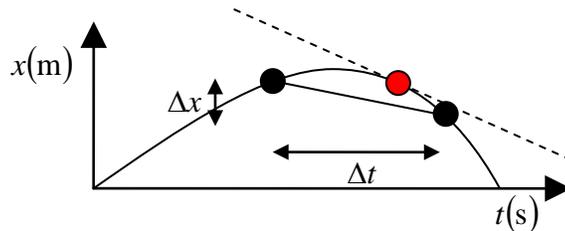
(Construction d'un graphique  $v_x(t)$  à partir d'un graphique  $x(t)$  et des droites tangentes)

## La vitesse instantanée en tant que limite

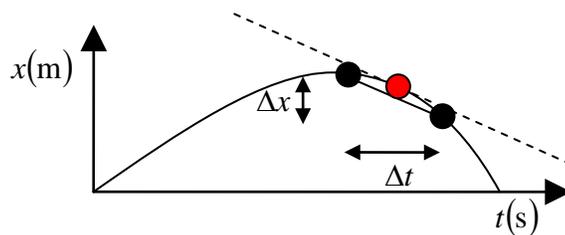
Pour évaluer la vitesse instantanée, il n'est pas toujours nécessaire de tracer une droite tangente. On peut approximer une droite tangente à partir de **deux positions sur** le graphique  $x(t)$  et effectuer le calcul de pente suivant :

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Si les deux positions sur la courbe (**points noirs**) sont trop éloignées dans le temps, la vitesse instantanée (**point rouge**) sera imprécise.



Si les deux positions sur la courbe (**point noir**) sont près dans le temps, la vitesse instantanée (**point rouge**) sera précise.

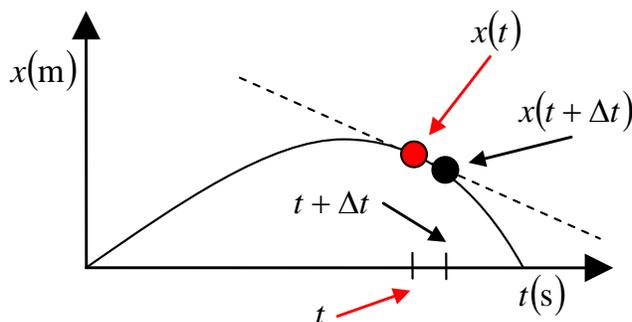


Avec la définition de la limite en mathématique, le calcul de la vitesse instantanée s'effectue de la façon suivante :

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Pour effectuer le calcul de  $\Delta x$ , il s'agit de :

- 1) Prendre la position au moment  $t$  où l'on veut évaluer la vitesse  $\Rightarrow x(t)$
- 2) Prendre la position après un temps supplémentaire de  $\Delta t$   $\Rightarrow x(t + \Delta t)$
- 3) Plus le choix de  $\Delta t$  est petit, plus la vitesse instantanée sera précise.



$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{t + \Delta t - t}$$

$$= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

**Situation A : Une planche à roulettes sur un plan incliné : calcul avec limite.** À partir de l'équation de la position  $x(t) = -0,25t^2 + t + 1,75$  associée au mouvement de la planche à roulettes de la situation 3, on désire évaluer la vitesse instantanée à  $t = 5$  s avec une précision de  $\Delta t = 0,001$  s.

Afin d'évaluer la vitesse instantanée à l'aide de la limite, évaluons la position  $x(t)$  et  $x(t + \Delta t)$  à  $t = 5$  s :

$$x(t): \quad x(t = 5) = -0,25(5)^2 + (5) + 1,75 = 0,5 \text{ m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t = 5) = 0,5 \text{ m}}$$

$$x(t + \Delta t): \quad x(t = 5,001) = -0,25(5,001)^2 + (5,001) + 1,75 \Rightarrow \quad \boxed{x(t = 5,001) = 0,4985 \text{ m}}$$

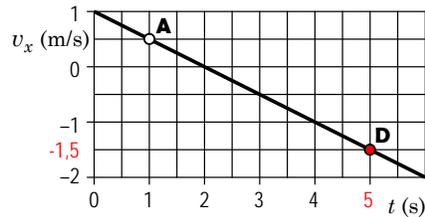
Évaluons maintenant la vitesse à  $t = 5$  s :

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad v_x(t) \approx \lim_{\Delta t \rightarrow 0,001} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad (\text{Approximation avec } \Delta t \rightarrow 0,001)$$

$$\Rightarrow \quad v_x(t = 5) \approx \lim_{\Delta t \rightarrow 0,001} \frac{(0,4985) - (0,5)}{(0,001)} \quad (\text{Remplacer valeurs numériques})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_x(t = 5) \approx -1,5 \text{ m/s}} \quad (\text{Évaluer la vitesse})$$

On réalise que ce calcul est exact si l'on compare notre résultat au résultat du graphique  $v_x(t)$  de la **Situation 3** (voir graphique ci-contre, le point **rouge**).



## Exercice

**Exercice A : Vitesse instantanée avec trois  $\Delta t$ .** La position ( $x$ , en mètre) dans le temps ( $t$ , en seconde) d'une particule est donnée par l'équation suivante :

$$x(t) = 12t^4 - 6t$$

- Évaluez la vitesse instantanée à 4 s lorsque  $\Delta t = 0,1$  s.
- Évaluez la vitesse instantanée à 4 s lorsque  $\Delta t = 0,01$  s.
- Évaluez la vitesse instantanée à 4 s lorsque  $\Delta t = 0,001$  s.

## Solution

### Exercice A : Vitesse instantanée avec trois $\Delta t$ .

Nous avons l'équation de la position suivante :  $x(t) = 12t^4 - 6t$

a) À  $t = 4$  s avec  $\Delta t = 0,1$  s :

$$x(t = 4) = 12(4)^4 - 6(4) = 3048 \text{ m}$$

$$x(t = 4,1) = 12(4,1)^4 - 6(4,1) = 3366 \text{ m}$$

$$v_x(t = 4) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(3366) - (3048)}{0,1} \Rightarrow \boxed{v_x(t = 4) = 3180 \text{ m/s}}$$

b) À  $t = 4$  s avec  $\Delta t = 0,01$  s :

$$x(t = 4) = 12(4)^4 - 6(4) = 3048,0 \text{ m}$$

$$x(t = 4,01) = 12(4,01)^4 - 6(4,01) = 3078,8 \text{ m}$$

$$v_x(t = 4) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(3078,8) - (3048,0)}{0,01} \Rightarrow \boxed{v_x(t = 4) = 3080 \text{ m/s}}$$

c) À  $t = 4$  s avec  $\Delta t = 0,001$  s :

$$x(t = 4) = 12(4)^4 - 6(4) = 3048,00 \text{ m}$$

$$x(t = 4,001) = 12(4,001)^4 - 6(4,001) = 3051,07 \text{ m}$$

$$v_x(t = 4) = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{(3051,07) - (3048,00)}{0,001} \Rightarrow \boxed{v_x(t = 4) = 3070 \text{ m/s}}$$

Avec une technique plus avancée (voir 1.13), nous pouvons évaluer la vitesse instantanée exacte à l'aide du calcul différentiel :

$$v_x(t = 4) = 3066 \text{ m/s}$$



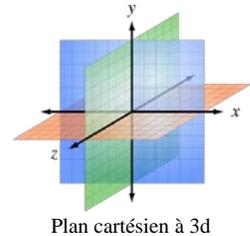




# Chapitre 1.4 – Vitesses relatives en une dimension

## Référentiel

En physique, un **référentiel** est un **système de coordonnées** relié à un observateur permettant à celui-ci d'effectuer des **mesures** de position, de vitesse et d'accélération dans le temps. Ainsi, le référentiel précise le contexte d'une mesure et par rapport à qui (ou à quoi) la mesure a été effectuée.



Ex : Albert est à 5 m d'un arbre. (Référentiel : l'arbre)

Albert marche dans un train à 0,2 m/s. (Référentiel : train)

Albert court à une vitesse de 6 km/h par rapport au sol. (Référentiel : sol)

## Notation avec plusieurs référentiels

Afin de préciser par rapport à quel référentiel une mesure a été prise, nous devons utiliser un système à deux indices afin de préciser quel objet a été mesuré et par rapport à quel référentiel la mesure a été prise :

$$x_{AB} \equiv x_{A \text{ par rapport à } B} \quad \text{et} \quad v_{xAB} \equiv v_{x \text{ A par rapport à } B}$$

où A : Indice de l'objet qui subit la mesure.

B : Indice du référentiel qui effectue la mesure.

x : Variable associée à la mesure (position selon l'axe x).

$v_x$  : Variable associée à la mesure (vitesse selon l'axe x).

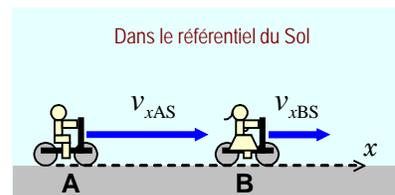
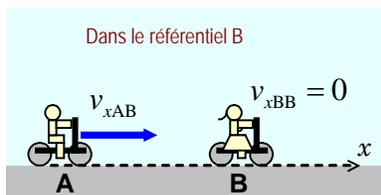
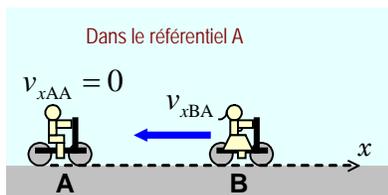
## Symétrie des vitesses relatives

La vitesse est une mesure symétrique par rapport à deux référentiels A et B. Si un objet A bouge à vitesse  $v_{xAB}$  par rapport à un objet B, alors on peut affirmer que l'objet B bouge à vitesse  $v_{xBA}$  par rapport à l'objet A. Les deux objets sont en accord sur le fait qu'il y a un mouvement relatif entre eux. Mathématiquement, ces deux vitesses sont reliées par l'équation suivantes :

$$v_{xAB} = -v_{xBA}$$

où  $v_{xAB}$  : Vitesse selon l'axe x de A par rapport à B (m/s)

$v_{xBA}$  : Vitesse selon l'axe x de B par rapport à A (m/s)



**Situation A : La balade dans le train.** À  $t = 0$ , Albert est situé dans un train vis-à-vis Béatrice qui est située à l'extérieur du train. Sachant qu'Albert marche à 1 m/s dans le train vers la droite (par rapport au train) et que le train se déplace à 5 m/s vers la droite par rapport à Béatrice, on désire évaluer le déplacement d'Albert après 5 s **(a)** par rapport au train et **(b)** par rapport à Béatrice puis évaluer **(c)** la vitesse d'Albert par rapport à Béatrice durant ce déplacement.

Prenons le système d'indice suivant :

A : Albert      B : Béatrice      T : Train

Nous avons les information suivante : (positif vers la droite)

$$v_{xAT} = 1 \text{ m/s} \quad \text{et} \quad v_{xTB} = 5 \text{ m/s}$$

Nous pouvons évaluer le déplacement d'Albert par rapport au train grâce à la définition de la vitesse ( $v_x = \Delta x / \Delta t$ ), car nous avons toutes les mesures par rapport à ce référentiel :

$$\begin{aligned} v_{xAT} = \Delta x_{AT} / \Delta t &\Rightarrow \Delta x_{AT} = v_{xAT} \Delta t && \text{(Isoler } \Delta x_{AT} \text{)} \\ &\Rightarrow \Delta x_{AT} = (1)(5) && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ &\Rightarrow \boxed{\Delta x_{AT} = 5 \text{ m}} && \text{(a) (Calcul)} \end{aligned}$$

Nous pouvons évaluer le déplacement d'Albert par rapport à Béatrice grâce à la définition de la vitesse, car nous avons la vitesse du train par rapport à Béatrice ( $v_{xTB}$ ) et nous avons déjà calculé le déplacement d'Albert dans le train ( $\Delta x_{AT}$ ) :

$$\begin{aligned} \Delta x_{AB} = \Delta x_{AT} + \Delta x_{TB} &\Rightarrow \Delta x_{AB} = \Delta x_{AT} + (v_{xTB} \Delta t) && \text{(Remplacer } \Delta x_{TB} = v_{xTB} \Delta t \text{)} \\ &\Rightarrow \Delta x_{AB} = (5) + (5)(5) && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ &\Rightarrow \boxed{\Delta x_{AB} = 30 \text{ m}} && \text{(b) (Calcul)} \end{aligned}$$

Évaluons la vitesse d'Albert par rapport à Béatrice sachant que celui-ci s'est déplacé de  $\Delta x_{AB} = 30 \text{ m}$  par rapport elle :

$$\begin{aligned} v_{xAB} = \frac{\Delta x_{AB}}{\Delta t} &\Rightarrow v_{xAB} = \frac{(30)}{(5)} && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ &\Rightarrow \boxed{v_{xAB} = 6 \text{ m/s}} && \text{(c) (Calcul)} \end{aligned}$$

Nous remarquons que la vitesse d'Albert par rapport à Béatrice ( $v_{xAB}$ ) est égale à la vitesse d'Albert par rapport au Train ( $v_{xAT}$ ) plus la vitesse du Train par rapport à Béatrice ( $v_{xTB}$ ) :

$$\begin{aligned} v_{xAB} = v_{xAT} + v_{xTB} &\Rightarrow (6) = (1) + (5) \\ &\Rightarrow 6 = 6 \end{aligned}$$

## Addition des vitesses relatives en une dimension

Pour exprimer une vitesse d'un objet par rapport à un autre référentiel, il suffit d'effectuer l'addition des vitesses relatives suivantes :

$$v_{xAR} = v_{xAB} + v_{xBR}$$

où  $v_{xAR}$  : Vitesse selon l'axe  $x$  de A par rapport à R (m/s)

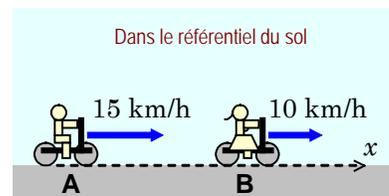
$v_{xAB}$  : Vitesse selon l'axe  $x$  de A par rapport à B (m/s)

$v_{xBR}$  : Vitesse selon l'axe  $x$  de B par rapport à R (m/s)

**Situation 2 : La symétrie des vitesses relatives.** Lors d'une randonnée à bicyclette, Albert a pris un peu de retard et tente de rattraper Béatrice. Albert roule à 15 km/h et Béatrice roule à 10 km/h. On désire déterminer (a) la vitesse d'Albert par rapport à Béatrice et (b) la vitesse de Béatrice par rapport à Albert. On suppose de la route est rectiligne et que les cycliste se déplacent dans le sens positif de l'axe  $x$ .

Dans le référentiel du sol, nous avons :

- $v_{xAS} = 15 \text{ km/h}$
- $v_{xBS} = 10 \text{ km/h}$

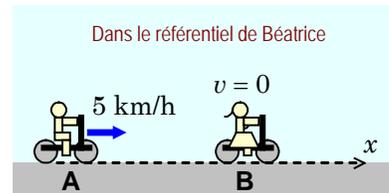


Dans le référentiel de Béatrice, nous avons :

- $v_{xAS} = 15 \text{ km/h}$
- $v_{xSB} = -v_{xBS} = -10 \text{ km/h}$

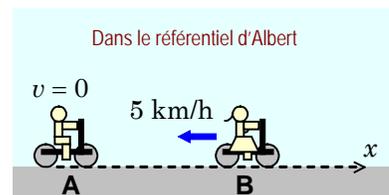
Ce qui donne :

$$\begin{aligned} v_{xAB} = v_{xAS} + v_{xSB} &\Rightarrow v_{xAB} = (15) + (-10) \\ &\Rightarrow v_{xAB} = 5 \text{ km/h (a)} \end{aligned}$$



Dans le référentiel d'Albert, nous avons :

- $v_{xBA} = -v_{xAB} = -5 \text{ km/h (b)}$













# Chapitre 1.5a – L'accélération

## L'accélération moyenne

L'accélération moyenne correspond à un taux moyen de variation de la vitesse sur un intervalle de temps. **L'accélération** est l'**agent** qui fait **varier** la **vitesse** dans le **temps**.



Une fusée en accélération.

Notation mathématique :  $\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$

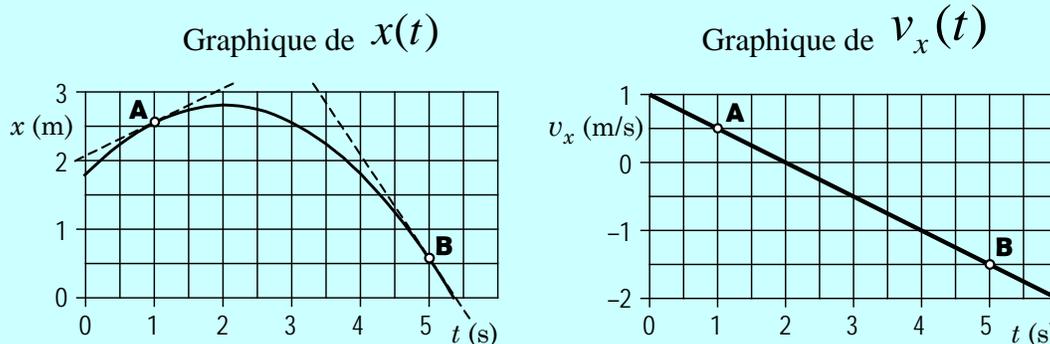
Unité (mètre par seconde carré) :  $[\bar{a}_x] = \text{m/s}^2$

Convention de signe :

Accélération positive ( $a_x > 0$ )  $\Rightarrow$  accélération dans le sens positif de l'axe  $x$

Accélération négative ( $a_x < 0$ )  $\Rightarrow$  accélération dans le sens négatif de l'axe  $x$

**Situation A : Une planche à roulettes sur un plan incliné : analyse de l'accélération.** À partir des deux graphiques  $x(t)$  et  $v_x(t)$  (schéma ci-dessous) associés au mouvement de la planche à roulettes de la situation 3 du chapitre 1.2, on désire évaluer l'accélération moyenne de la planche à roulette.

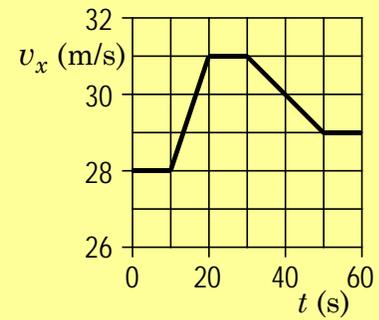


Utilisons la droite tangente au graphique de vitesse afin d'évaluer l'accélération. Nous pouvons évaluer l'accélération moyenne à l'aide de deux points sur le graphique de vitesse  $v_x$ , car le graphique de vitesse possède qu'une seule droite tangente :

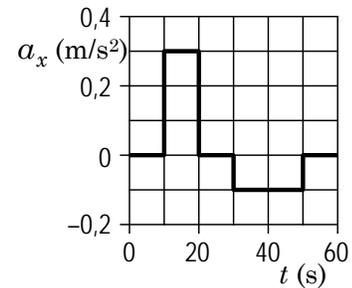
Deux points sur la tangente :  $v_{x1} = 1 \text{ m/s}$  à  $t_1 = 0 \text{ s}$   
 $v_{x2} = -1,5 \text{ m/s}$  à  $t_2 = 5 \text{ s}$

$$\Rightarrow \bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{x2} - v_{x1}}{t_2 - t_1} = \frac{(-1,5) - (1)}{(5) - (0)} \Rightarrow \boxed{\bar{a}_x = -0,5 \text{ m/s}^2}$$

**Situation 3 : Albert double un camion.** Albert roule vers l'est sur l'autoroute 20 (dans le sens positif de l'axe  $x$ ). Quelques secondes après le début du radiojournal de 14h, il amorce une manœuvre pour dépasser un camion. Sa vitesse en fonction du temps est donnée par le graphique ci-contre (le temps indiqué correspond aux secondes écoulées depuis 14h). On désire obtenir le graphique  $a_x(t)$  correspondant.

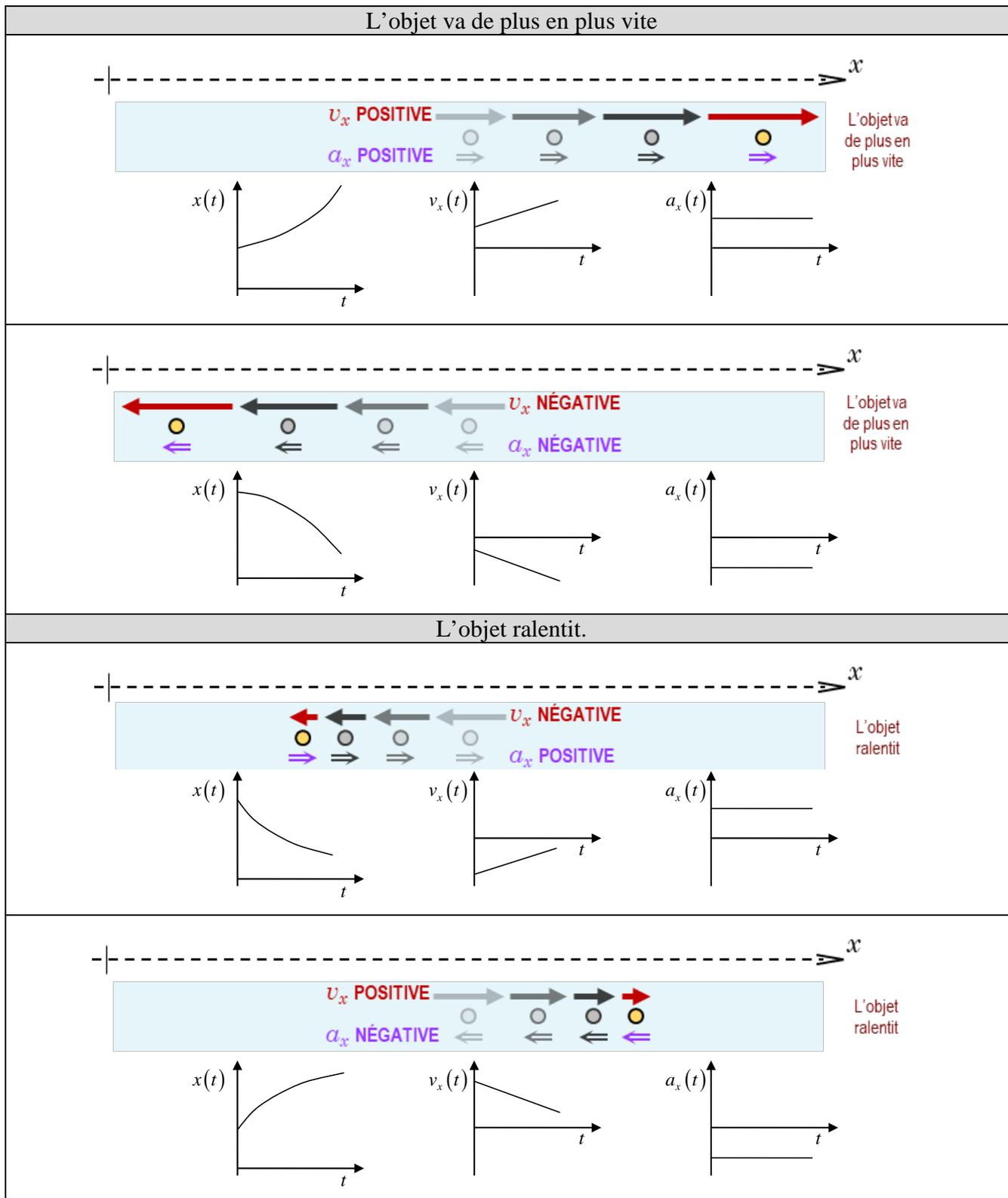


À partir de la pente de la droite tangente des différentes sections du graphique de vitesse, nous pouvons construire le graphique de l'accélération  $a_x(t)$  et nous réalisons que le graphique n'est pas constant dans le temps :



## Comparaison des signes : $x$ , $v_x$ et $a_x$

Voici la comparaison de la cinématique de 4 mouvement à accélération constante. Cette comparaison permet de mieux comprendre la signification des expressions « va de plus en plus vite » et « ralentit ».



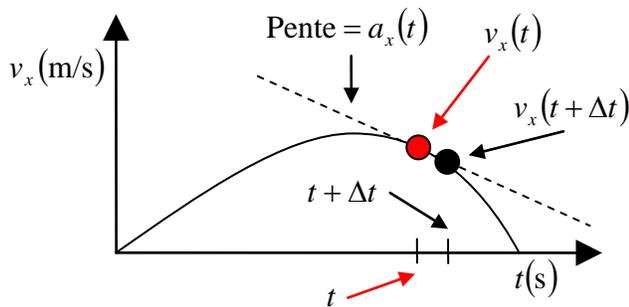
## L'accélération instantanée en tant que limite

Comme dans le cas de la vitesse instantanée, on peut évaluer l'accélération instantanée à l'aide de deux points sur le graphique de  $v_x(t)$  :

$$a_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$$

Pour effectuer le calcul de  $\Delta v_x$ , il s'agit de :

- 1) Prendre la vitesse au moment  $t$  où l'on veut évaluer l'accélération  $\Rightarrow v_x(t)$
- 2) Prendre la vitesse après un temps supplémentaire de  $\Delta t$   $\Rightarrow v_x(t + \Delta t)$
- 3) Plus le choix de  $\Delta t$  est petit, plus l'accélération instantanée sera précise.



$$\begin{aligned} a_x(t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_x(t + \Delta t) - v_x(t)}{\Delta t} \end{aligned}$$





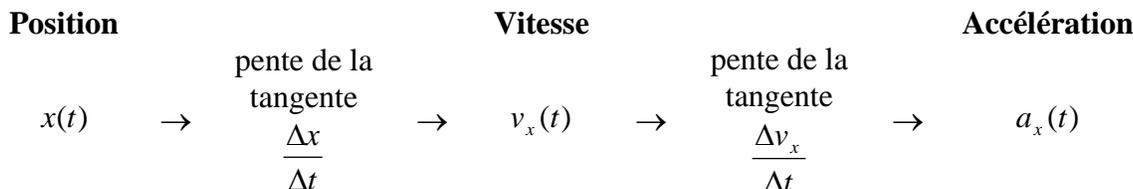




# Chapitre 1.5b – L'aire sous la courbe en cinématique

## Pente et la cinématique

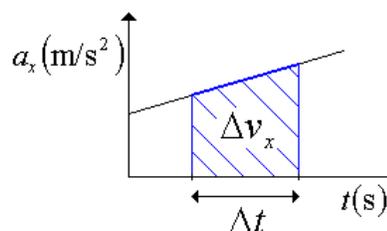
Voici les relations que nous avons établies entre la position, la vitesse et l'accélération :



## Variation de la vitesse et aire sous la courbe d'un graphique $a_x(t)$

À partir de la définition de l'accélération  $a_x$ , nous pouvons évaluer une variation de la vitesse  $\Delta v_x$  grâce à l'équation suivante :

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta v_x = a_x \Delta t}$$



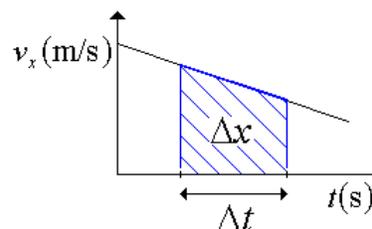
Lorsque l'accélération  $a_x(t)$  est définie graphiquement, la variation de la vitesse  $\Delta v_x$  s'évalue grâce à l'aire sous la courbe du graphique de l'accélération.

- ❖ Si  $a_x(t) = \text{constante}$  :  $\Delta v_x = \text{aire d'un rectangle} = a_x \Delta t$
- ❖ Si  $a_x(t) \neq \text{constante}$  :  $\Delta v_x = \text{aire sous la courbe du graphique } a_x(t)$

## Variation de la position et aire sous la courbe d'un graphique $v_x(t)$

À partir de la définition de la vitesse  $v_x$ , nous pouvons évaluer une variation de la position  $\Delta x$  grâce à l'équation suivante :

$$v_x(t) = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta x = v_x(t) \Delta t}$$



Lorsque la vitesse  $v_x(t)$  est définie graphiquement, la variation de la position  $\Delta x$  s'évalue grâce à l'aire sous la courbe du graphique de la vitesse.

- ❖ Si  $v_x(t) = \text{constante}$  :  $\Delta x = \text{aire d'un rectangle} = v_x \Delta t$
- ❖ Si  $v_x(t) \neq \text{constante}$  :  $\Delta x = \text{aire sous la courbe du graphique } v_x(t)$

## Vitesse et aire sous la courbe

À partir d'un graphique d'accélération  $a_x(t)$ , nous pouvons évaluer une variation de vitesse  $\Delta v_x$  avec l'aire sous la courbe. Pour évaluer une vitesse  $v_x$  à un instant donné, il faut avoir une information supplémentaire à l'aire sous la courbe : une condition initiale.

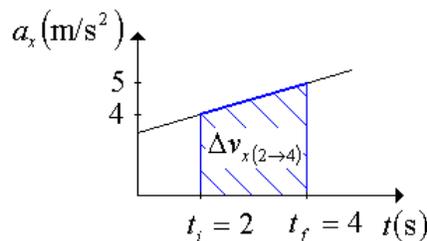
Si l'on évalue l'aire sous la courbe d'un graphique d'accélération  $a_x(t)$  entre un temps  $t_i$  et  $t_f$  et que l'on connaît la vitesse  $v_{xi}$  au temps  $t_i$ , nous pouvons évaluer la vitesse  $v_{xf}$  au temps  $t_f$  de la façon suivante :

$$v_{xf} = v_{xi} + \Delta v_{x(i \rightarrow f)}$$

où  $v_{xf}$  : Vitesse au temps  $t_f$  (s) ( $v_{xf} = v_x(t = t_f)$ )  
 $v_{xi}$  : Vitesse au temps  $t_i$  (s) ( $v_{xi} = v_x(t = t_i)$ )  
 $\Delta v_{x(i \rightarrow f)}$  : Variation de la vitesse entre le temps  $t_i$  et  $t_f$  (m/s) ( $\Delta v_{x(i \rightarrow f)} = \text{aire sous la courbe}$ )

**Situation A : Une accélération linéaire.** À deux secondes, un mobile se déplace à 6 m/s dans le sens positif de l'axe des  $x$  et subit une accélération de 4 m/s<sup>2</sup> dans le sens positif de l'axe  $x$ . À quatre secondes, le mobile subit une accélération de 5 m/s<sup>2</sup> dans le sens positif de l'axe  $x$ . Sachant que le mobile accélère linéairement, on désire (a) tracer le graphique de l'accélération en fonction du temps et (b) évaluer la vitesse du mobile à 4 secondes.

Voici la représentation graphique de l'accélération :



Évaluons l'aire sous la courbe du graphique de l'accélération entre 2 et 4 secondes :

$$\Delta v_{x(2 \rightarrow 4)} = \frac{(h + H) B}{2} \Rightarrow \Delta v_{x(2 \rightarrow 4)} = \frac{((4) + (5)) ((4) - (2))}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta v_{x(2 \rightarrow 4)} = 9 \text{ m/s}}$$

Évaluons la vitesse du mobile à 4 secondes :

$$v_{xf} = v_{xi} + \Delta v_{x(i \rightarrow f)} \Rightarrow v_{x4} = v_{x2} + \Delta v_{x(2 \rightarrow 4)} \quad (\text{Remplacer indices } i = 2, f = 4)$$

$$\Rightarrow v_{x4} = (6) + (9) \quad (\text{Remplacer } v_{x2} \text{ et } \Delta v_{x(2 \rightarrow 4)})$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{x4} = 15 \text{ m/s}} \quad (\text{Évaluer } v_{x4})$$

## Règle et signe de l'aire sous la courbe

Lorsqu'on évalue une variation de vitesse à l'aide de l'aire sous la courbe, elle peut être positive si elle est au-dessus de l'axe du temps et négative si elle est sous l'axe du temps.

Lorsqu'on évalue la variation de la vitesse à partir du temps de la condition initiale, on doit ajouter cette variation lorsque l'aire sous la courbe est évaluée dans le sens positif du temps (aller vers le futur) et on doit la soustraire lorsque l'aire sous la courbe est évaluée dans le sens négatif du temps (aller vers le passé).

Voici une réécriture des deux règles précédentes qui s'appliquent à toute aire sous la courbe :

### 1) Signe de $\Delta v_x$

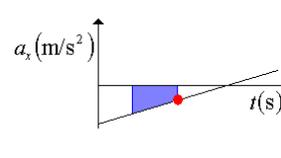
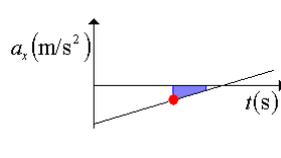
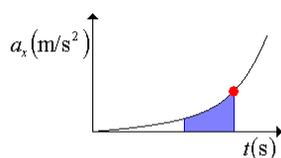
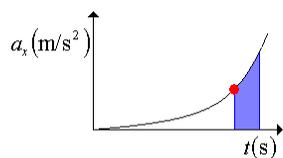
➤ Si l'aire sous la courbe est positif  $\Rightarrow \Delta v_x > 0$

➤ Si l'aire sous la courbe est négative  $\Rightarrow \Delta v_x < 0$

### 2) Addition ou soustraction de $\Delta v_x$

➤ Aire sous la courbe à droite de la vitesse de référence  $\Rightarrow v_{xf} = v_{xi} + (\Delta v_x)$

➤ Aire sous la courbe à gauche de la vitesse de référence  $\Rightarrow v_{xf} = v_{xi} - (\Delta v_x)$



$$v_{xf} = v_{xi} + (+\Delta v_x)$$

$$v_{xf} = v_{xi} - (+\Delta v_x)$$

$$v_{xf} = v_{xi} + (-\Delta v_x)$$

$$v_{xf} = v_{xi} - (-\Delta v_x)$$

**P.S.** Le **point rouge** est la vitesse initiale connue  $v_{xi}$ .

**L'aire sous la courbe bleue** est la variation de la vitesse  $\Delta v_{x(i \rightarrow f)}$ .

## Position et aire sous la courbe

Pour évaluer une position  $x_f$  à un temps  $t_f$  à partir d'un graphique de vitesse  $v_x(t)$ , il suffit d'évaluer une variation de position  $\Delta x_{(i \rightarrow f)}$  entre un temps  $t_i$  et  $t_f$  et d'additionner ce résultat à la position  $x_i$  déjà connue à l'aide des règles des aires sous la courbe :

$$x_f = x_i + \Delta x_{(i \rightarrow f)}$$

où  $x_f$  : Position au temps  $t_f$  (m)

$x_i$  : Position au temps  $t_i$  (s)

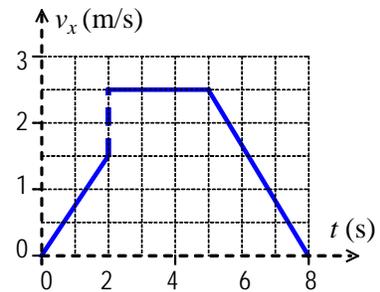
$\Delta x_{(i \rightarrow f)}$  : Variation de la position entre le temps  $t_i$  et  $t_f$  (m/s)

$$(v_{xf} = v_x(t = t_f))$$

$$(v_{xi} = v_x(t = t_i))$$

$$(\Delta x_{(i \rightarrow f)} = \text{aire sous la courbe})$$

**Situation B : Retour vers le passé.** Une voiture téléguidée se déplace horizontalement à la vitesse décrite par le graphique ci-contre. À  $t = 0$ , la voiture débute sa course et s'immobilise huit secondes plus tard à la coordonnée  $x_8 = 7$  m. On désire déterminer la position de départ  $x_0$  de la voiture.



Évaluons le nombre de carreaux sous la courbe entre 0 et 8 secondes :

$$N = \text{triangle\#1} + \text{rectangle} + \text{triangle\#2} \quad \Rightarrow \quad N = \left(\frac{2 \times 3}{2}\right) + (3 \times 3) + \left(\frac{3 \times 3}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{N = 25,5 \text{ carreaux}}$$

Évaluons l'aire que représente un carreau :

$$1 \text{ carreau} = 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \times 1 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{1 \text{ carreaux} = 0,5 \text{ m}}$$

Évaluons l'aire sous la courbe entre 0 et 8 secondes en m :

$$\Delta x = \text{aire sous la courbe} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = (25,5)(0,5)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta x = 12,75 \text{ m}}$$

Évaluons la position  $x_0$  à 0 se sachant que l'aire sous la courbe a été évaluée de 8 à 0 seconde :

$$x_f = x_i + \Delta x_{(i \rightarrow f)} \quad \Rightarrow \quad x_0 = x_8 + \Delta x_{(8 \rightarrow 0)} \quad (\text{Remplacer indices})$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = x_8 + (+ \Delta x) \quad (\text{Aire sous la courbe positive, } + \Delta x)$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = x_8 - (\Delta x) \quad (\text{Vers le passé, } - (\Delta x))$$

$$\Rightarrow \quad x_0 = (7) - (12,75) \quad (\text{Remplacer } x_8 \text{ et } \Delta x)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_0 = -5,75 \text{ m}} \quad (\text{Évaluer } x_0)$$







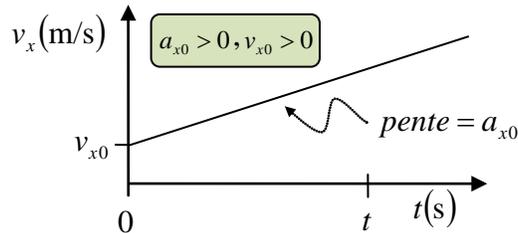


# Chapitre 1.6 – Le mouvement uniformément accéléré

## L'équation de la vitesse avec une accélération constante

L'équation de la vitesse  $v_x(t)$  d'un objet subissant une accélération constante  $a_{x0}$  est égal à l'expression suivante :

$$v_x(t) = v_{x0} + a_{x0}t$$



où  $v_x(t)$  : Équation de la vitesse en fonction du temps (m/s) ( $v_x \equiv v_x(t)$ )

$v_{x0}$  : Vitesse lorsque  $t = 0$  (m/s) ( $v_{x0} = v_x(t = 0)$ )

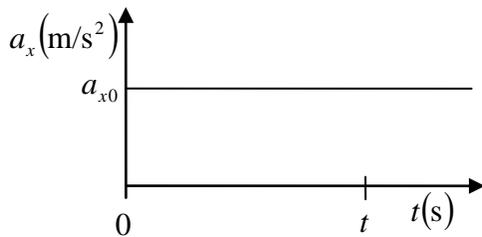
$a_{x0}$  : Accélération constante (m/s<sup>2</sup>) ( $a_{x0} = a_x(t = 0)$ )

$t$  : Temps écoulé dans le mouvement (s)

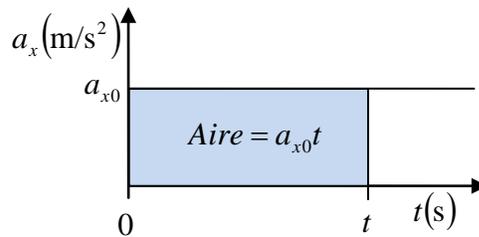
### Preuve :

Considérons un objet subissant une accélération constante  $a_{x0}$  et se déplaçant à  $t = 0$  avec une vitesse égale à  $v_{x0}$ . Voici une représentation graphique de la situation :

Équation :  $a_x(t) = a_{x0}$   $a_{x0} \in \mathfrak{R}$



Aire sous la courbe entre  $t = 0$  et  $t$  :



On peut construire la fonction  $v_x(t)$  rapidement, car :

1) L'aire sous la courbe entre  $t = 0$  et  $t$  est en rectangle qui donne  $a_{x0}t$ .

2) On connaît la vitesse de l'objet à  $t = 0$  :  $v_{x0}$

Évaluons l'équation de la vitesse  $v_x(t)$  de l'objet :

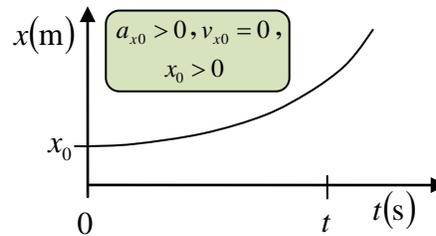
$$v_{xf} = v_{xi} + \Delta v_{x(i \rightarrow f)} \Rightarrow v_{xt} = v_{x0} + \Delta v_{x(0 \rightarrow t)} \quad (\text{Évaluer l'expression de : } t = 0 \rightarrow t)$$

$$\Rightarrow v_x = v_{x0} + a_{x0}t \quad \blacksquare \quad (\Delta v_{x(0 \rightarrow t)} = a_{x0}t \text{ et } v_{xt} = v_x)$$

# L'équation de la position avec une vitesse uniformément accélérée

L'équation de la position  $x(t)$  d'un objet subissant une accélération constante  $a_{x0}$  sera de la forme suivante :

$$x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_{x0}t^2$$



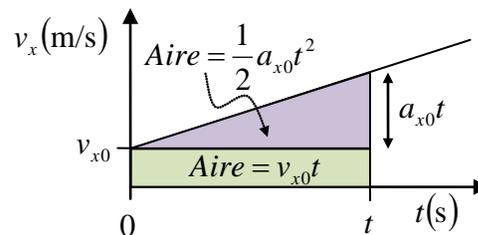
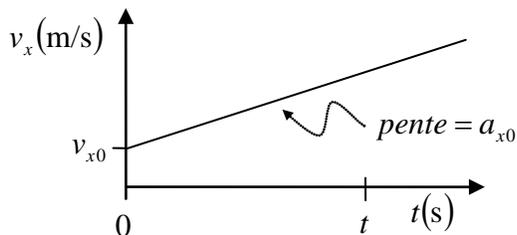
- où
- $x(t)$  : Équation de la position en fonction du temps (m) ( $x \equiv x(t)$ )
  - $x_0$  : Position lorsque  $t = 0$  (m) ( $x_0 = x(t = 0)$ )
  - $v_{x0}$  : Vitesse lorsque  $t = 0$  (m/s) ( $v_{x0} = v_x(t = 0)$ )
  - $a_{x0}$  : Accélération constante (m/s<sup>2</sup>) ( $a_{x0} = a_x(t = 0)$ )
  - $t$  : Temps écoulé dans le mouvement (s)

## Preuve :

Considérons un objet se déplaçant avec une vitesse  $v_x$  subissant une accélération constante  $a_{x0}$  dont la vitesse à  $t = 0$  est égale à  $v_{x0}$  lorsqu'il est situé à la position  $x_0$ . Voici une représentation graphique de la situation :

Équation :  $v_x(t) = v_{x0} + a_{x0}t$   $a_{x0}, v_{x0} \in \mathfrak{R}$

Aire sous la courbe entre  $t = 0$  et  $t$  :



On peut construire la fonction  $x(t)$  rapidement, car :

- 1) L'aire sous la courbe entre  $t = 0$  et  $t$  est en trapèze qui donne  $v_{x0}t + \frac{1}{2}a_{x0}t^2$ .
- 2) On connaît la position de l'objet à  $t = 0$  :  $x_0$

Évaluons l'équation de la position  $x(t)$  de l'objet :

$$x_f = x_i + \Delta x_{(i \rightarrow f)} \quad \Rightarrow \quad x_t = x_0 + \Delta x_{(0 \rightarrow t)} \quad (\text{Évaluer l'expression de : } t = 0 \rightarrow t)$$

$$\Rightarrow \quad x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_{x0}t^2 \quad \blacksquare \quad (\Delta v_{x(0 \rightarrow t)} = v_{x0}t + \frac{1}{2}a_{x0}t^2 \quad \text{et } v_{xt} = v_x)$$

## Les équations alternatives du mouvement à accélération constante

À partir des équations de la position  $x(t)$  et de la vitesse  $v_x(t)$  à accélération constante, nous pouvons former deux nouvelles équations du mouvement :

$$v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_{x0}(x - x_0)$$

(Vitesse en fonction de la position)

$$x = x_0 + \bar{v}_x t$$

(Position avec la vitesse moyenne)

Preuve :

À partir de l'équation de la position, remplaçons certains paramètres afin d'obtenir nos expressions désirées :

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_{x0}t^2$$

$$\Rightarrow x = x_0 + v_{x0} \left( \frac{v_x - v_{x0}}{a_{x0}} \right) + \frac{1}{2}a_{x0} \left( \frac{v_x - v_{x0}}{a_{x0}} \right)^2$$

(Remplacer  $v_x = v_{x0} + a_{x0}t$  tel que  $t = \frac{v_x - v_{x0}}{a_{x0}}$ )

$$\Rightarrow x = x_0 + \frac{v_{x0}}{a_{x0}}(v_x - v_{x0}) + \frac{1}{2a_{x0}}(v_x - v_{x0})^2$$

(Simplification  $a_{x0}$ )

$$\Rightarrow a_{x0}(x - x_0) = v_{x0}(v_x - v_{x0}) + \frac{1}{2}(v_x - v_{x0})^2$$

(Isoler terme de vitesse)

$$\Rightarrow 2a_{x0}(x - x_0) = 2v_{x0}(v_x - v_{x0}) + (v_x - v_{x0})^2$$

(Multiplier par 2)

$$\Rightarrow 2a_{x0}(x - x_0) = 2v_{x0}v_x - 2v_{x0}^2 + (v_x - v_{x0})^2$$

(Distribuer  $2v_{x0}$ )

$$\Rightarrow 2a_{x0}(x - x_0) = 2v_{x0}v_x - 2v_{x0}^2 + v_x^2 - 2v_{x0}v_x + v_{x0}^2$$

(Développer le terme au carré)

$$\Rightarrow 2a_{x0}(x - x_0) = v_x^2 - v_{x0}^2$$

(Effectuer 2 simplifications)

$$\Rightarrow v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_{x0}(x - x_0) \quad \blacksquare$$

(Isoler  $v_x^2$ )

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_{x0}t^2$$

$$\Rightarrow x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2} \left( \frac{v_x - v_{x0}}{t} \right)^2 t^2$$

(Remplacer  $v_x = v_{x0} + a_{x0}t$  tel que  $a_{x0} = \frac{v_x - v_{x0}}{t}$ )

$$\Rightarrow x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}v_x t - \frac{1}{2}v_{x0}t$$

(Simplifier  $t$  et distribuer  $1/2$ )

$$\Rightarrow x = x_0 + \frac{1}{2}v_{x0}t + \frac{1}{2}v_x t$$

(Simplification)

$$\Rightarrow x = x_0 + \left( \frac{v_{x0} + v_x}{2} \right) t$$

(Factoriser  $t$ )

$$\Rightarrow x = x_0 + \bar{v}_x t \quad \blacksquare$$

(Remplacer  $\bar{v}_x = \frac{v_{x0} + v_x}{2}$ )

## Les équations du MUA

Un objet qui subit une accélération uniforme et constante possède des équations du mouvement d'une forme particulière. Voici cinq équations permettant d'évaluer l'accélération, la vitesse et la position en fonction du temps, de la position et de la vitesse. Il y a **trois équations dépendantes du temps** et deux équations supplémentaires obtenues à partir des trois premières équations :

Équations dépendantes du temps du MUA	
$a_x = a_{x0}$	$a_x(t)$ pour le MUA
$v_x = v_{x0} + a_{x0}t$	$v_x(t)$ pour le MUA
$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_{x0}t^2$	$x(t)$ pour le MUA

Équations supplémentaires du MUA	
$v_x^2(x) = v_{x0}^2 + 2a_{x0}(x - x_0)$	$v_x(x)$ pour le MUA
$x = x_0 + \left(\frac{v_{x0} + v_x}{2}\right)t$	$x(t, v_x)$ pour le MUA

où  $x$  : Position de l'objet qui dépend du temps  $t$  (m)

$v_x$  : Vitesse de l'objet qui dépend du temps  $t$  (m/s)

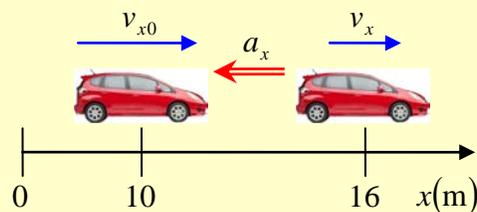
$x_0$  : Position de l'objet lorsque  $t = 0$  (m) ( $x_0 = x(t = 0)$ )

$v_{x0}$  : Vitesse de l'objet lorsque  $t = 0$  (m/s) ( $v_{x0} = v_x(t = 0)$ )

$a_{x0}$  : Accélération de l'objet constante lorsque  $t = 0$  (m/s<sup>2</sup>) ( $a_{x0} = a_x(t = 0)$ )

$t$  : Temps écoulé dans le mouvement (s)

**Situation 1 : Une voiture freine.** Une voiture jouet téléguidée contrainte de se déplacer le long de l'axe  $x$  voyage dans le sens positif à 6 m/s. Alors qu'elle est à la position  $x = 10$  m, elle reçoit la commande de ralentir à un taux constant de  $2 \text{ m/s}^2$ . On désire calculer (a) combien de temps est nécessaire pour que la voiture se rende à la position  $x = 16$  m ; (b) sa vitesse lorsqu'elle sera rendue à cette position.



Voici le schéma de la situation et les données de la situation :

$$x_0 = 10 \text{ m}$$

$$v_{x0} = 6 \text{ m/s}$$

$$a_{x0} = -2 \text{ m/s}^2$$

$$x = 16 \text{ m}$$

$$v_x = ?$$

$$t = ?$$

Avec l'équation du MUA de la position, évaluons le temps requis pour atteindre la position  $x = 16$  m :

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_{x0}t^2 \Rightarrow (16) = (10) + (6)t + \frac{1}{2}(-2)t^2 \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow -t^2 + 6t - 6 = 0 \quad (\text{Simplifier})$$

Évaluons la solution au polynôme du 2<sup>ième</sup> degré :

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow t = \frac{-(6) \pm \sqrt{(6)^2 - 4(-1)(-6)}}{2(-1)} \quad (\text{Remplacer } a, b \text{ et } c)$$

$$\Rightarrow t = \frac{-6 \pm \sqrt{12}}{-2} \quad (\text{Simplification})$$

$$\Rightarrow t = \frac{6 \pm \sqrt{12}}{2} \quad (\text{Simplifier le négatif})$$

$$\Rightarrow t = \{1,27, 4,73\} \quad (\text{Deux solutions})$$

Avant de répondre à notre question, évaluons la vitesse de notre voiture à ces 2 temps :

$$v_x = v_{x0} + a_{x0}t \Rightarrow v_x(t = 1,27) = (6) + (-2)(1,27) \Rightarrow v_x(t = 1,27) = 3,46 \text{ m/s}$$

$$v_x(t = 4,73) = (6) + (-2)(4,73) \Rightarrow v_x(t = 4,73) = -3,46 \text{ m/s}$$

Ainsi, le temps du 1<sup>er</sup> passage est 1,27 s, car la vitesse est positive (vers la droite) :

(a) 1,27 s

(b) 3,46 m/s

**Situation X : Un orignal droit devant!** Un camion roule à 72 km/h. Le chauffeur aperçoit un orignal au milieu de la route et applique les freins alors que le camion est à 60 m de l'original : le camion ralentit à 4 m/s<sup>2</sup>. On désire déterminer à quelle vitesse le camion frappe l'original.

Données de base :

$$\begin{array}{lll} x_0 = 0 \text{ m} & v_{x0} = 72 \text{ km/h} & a_{x0} = -4 \text{ m/s}^2 \\ x = 60 \text{ m} & v_x = ? & t = ? \end{array}$$

Effectuons le changement d'unité suivant pour la vitesse :

$$\begin{aligned} v_{x0} = 72 \text{ km/h} & \Rightarrow v_{x0} = 72 \frac{\text{km}}{\text{h}} * \frac{1000}{\text{k}} \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} * \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \\ & \Rightarrow \boxed{v_{x0} = 20 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

Avec l'équation du MUA, évaluons la vitesse du camion :

$$\begin{aligned} v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_{x0}(x - x_0) & \Rightarrow v_x^2 = (20)^2 + 2(-4)((60) - (0)) && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ & \Rightarrow v_x^2 = -80 && \text{(Simplification)} \\ & \Rightarrow v_x = \pm\sqrt{-80} && \text{(Appliquer la racine)} \\ & \Rightarrow \boxed{v_x(x) = \pm 8,9 i} && (i = \sqrt{-1}, i^2 = -1) \end{aligned}$$

Puisque la **vitesse** est **imaginaire**, le véhicule s'**immobilise avant** la collision.

Évaluons la position où le camion s'immobilise :

$$\begin{aligned} v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_{x0}(x - x_0) & \Rightarrow (0)^2 = (20)^2 + 2(-4)(x - (0)) \\ & \Rightarrow 0 = 400 - 8x \\ & \Rightarrow \boxed{x = 50 \text{ m}} \end{aligned}$$





# Chapitre 1.7 – Le MUA en une dimension sous l'effet de la gravité

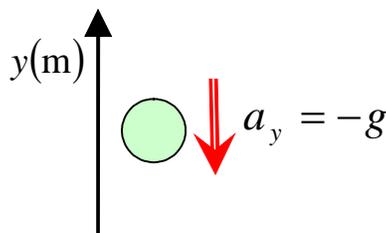
## Accélération gravitationnelle

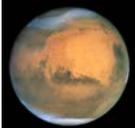
À la surface d'une planète, un objet est accéléré vers le centre de la planète (vers le bas) avec une accélération constante. Le module de l'accélération dépend du rayon et de la masse de la planète<sup>1</sup>. On utilise la lettre «  $g$  » pour désigner cette accélération verticale :

$$a_y = -g$$

(axe  $y$  positif vers le haut)

où  $a_y$  : Accélération verticale dont l'axe  $y$  est positif vers le haut ( $\text{m/s}^2$ )  
 $g$  : Accélération gravitationnelle ( $\text{m/s}^2$ )



Terre ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ )	Lune ( $g = 1,6 \text{ m/s}^2$ )	Mars ( $g = 3,69 \text{ m/s}^2$ )	Jupiter ( $g = 24,8 \text{ m/s}^2$ )
			

## L'accélération en $g$

L'accélération peut des fois être exprimée en fonction du  $g$  terrestre ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ). Ainsi, on peut comparer l'accélération d'un objet (pas nécessairement verticale) avec l'accélération gravitationnelle sur la Terre.

Exemple :

- 1) Ascension avec une accélération de  $4g$  ( $39,2 \text{ m/s}^2$ ) dans « l'Orbite » de *La Ronde*.
- 2) L'accélération gravitationnelle à la surface de Jupiter est de  $2,53g$ .



## La chute libre

La **chute libre** est définie comme étant une chute sous **l'influence** unique de la **gravité**. L'étude de la chute libre **néglige** alors toutes autres influences dont la **résistance de l'air**.

Bien que l'on utilise l'expression « chute libre » dans un saut en parachute, ceci représente un abus de langage dans le cadre de ce cours, car la résistance de l'air n'est pas négligeable même lorsque le parachute n'est pas déployé.

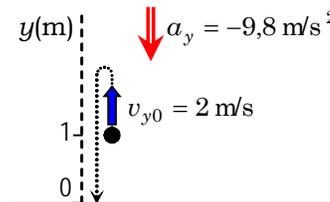


<sup>1</sup> Des informations plus précises seront présentées dans le chapitre 2.2  
 Référence : Marc Séguin, Physique XXI Tome A  
 Note de cours rédigée par Simon Vézina

**Situation 1 : Une balle en chute libre.** Un enfant lance une balle verticalement vers le haut : lorsqu'elle quitte sa main, elle est à 1 m au-dessus du sol et elle se déplace à 2 m/s. La résistance de l'air est négligeable. On désire déterminer **(a)** le temps de vol de la balle, c'est-à-dire le temps écoulé entre le moment où elle quitte la main et le moment où elle touche le sol; **(b)** sa hauteur maximale par rapport au sol; **(c)** sa vitesse lorsqu'elle touche le sol.

Voici les données de base de la situation selon notre système d'axe :

$$\begin{array}{ll} y_0 = 1 \text{ m} & y = 0 \\ v_{y0} = 2 \text{ m/s} & v_y = ? \\ a_y = -9,8 \text{ m/s}^2 & t = ? \end{array}$$



Évaluons le temps de vol à partir de l'équation de position du MUA :

$$\begin{aligned} y &= y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 & \Rightarrow & \quad (0) = (1) + (2)t + \frac{1}{2}(-9,8)t^2 & \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ & & \Rightarrow & \quad -4,9t^2 + 2t + 1 = 0 & \text{(Réécriture)} \end{aligned}$$

Évaluons la solution au polynôme du 2<sup>e</sup> degré ( $ax^2 + bx + c = 0$ ) :

$$\begin{aligned} t &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} & \Rightarrow & \quad t = \frac{-(2) \pm \sqrt{(2)^2 - 4(-4,9)(1)}}{2(-4,9)} & \text{(Remplacer } a, b \text{ et } c) \\ & & \Rightarrow & \quad t = \frac{2 \pm \sqrt{23,6}}{9,8} & \text{(Simplification)} \\ & & \Rightarrow & \quad t = \{-0,29, 0,70\} & \text{(Deux solutions)} \\ & & \Rightarrow & \quad \boxed{t = 0,70 \text{ s}} \quad \text{(a)} & \text{(Choisir la solution positive)} \end{aligned}$$

Évaluons la hauteur maximale avec le critère  $v_y = 0$  :

$$\begin{aligned} v_y^2 &= v_{y0}^2 + 2a_y(y - y_0) & \Rightarrow & \quad (0)^2 = (2)^2 + 2(-9,8)(y - (1)) & \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ & & \Rightarrow & \quad 0 = 23,6 - 19,6y & \text{(Calcul)} \\ & & \Rightarrow & \quad \boxed{y = 1,2 \text{ m}} \quad \text{(b)} & \text{(Isoler } y) \end{aligned}$$

Évaluons la vitesse lorsque la balle touche le sol :

$$\begin{aligned} v_y &= v_{y0} + a_y t & \Rightarrow & \quad v_y = (2) + (-9,8)(0,70) & \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ & & \Rightarrow & \quad \boxed{v_y = -4,86 \text{ m/s}} \quad \text{(c)} & \text{(Calcul)} \end{aligned}$$

## Exercice

**1.7.6** *Deux fois plus vite.* On lance une balle verticalement vers le bas; 0,5 s plus tard, elle touche le sol en allant 2 fois plus vite qu'au moment où on l'a lancée. De quelle hauteur la balle a-t-elle été lancée ?

## Solution

**1.7.6** *Deux fois plus vite.*

Voici les données de base :

$$\begin{array}{lll} y_0 = H & v_{y0} = -v_0 & a_y = -9,8 \text{ m/s}^2 \\ y = 0 & v_y = -2v_0 & t = 0,5 \text{ s} \end{array}$$

Évaluons la vitesse initiale à l'aide de l'équation de la vitesse du MUA :

$$\begin{aligned} v_y &= v_{y0} + a_y t & \Rightarrow & (-2v_0) = (-v_0) + (-9,8)(0,5) \\ & & \Rightarrow & -v_0 = -4,9 \\ & & \Rightarrow & \boxed{v_0 = 4,9 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

Évaluons la hauteur de chute à l'aide d'une autre équation du MUA :

$$\begin{aligned} v_y^2 &= v_{y0}^2 + 2a_y(y - y_0) & \Rightarrow & (-2v_0)^2 = (-v_0)^2 + 2(-9,8)((0) - (H)) \\ & & \Rightarrow & 4v_0^2 = v_0^2 + 19,6H \\ & & \Rightarrow & 3v_0^2 = 19,6H \\ & & \Rightarrow & H = \frac{3v_0^2}{19,6} \\ & & \Rightarrow & H = \frac{3(4,9)^2}{19,6} \\ & & \Rightarrow & \boxed{H = 3,68 \text{ m}} \end{aligned}$$











# Chapitre 1.8a – Le MUA à plusieurs paliers

## Mouvement uniformément accéléré à plusieurs paliers

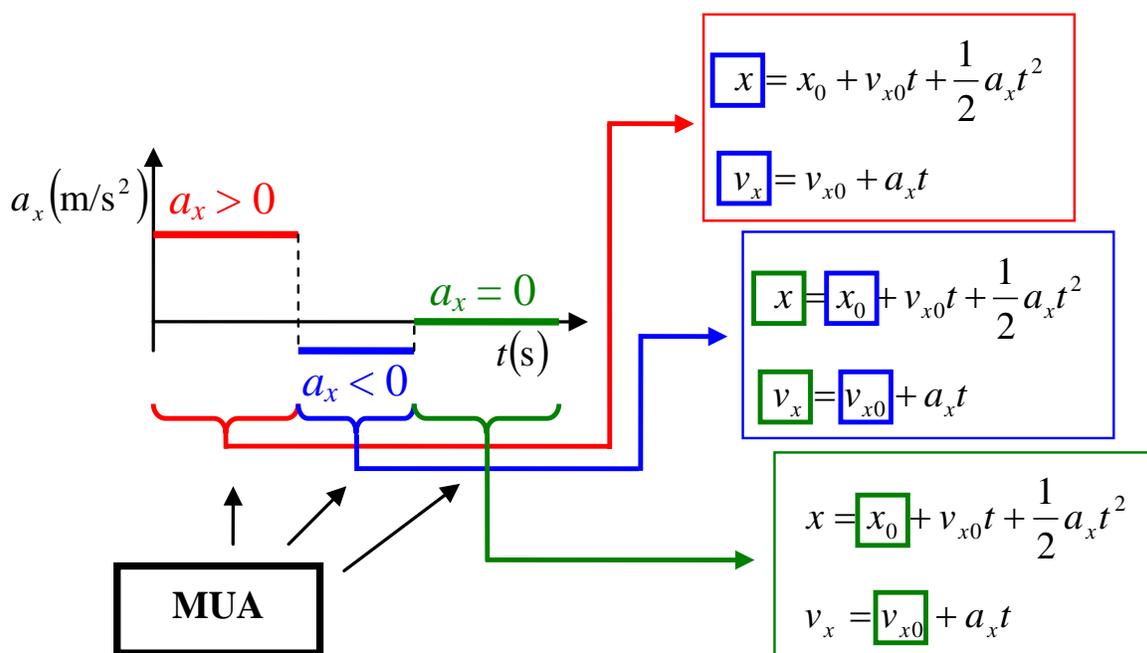
Les équations du MUA nous permettent de déterminer la position  $x$  et la vitesse  $v_x$  en fonction du temps  $t$ . L'accélération  $a_x$  quant à elle doit être constante.

Si l'accélération n'est pas constante, mais varie brusquement d'une valeur constante à une autre valeur constante, nous pouvons décomposer l'ensemble du mouvement en plusieurs paliers à accélération constante :

- Il faudra découper le problème en plusieurs étapes et définir une position initiale  $x_0$  et une vitesse initiale  $v_{x0}$  pour chaque accélération  $a_x$ .
- Pour relier les paliers, la position et la vitesse finale d'un palier deviendront alors la position et la vitesse initiale du palier suivant.

Exemple :

Une auto **accélère** à un rythme de  $5 \text{ m/s}^2$ , **freine** légèrement à  $2 \text{ m/s}^2$  et continue à **vitesse constante**.



**Situation 1 : Entre deux arrêts.** Un autobus se déplace en ligne droite entre deux arrêts espacés de 210 m. Au démarrage, il prend 3 secondes pour atteindre sa vitesse maximale de 54 km/h. Il roule ensuite à vitesse constante, puis, à la fin de sa course, il prend 5 secondes pour s'arrêter. Lors des phases de démarrage et de freinage, on suppose que sa vitesse en fonction du temps change à un taux constant. On désire déterminer, à l'aide du graphique  $v_x(t)$ , pendant combien de temps l'autobus a roulé à vitesse constante.

Évaluons notre vitesse en m/s :

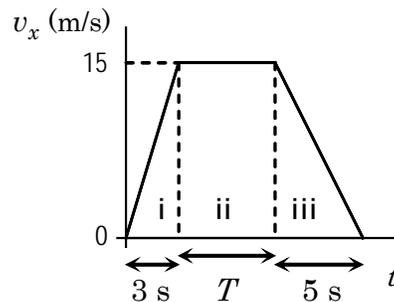
$$v_x = 54 \text{ km/h} \quad \Rightarrow \quad v_x = 54 \frac{\text{km}}{\text{h}} * \frac{1000}{\text{k}} * \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} * \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ sec}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_x = 15 \text{ m/s}}$$

Voici la représentation graphique de la vitesse  $v_x$  en fonction du temps de l'autobus pour les trois accélérations  $a_x$  différentes :

Déplacement total :

$$\Delta x = 210 \text{ m}$$



Évaluons l'aire sous la courbe du graphique pour les régions i, ii et iii :

Aire d'un triangle

Aire d'un rectangle

Aire d'un triangle

$$\Delta x_i = \frac{1}{2}(3 * 15) = 22,5 \text{ m}$$

$$\Delta x_{ii} = (T * 15) = 15T$$

$$\Delta x_{iii} = \frac{1}{2}(5 * 15) = 37,5 \text{ m}$$

Évaluons le temps  $T$  à partir de l'aire sous la courbe et du déplacement total  $\Delta x$  :

$$\Delta x = \Delta x_i + \Delta x_{ii} + \Delta x_{iii} \quad \Rightarrow \quad \Delta x = (22,5) + (15T) + (37,5) \quad (\text{Remplacer } \Delta x_i, \Delta x_{ii} \text{ et } \Delta x_{iii})$$

$$\Rightarrow \quad \Delta x = 60 + 15T \quad (\text{Simplifier})$$

$$\Rightarrow \quad (210) = 60 + 15T \quad (\text{Remplacer } \Delta x = 210)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T = 10 \text{ s}} \quad (\text{Isoler } T)$$

## Exercices

**Exercice X : Un 200 m.** Sur un parcours de 200 m, une voiture initialement immobile accélère à  $3 \text{ m/s}^2$  sur les premiers 100 m puis freine à  $2 \text{ m/s}^2$  sur le reste du parcours. (a) Combien de temps dure le trajet? (b) Quelle est la vitesse de la voiture à la fin du parcours?

**1.8.9 C'est un départ.** Une voiture démarre, accélère à  $4 \text{ m/s}^2$  pendant un certain temps, puis roule à la vitesse constante  $v_{x_C}$ . Si 10 secondes après son départ, la voiture a parcouru 128 m, que vaut  $v_{x_C}$  ?

## Solutions

**Exercice X : Un 200 m.**

Accélération :

$$a_{x(1)} = 3 \text{ m/s}^2$$

$$v_{x0(1)} = 0 \text{ m/s}$$

$$v_{x(1)} = v$$

$$x_{0(1)} = 0 \text{ m}$$

$$x_{(1)} = 100 \text{ m}$$

$$t_{(1)} = ?$$

Freinage :

$$a_{x(2)} = -2 \text{ m/s}^2$$

$$v_{x0(2)} = v_{x(1)} = v$$

$$v_{x(2)} = ?$$

$$x_{0(2)} = 100 \text{ m}$$

$$x_{(2)} = 200 \text{ m} \quad (\text{selon les chiffres, il va se rendre!!!})$$

$$t_{(2)} = ?$$

1<sup>er</sup> mouvement : trouver la vitesse finale :

$$v_{x(1)}^2 = v_{x0(1)}^2 + 2a_{x(1)}(x_{(1)} - x_{0(1)}) \quad \Rightarrow \quad (v)^2 = (0)^2 + 2(3)((100) - (0))$$

$$\Rightarrow \quad v^2 = 600$$

$$\Rightarrow \quad v = \pm 24,5 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 24,5 \text{ m/s}} \quad (\text{acc. positive})$$

1<sup>er</sup> mouvement : trouver le temps de parcours :

$$v_{x(1)} = v_{x0(1)} + a_{x(1)}t_{(1)} \quad \Rightarrow \quad (24,5) = (0) + (3)t_{(1)}$$

$$\Rightarrow \quad 3t_{(1)} = 24,5$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t_{(1)} = 8,17 \text{ s}}$$

2<sup>ième</sup> mouvement : trouver le temps de parcours :

$$\begin{aligned}x_{0(2)} &= x_{0(2)} + v_{x0(2)}t_{(2)} + \frac{1}{2}a_{x(2)}t_{(2)}^2 \quad \Rightarrow \quad (200) = (100) + (24,5)t_{(2)} + \frac{1}{2}(-2)t_{(2)}^2 \\ &\quad \Rightarrow \quad -t_{(2)}^2 + 24,5t_{(2)} - 100 = 0\end{aligned}$$

Nous avons une équation du 2<sup>ième</sup> degré à résoudre :

$$\begin{aligned}t_{(2)} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad t_{(2)} = \frac{-(24,5) \pm \sqrt{(24,5)^2 - 4(-1)(-100)}}{2(-1)} \\ &\quad \Rightarrow \quad t_{(2)} = \frac{24,5 \pm \sqrt{200}}{2} \quad \text{Premier temps} \\ &\quad \Rightarrow \quad t_{(2)} = \{5,18, 19,3\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{(2)} = 5,18 \text{ s}}\end{aligned}$$

2<sup>ième</sup> mouvement : trouver la vitesse finale :

$$\begin{aligned}v_{x(2)} &= v_{x0(2)} + a_{x(2)}t_{(2)} \quad \Rightarrow \quad v_{x(2)} = (24,5) + (-2)(5,18) \\ &\quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{x(2)} = 14,1 \text{ m/s}}\end{aligned}$$

Répondre aux questions :

(a) Le temps de parcours est :  $t = t_{(1)} + t_{(2)} = (8,17) + (5,18) = 13,35 \text{ s}$

(b) La vitesse finale est :  $v_{x(2)} = 14,1 \text{ m/s}$

**1.8.9** *C'est un départ.*

Mouvement 1)

$$\begin{aligned}a_{x(1)} &= 4 \text{ m/s}^2 \\v_{x0(1)} &= 0 \text{ m/s} \\v_{x(1)} &= v_{xC} \\x_{0(1)} &= 0 \text{ m} \\x_{(1)} &= D_1 \\t_{(1)} &= t_1\end{aligned}$$

Mouvement 2)

$$\begin{aligned}a_{x(2)} &= 0 \text{ m/s}^2 \\v_{x0(2)} &= v_{xC} \\v_{x(2)} &= v_{xC} \quad (\text{accélération nulle}) \\x_{0(2)} &= D_1 \text{ m} \\x_{(2)} &= 128 \text{ m} \\t_{(2)} &= t_2\end{aligned}$$

Voici nos équations :

$$t_{(1)} + t_{(2)} = 10 \quad \Rightarrow \quad t_1 + t_2 = 10 \quad (\text{eq1})$$

$$x_{(1)} = x_{0(1)} + v_{x0(1)}t_{(1)} + \frac{1}{2}a_{x(1)}t_{(1)}^2 \quad \Rightarrow \quad D_1 = \frac{1}{2}(4)t_1^2 = 2t_1^2 \quad (\text{eq2})$$

$$v_{x(1)} = v_{x0(1)} + a_{x(1)}t_{(1)} \quad \Rightarrow \quad v_{xC} = (4)t_1 = 4t_1 \quad (\text{eq3})$$

$$x_{(2)} = x_{0(2)} + v_{x0(2)}t_{(2)} + \frac{1}{2}a_{x(2)}t_{(2)}^2 \quad \Rightarrow \quad 128 = D_1 + v_{xC}t_2 \quad (\text{eq4})$$

Nous avons 4 équations et 4 inconnus :

$$\text{eq2 dans eq4} \quad \Rightarrow \quad 128 = 2t_1^2 + v_{xC}t_2 \quad (\text{eq5})$$

$$\begin{aligned}\text{eq3 dans eq5} \quad &\Rightarrow \quad 128 = 2\left(\frac{v_{xC}}{4}\right)^2 + v_{xC}t_2 \\&\Rightarrow \quad 128 = \frac{v_{xC}^2}{8} + v_{xC}t_2 \quad (\text{eq6})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{eq1 dans eq6} \quad &\Rightarrow \quad 128 = \frac{v_{xC}^2}{8} + v_{xC}(10 - t_1) \\&\Rightarrow \quad 128 = \frac{v_{xC}^2}{8} + 10v_{xC} - v_{xC}t_1 \quad (\text{eq7})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{eq3 dans eq7} \quad &\Rightarrow \quad 128 = \frac{v_{xC}^2}{8} + 10v_{xC} - v_{xC}\left(\frac{v_{xC}}{4}\right) \\&\Rightarrow \quad 128 = \frac{v_{xC}^2}{8} + 10v_{xC} - \frac{v_{xC}^2}{4} \\&\Rightarrow \quad \boxed{0,125v_{xC}^2 - 10v_{xC} + 128 = 0}\end{aligned}$$

Nous avons une équation du 2<sup>ième</sup> degré à résoudre :

$$v_{xC} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow v_{xC} = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(0,125)(128)}}{2(0,125)}$$

$$\Rightarrow v_{xC} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{0,25}$$

$$\Rightarrow v_{xC} = \frac{10 \pm 6}{0,25}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{xC} = \{16, 64\}} \quad (\text{Vitesses admissibles})$$

Puisque nous avons résolu une équation du 2<sup>ième</sup> ordre, les mathématiques ne tiennent pas compte du signe de l'accélération. Nous garderons pour cette raison la vitesse de 16 m/s, car elle est plus logique avec notre situation. Pour atteindre 64 m/s avec notre accélération, il faut :

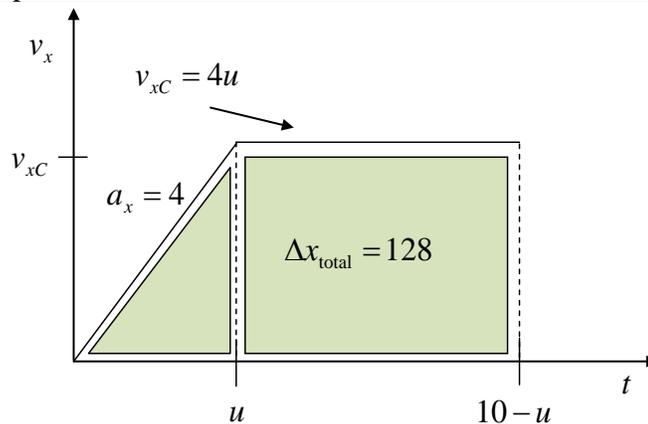
$$v_x = v_{x0} + a_x t \Rightarrow t = \frac{v_x}{a_x} = \frac{64}{4} = 16 \text{ s}$$

$$\Rightarrow \text{temps maximum est de 10 s, donc vitesse invalide.}$$

Ainsi, nous avons une vitesse :

$$\boxed{v_{xC} = 16 \text{ m/s}}$$

Solution pour évaluer le temps d'accélération à l'aide de l'aire sous la courbe :



$$\Delta x = \text{aire triangle} + \text{aire rectangle} \Rightarrow 128 = \frac{4u * u}{2} + (10-u) * 4u$$

$$\Rightarrow 128 = 2u^2 + 40u - 4u^2$$

$$\Rightarrow -2u^2 + 40u - 128 = 0$$

$$\Rightarrow u = \{4, 16\}$$

$$\Rightarrow \text{Choisir 4 s.}$$





# Chapitre 1.8b – Le MUA à deux mobiles

## Mouvement à deux mobiles

Un mouvement à deux mobiles consiste à étudier le **mouvement de deux objets simultanément**, mais **individuellement**. Chaque objet **A** et **B** aura ses propres équations du mouvement

$$x_A(t_A), v_{xA}(t_A) \quad \text{et} \quad x_B(t_B), v_{xB}(t_B)$$

pour décrire son mouvement, mais ces **équations** seront **reliées** par certains critères.

Par exemple, une collision aura lieu lorsque

$$x_A = x_B$$

au même moment.



<https://www.franceabris.com/278-carport-2-voitures-structures-en-bois-metal-ou-toile-tendue>

Pour faire la cinématique de deux voitures, il faut utiliser une équation du mouvement pour chaque voiture.

**Situation 5 (Chapitre 1.6) : Béatrice double un camion.** Un camion roule à la vitesse constante de 90 km/h. dans la voie de droite de l'autoroute. Béatrice roule à la même vitesse dans la voie de gauche, 100 m *en arrière* du camion (on ne tient pas compte de la distance latérale). À  $t = 0$ , Béatrice se met à accélérer à  $1 \text{ m/s}^2$ . On désire déterminer à quel instant  $t$  la voiture de Béatrice sera 50 m *en avant* du camion et quelle sera sa vitesse à cet instant.

Évaluons la vitesse en m/s et les données de base :

$$90 \text{ km/h} = 90 \frac{\text{km}}{\text{h}} * \frac{1000}{\text{k}} * \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} * \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 25 \text{ m/s}$$

Camion : (C)

$$x_{C0} = 0 \text{ m} \quad (\text{camion à l'origine à } t = 0)$$

$$x_C = x$$

$$v_{xC0} = 25 \text{ m/s}$$

$$v_{xC} = v_{xC0} = 25 \text{ m/s}$$

$$a_{xC} = 0 \text{ m/s}^2$$

$$t_C = t$$

Voiture de Béatrice : (V)

$$x_{V0} = -100 \text{ m} \quad (100 \text{ m derrière le camion})$$

$$x_V = x + 50 \quad (50 \text{ m en avant du camion})$$

$$v_{xV0} = 25 \text{ m/s}$$

$$v_{xV} = v$$

$$a_{xV} = 1 \text{ m/s}^2$$

$$t_V = t$$

**P.S.**  $x$  : position du camion après  $t$  secondes

Évaluons l'équation de la position du camion (C) à l'aide du MUA :

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \Rightarrow (x_C) = (0) + (25)t + \frac{1}{2}(0)t^2 \quad (\text{Remplacer } x_0, v_{x0} \text{ et } a_x)$$

$$\Rightarrow \boxed{x_C = 25t} \quad (\text{Position du camion})$$

Évaluons l'équation de la position de la voiture de Béatrice (V) à l'aide du MUA :

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \Rightarrow (x_V) = (-100) + (25)t + \frac{1}{2}(1)t^2 \quad (\text{Remplacer } x_0, v_{x0} \text{ et } a_x)$$
$$\Rightarrow \boxed{x_V = -100 + 25t + 0,5t^2} \quad (\text{Position voiture de Béatrice})$$

Remplaçons la position finale du camion  $x_C$  et la position finale de la voiture de Béatrice  $x_V$  par leur expression définie auparavant :

$$x_C = x : \quad x_C = 25t \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 25t} \quad (1)$$

$$x_V = x + 50 : \quad x_V = -100 + 25t + 0,5t^2 \quad \Rightarrow \quad (x + 50) = -100 + 25t + 0,5t^2$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{x = -150 + 25t + 0,5t^2} \quad (2)$$

Égalisons la position  $x$  du camion introduite dans les deux équations de position (1) et (2) puis isolons le temps  $t$  :

$$(1) = (2) \quad \Rightarrow \quad 25t = -150 + 25t + 0,5t^2 \quad (\text{Égalisation de la variable } x)$$
$$\Rightarrow \quad 0 = -150 + 0,5t^2 \quad (\text{Simplification})$$
$$\Rightarrow \quad 300 = t^2 \quad (\text{Isoler } t^2)$$
$$\Rightarrow \quad t = \pm\sqrt{300} \quad (\text{Isoler } t)$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{t = 17,3 \text{ s}} \quad (\text{Évaluer } t, \text{ temps physique})$$

Évaluons la vitesse de la voiture à 17,3 s :

$$v_x = v_{x0} + a_x t \quad \Rightarrow \quad v_x = (25) + (1)(17,3) \quad (\text{Remplacer valeurs numériques})$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{v_x = 42,3 \text{ m/s}} \quad (\text{Évaluer } v_x)$$

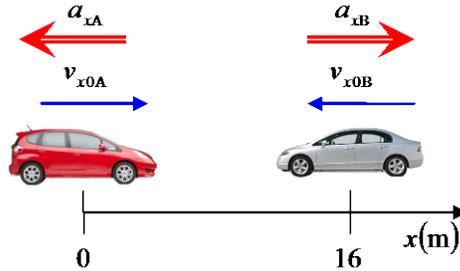
Évaluons la vitesse en km/h :

$$42,3 \text{ m/s} = 42,3 \frac{\text{m}}{\text{s}} * \frac{1 \text{ k}}{1000} * \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} * \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} = 152,3 \text{ km/h}$$

**Situation 3 : Face à face.** Deux voitures jouet téléguidées se déplaçant le long de l'axe des  $x$  foncent l'une vers l'autre : la voiture **A** se déplace à 5 m/s dans le sens positif et la voiture **B** se déplace à 3 m/s dans le sens négatif. À  $t = 0$ , les voitures sont séparées de 16 m et elles se mettent à freiner à  $1 \text{ m/s}^2$ . On désire déterminer s'il y a collision et le cas échéant, à quel instant  $t$  elle se produit. (On suppose bien sûr qu'une fois qu'une voiture s'arrête, elle demeure arrêtée.)

Représentation graphique des conditions initiales :

<u>Voiture A</u>	<u>Voiture B</u>
$a_{xA} = -1 \text{ m/s}^2$	$a_{xB} = 1 \text{ m/s}^2$
$v_{x0A} = 5 \text{ m/s}$	$v_{x0B} = -3 \text{ m/s}$
$x_{0A} = 0 \text{ m}$	$x_{0B} = 16 \text{ m}$



S'il y a collision :  $x_A = x_B = x$  (les voitures se retrouvent)  
 S'il n'y a pas de collision :  $v_{xA} = v_{xB} = 0$  (les voitures s'immobilisent)

Afin d'éviter les erreurs de logique physique dans le problème (une voiture recule), calculons quelques éléments préliminaires :

### 1) Temps immobilisation

$$v_x = v_{x0} + a_x t \quad \Rightarrow \quad t_{\text{imm}} = \frac{v_x - v_{x0}}{a_x} = \frac{(0) - v_{x0}}{a_x} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{\text{imm}} = -\frac{v_{x0}}{a_x}}$$

Voiture A :  $t_{\text{imm A}} = -\frac{v_{x0A}}{a_x} = -\frac{(5)}{(-1)} = 5 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{\text{imm A}} = 5 \text{ s}}$

Voiture B :  $t_{\text{imm B}} = -\frac{v_{x0B}}{a_x} = -\frac{(-3)}{1} = 3 \text{ s} \quad \Rightarrow \quad \boxed{t_{\text{imm B}} = 3 \text{ s}}$

### 2) Distance de parcours avant immobilisation

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad \Rightarrow \quad x_{\text{imm}} = x_0 + v_{x0}t_{\text{imm}} + \frac{1}{2}a_x t_{\text{imm}}^2$$

Voiture A :  $x_{\text{imm A}} = x_{0A} + v_{x0A}t_{\text{imm A}} + \frac{1}{2}a_{xA}t_{\text{imm A}}^2 = (0) + (5)(5) + \frac{1}{2}(-1)(5)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{\text{imm A}} = 12,5 \text{ m}}$

Voiture B :  $x_{\text{imm B}} = x_{0B} + v_{x0B}t_{\text{imm B}} + \frac{1}{2}a_{xB}t_{\text{imm B}}^2 = (16) + (-3)(3) + \frac{1}{2}(1)(3)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{\text{imm B}} = 11,5 \text{ m}}$

Conclusion :

- A :  $0 \rightarrow 12,5$  en 5 s ➤ Il y a sûrement une collision, car il y a croisement dans les positions.
- B :  $16 \rightarrow 11,5$  en 3 s ➤ La voiture B sera peut-être immobilisée lors de la collision.

Puisque c'est la **voiture B** qui **s'immobilise en premier**, évaluons la position de la voiture A au moment où la voiture B est immobile :

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \Rightarrow x_A = x_{0A} + v_{x0A}(t_{\text{imm B}}) + \frac{1}{2}a_{xA}(t_{\text{imm B}})^2 && \text{(Reformulation)} \\
 &\Rightarrow x_A = (0) + (5)(3) + \frac{1}{2}(-1)(3)^2 && \text{(Remplacer valeur num.)} \\
 &\Rightarrow \boxed{x_A = 10,5 \text{ m}} && \text{(Évaluer } x_A)
 \end{aligned}$$

A : 0 → 10,5 en 3 s ➤ Il manque 1 m à la voiture A pour atteindre la voiture B.

B : 16 → 11,5 en 3 s ➤ La collision sera effectuée avec la voiture B immobile.

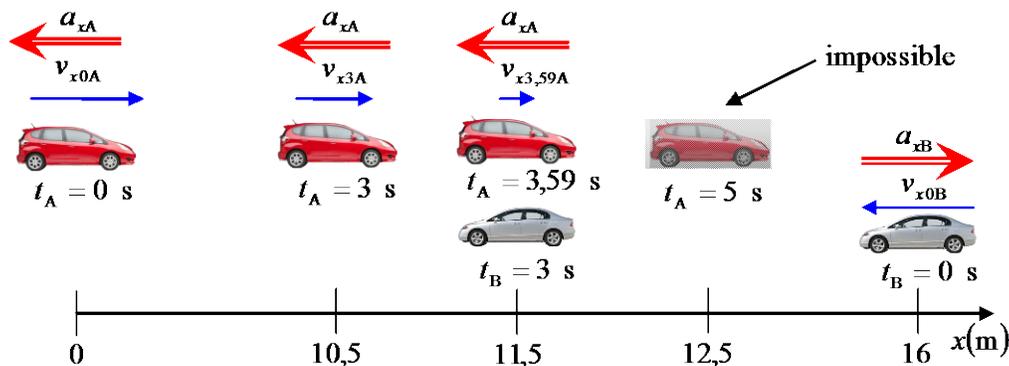
Puisque la **position d'arrêt** de la **voiture B** est le **lieu de la collision**, on peut évaluer le temps avant la collision :

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \Rightarrow x_{\text{col}} = x_{0A} + v_{x0A}(t_{\text{col}}) + \frac{1}{2}a_{xA}(t_{\text{col}})^2 && \text{(Reformulation)} \\
 &\Rightarrow (11,5) = (0) + (5)t_{\text{col}} + \frac{1}{2}(-1)t_{\text{col}}^2 && \text{(Remplacer valeur num.)} \\
 &\Rightarrow 0 = -11,5 + 5t_{\text{col}} - 0,5t_{\text{col}}^2 && \text{(Évaluer } x_A)
 \end{aligned}$$

Nous avons une équation du 2<sup>ième</sup> degré à résoudre :

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow t_{\text{col}} = \frac{-(5) \pm \sqrt{(5)^2 - 4(-0,5)(-11,5)}}{2(-0,5)} && \text{(Remplacer } a, b \text{ et } c) \\
 &\Rightarrow t_{\text{col}} = \frac{5 \pm \sqrt{2}}{1} && \text{(Simplification)} \\
 &\Rightarrow t = \{3,59, 6,41\} && \text{(Deux solutions)} \\
 &\Rightarrow \boxed{t = 3,59 \text{ s}} && \text{(Choisir le 1<sup>ier</sup> temps)}
 \end{aligned}$$

Voici une représentation graphique de la situation :



## Exercices

**1.8.2** *Un chauffeur impoli.* Un chauffeur d'autobus ferme la porte au nez de Béatrice, démarre et accélère à  $1 \text{ m/s}^2$ . Prise au dépourvu, Béatrice reste immobile pendant 2 secondes, puis elle se met à courir à la vitesse constante de  $5 \text{ m/s}$  pour rattraper l'autobus. Quelle distance doit-elle parcourir pour rejoindre la porte de l'autobus et faire une grimace au chauffeur?

**1.8.15** *Le délai maximal.* Considérez de nouveau la situation de l'exercice **1.8.2** : *Un chauffeur impoli.* Si Béatrice reste immobile pendant trop longtemps, elle ne pourra jamais rejoindre la porte de l'autobus. Quelle est la durée maximale pendant laquelle elle peut se permettre de demeurer immobile?

## Solutions

**1.8.2** *Un chauffeur impoli.*

Autobus

$$a_{xA} = 1 \text{ m/s}^2$$

$$v_{x0A} = 0 \text{ m/s}$$

$$v_{xA} = v \text{ m/s}$$

$$x_{0A} = 0 \text{ m}$$

$$x_A = X \text{ m}$$

Béatrice

$$a_{xB} = 0 \text{ m/s}^2$$

$$v_{x0B} = 5 \text{ m/s}$$

$$v_{xB} = 5 \text{ m/s}$$

$$x_B = 0 \text{ m}$$

$$x_B = X \text{ m} \quad (X : \text{position de rencontre})$$

Relation dans le temps :  $t_A = 2 + t_B$  (Béatrice part 2 secondes plus tard)

**P.S.** Puisque Béatrice débute son mouvement à  $t_B = 0$ , alors l'autobus aura déjà bougé pendant 2 secondes lorsque Béatrice débutera sa course (2 secondes de retard).

Équations :

Autobus :  $x_A = x_{0A} + v_{x0A}t_A + \frac{1}{2}a_{xA}t_A^2 \Rightarrow (X) = (0) + (0)t_A + \frac{1}{2}(1)t_A^2$   
 $\Rightarrow \boxed{X = 0,5t_A^2}$

Béatrice :  $x_B = x_B + v_{x0B}t_B + \frac{1}{2}a_{xB}t_B^2 \Rightarrow (X) = (0) + (5)t_B + \frac{1}{2}(0)t_B^2$   
 $\Rightarrow \boxed{X = 5t_B}$

On égalise les deux équations et l'on utilise la relation dans le temps :

$$\begin{aligned}
 0,5t_A^2 = 5t_B &\Rightarrow 0,5t_A^2 - 5t_B = 0 \\
 &\Rightarrow 0,5t_A^2 - 5(t_A - 2) = 0 \\
 &\Rightarrow 0,5t_A^2 - 5t_A + 10 = 0
 \end{aligned}$$

Nous avons une équation du 2<sup>ième</sup> degré à résoudre :

$$\begin{aligned}
 t_A = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &\Rightarrow t_A = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(0,5)(10)}}{2(0,5)} \\
 &\Rightarrow t_A = 5 \pm \sqrt{5} \\
 &\Rightarrow t_A = \{2,76, 7,24\}
 \end{aligned}$$

Avec la relation du temps  $t_A = 2 + t_B$ , évaluons le temps associé à la course de Béatrice :

$$\begin{aligned}
 t_A = \{2,76, 7,24\} &\Rightarrow 2 + t_B = \{2,76, 7,24\} && \text{(Remplacer } t_A = 2 + t_B \text{)} \\
 &\Rightarrow t_B = \{0,76, 5,24\} && \text{(Isoler } t_B \text{)}
 \end{aligned}$$

Béatrice possède deux moments pour faire ça grimace. Le premier temps sera :

$$t_B = 0,76 \text{ s}$$

Ainsi, elle doit parcourir :

$$\begin{aligned}
 X = 5t_B &\Rightarrow X = 5(0,76) \\
 &\Rightarrow X = 3,8 \text{ m}
 \end{aligned}$$

### **1.8.15** *Le délai maximal.*

Autobus

$$a_{xA} = 1 \text{ m/s}^2$$

$$v_{x0A} = 0 \text{ m/s}$$

$$v_{xA} = v \text{ m/s}$$

$$x_{0A} = 0 \text{ m}$$

$$x_A = X \text{ m}$$

Béatrice

$$a_{xB} = 0 \text{ m/s}^2$$

$$v_{xSB} = 5 \text{ m/s}$$

$$v_{xB} = 5 \text{ m/s}$$

$$x_{SB} = 0 \text{ m}$$

$$x_B = X \text{ m} \quad \text{(position de rencontre)}$$

Relation dans le temps :  $t_A = S + t_B$  (Béatrice part S secondes plus tard)

Équations :

$$\begin{aligned} \text{Autobus : } \quad x_A &= x_{0A} + v_{x0A}t_A + \frac{1}{2}a_{xA}t_A^2 \Rightarrow (X) = (0) + (0)t_A + \frac{1}{2}(1)t_A^2 \\ &\Rightarrow \boxed{X = 0,5t_A^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Béatrice : } \quad x_B &= x_B + v_{xB}t_B + \frac{1}{2}a_{xB}t_B^2 \Rightarrow (X) = (0) + (5)t_B + \frac{1}{2}(0)t_B^2 \\ &\Rightarrow \boxed{X = 5t_B} \end{aligned}$$

On égalise les deux équations et l'on utilise la relation dans le temps :

$$\begin{aligned} 0,5t_A^2 &= 5t_B &\Rightarrow 0,5t_A^2 - 5t_B &= 0 \\ &&\Rightarrow 0,5t_A^2 - 5(t_A - S) &= 0 \\ &&\Rightarrow 0,5t_A^2 - 5t_A + 5S &= 0 \end{aligned}$$

Nous avons une équation du 2<sup>ième</sup> degré à résoudre :

$$\begin{aligned} t_A &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow t_A = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(0,5)(5S)}}{2(0,5)} \\ &\Rightarrow t_A = 5 \pm \sqrt{25 - 10S} \end{aligned}$$

Pour avoir une **valeur réelle** de temps, il faut que :

$$S \leq 2,5$$

Évaluons la valeur limite lorsque  $S = 2,5$  et  $\sqrt{25 - 10S} = 0$  :

$$\begin{aligned} t_A &= 5 \pm \sqrt{25 - 10S} \Rightarrow t_A = 5 \pm \sqrt{0} \\ &\Rightarrow \boxed{t_A = 5 \text{ s}} \end{aligned}$$

Essayons ce temps d'attente dans nos équations du mouvement :

$$\text{Autobus : } \quad X = 0,5t_A^2 = 0,5(5)^2 = 12,5 \text{ m}$$

$$\text{Béatrice : } \quad X = 5t_B = 5(t_A - S) = 5(5 - 2,5) = 12,5 \text{ m}$$

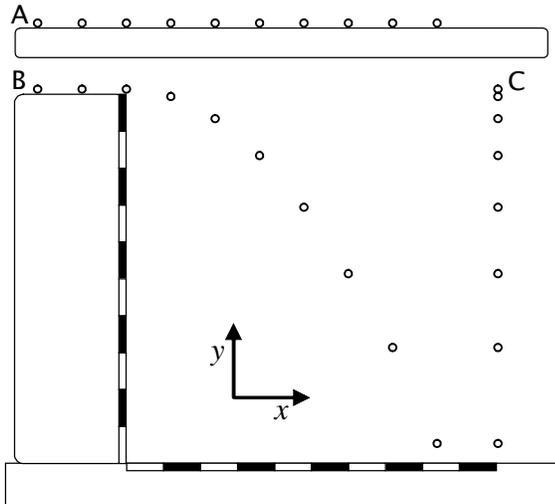
Nous vérifions ici que le temps limite d'attente est de :  $\boxed{S = 2,5 \text{ s}}$



# Chapitre 1.10 – La chute libre à 2 dimensions

## La nature vectorielle de la vitesse en chute libre

Analysons la cinématique de trois billes lancées de la façon suivante :



- 1) Une bille **A** et une bille **B** sont lancées horizontalement avec la même vitesse initiale (mouvement horizontal).
- 2) Lorsque la bille **B** quitte la surface horizontale, on laisse tomber la bille **C** avec une vitesse initiale nulle (mouvement vertical).

### Conclusion :

- 1) Les mouvements selon l'axe  $x$  de la bille **A** et **B** sont identiques, car ils possèdent les mêmes vitesses initiales.
- 2) Les mouvements selon l'axe  $y$  de la bille **B** et **C** sont identiques, car ils possèdent les mêmes vitesses initiales et les mêmes accélérations.

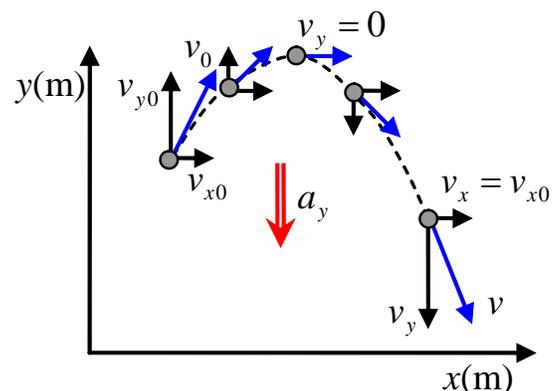
- ❖ On réalise qu'un mouvement selon l'axe  $x$  n'influence pas le mouvement selon l'axe  $y$  et vis-versa dans la chute libre.
- ❖ Pour résoudre un problème de chute libre en deux dimension, il sera important de décomposer la vitesse en deux parties : selon l'axe  $x$  ( $v_x$ ) et selon l'axe  $y$  ( $v_y$ )
- ❖ Une situation de chute avec résistance de l'air est beaucoup plus complexe à analyser, car la résistance dépend de la vitesse ce qui « couple » les équations du mouvement.

## Chute libre à deux dimensions

La **chute libre** à deux dimensions est un mouvement **uniquement sous l'influence** d'une **gravité constante** dont le mouvement vertical selon l'axe  $y$  est indépendant du mouvement horizontal selon l'axe  $x$ . L'accélération selon l'axe  $y$  est orientée vers le bas et l'accélération selon l'axe  $x$  est nulle :

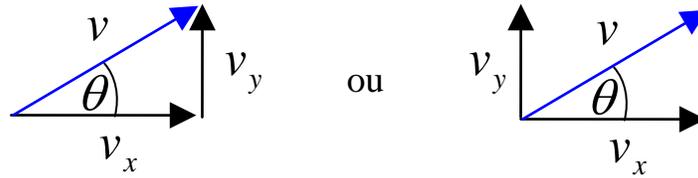
$$a_x = 0 \quad \text{et} \quad a_y = -g$$

- où
- $a_x$  : Accélération horizontale selon l'axe  $x$  ( $\text{m/s}^2$ )
  - $a_y$  : Accélération verticale dont l'axe  $y$  est positive vers le haut ( $\text{m/s}^2$ ).
  - $g$  : Accélération gravitationnelle ( $\text{m/s}^2$ ).



## Décomposition de la vitesse

Considérons un objet ayant une vitesse de module  $v$  orientée vers le haut à un angle  $\theta$  par rapport à l'horizontale :



On peut décomposer la vitesse selon l'axe  $x$  et l'axe  $y$  de la façon suivante :

$$v_x = v \cos(\theta) \quad \text{et} \quad v_y = v \sin(\theta)$$

Relation du module de la vitesse:  $v^2 = v_x^2 + v_y^2$

**Situation 1 : Une balle au bord du gouffre.** Une balle glisse à 6 m/s sur une surface horizontale sans frottement située à 10 m au-dessus du sol. Lorsqu'elle atteint le rebord de la surface, elle se met à voyager en chute libre. On désire calculer **(a)** son temps de vol et **(b)** la distance horizontale parcourue pendant la chute.

Voici les données de base de la situation :

Selon l'axe $y$		Selon l'axe $x$		Selon l'axe $x$ et $y$
$a_y = -9,8 \text{ m/s}^2$		$a_x = 0$		
$v_{y0} = 0$	$y_0 = 10 \text{ m}$	$v_{x0} = 6 \text{ m/s}$	$x_0 = 0$	$t = ?$
$v_y = ?$	$y = 0$	$v_x = ?$	$x = ?$	

Évaluons le temps de vol avec l'équation de la position du MUA :

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \Rightarrow (0) = (10) + (0)t + \frac{1}{2}(-9,8)t^2 \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow 4,9t^2 = 10 \quad (\text{Calcul})$$

$$\Rightarrow t = \pm 1,43 \text{ s} \quad (\text{Évaluer la racine})$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 1,43 \text{ s}} \quad (\mathbf{a}) \quad (\text{Choisir le temps positif})$$

Évaluons la distance horizontale parcourue : (puisque  $x_0 = 0$ , alors  $x$  est égal à la distance parcourue)

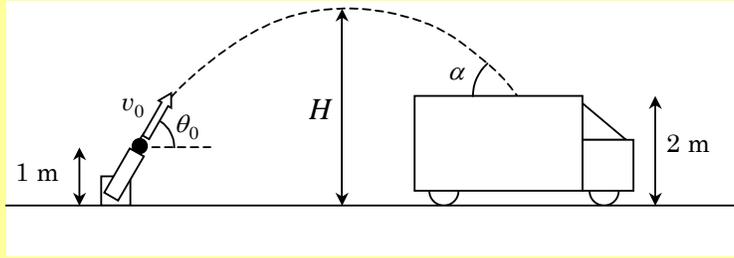
$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \Rightarrow x = (0) + (6)t + \frac{1}{2}(0)t^2 \quad (\text{Remplacer } x_0 = 0 \text{ et } a_x = 0)$$

$$\Rightarrow x = 6t \quad (\text{Calcul})$$

$$\Rightarrow x = 6(1,43) \quad (\text{Remplacer } t = 1,43 \text{ s, temps de parcours})$$

$$\Rightarrow \boxed{x = 8,53 \text{ m}} \quad (\mathbf{b}) \quad (\text{Calcul})$$

**Situation X : Les joies du lance-balles, prise 1.** Un lance-balles projette une balle à une vitesse de module  $v_0 = 10$  m/s selon un angle de  $\theta_0 = 60^\circ$  vers le haut par rapport à l'horizontale. Au moment où la balle sort du lance-balles, elle est à 1 m au-dessus du sol.



En retombant, elle frappe le toit d'un camion à 2 m au-dessus du sol. On désire calculer **(a)** le temps de vol de la balle, **(b)** la hauteur maximale  $H$  de la balle par rapport au sol et **(c)** l'angle  $\alpha$  que fait la trajectoire de la balle avec l'horizontale lorsqu'elle frappe le toit de camion.

Données de base : (Situation du lancement de la balle dans le camion)

Selon l'axe y	Selon l'axe x
$a_y = -9,8 \text{ m/s}^2$	$a_x = 0$
$v_{y0} = v_0 \sin(\theta) = (10)\sin(60^\circ) = 8,66 \text{ m/s}$	$v_{x0} = v_0 \cos(\theta) = (10)\cos(60^\circ) = 5 \text{ m/s}$
$v_y = ?$	$v_x = ?$
$y_0 = 1 \text{ m}$	$x_0 = 0$
$y = 2 \text{ m}$	$x = ?$
Selon l'axe x et y	
$t = ?$	

Évaluons le temps de vol de la balle avec l'équation de la position du MUA :

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \Rightarrow (2) = (1) + (8,66)t + \frac{1}{2}(-9,8)t^2 \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \boxed{-4,9t^2 + 8,66t - 1 = 0} \quad (\text{Calcul et réécriture})$$

Évaluons la solution au polynôme du 2<sup>ième</sup> degré :

$$t = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow t = \frac{-(8,66) \pm \sqrt{(8,66)^2 - 4(-4,9)(-1)}}{2(-4,9)} \quad (\text{Remplacer } a, b \text{ et } c)$$

$$\Rightarrow t = \frac{8,66 \pm \sqrt{55,4}}{9,8} \quad (\text{Simplification})$$

$$\Rightarrow t = \{0,12, 1,64\} \quad (\text{Deux solutions})$$

$$\Rightarrow \boxed{t = 1,64 \text{ s}} \quad (\text{a}) \quad (\text{Choisir le 2<sup>ième</sup> temps})$$

Évaluons la hauteur maximale atteinte par la balle avec le critère  $v_y = 0$  :

$$\begin{aligned}v_y^2 &= v_{y0}^2 + 2a_y(y - y_0) &\Rightarrow & (0)^2 = (8,66)^2 + 2(-9,8)(y - (1)) && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ & &\Rightarrow & 0 = 94,6 - 19,6(H) && \text{(Calcul et remplacer } y = H \text{ )} \\ & &\Rightarrow & \boxed{H = 4,83 \text{ m}} && \text{(Isoler } H \text{ )} \quad \text{(b)}\end{aligned}$$

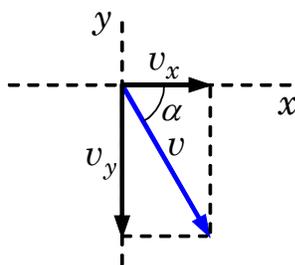
Évaluons la vitesse de la balle avant le contact avec le camion :

$$\begin{aligned}\text{Vitesse finale en } x : a_x &= 0 &\Rightarrow & v_x = v_{x0} = 5 \text{ m/s} && \text{(Pas d'accélération)} \\ & &\Rightarrow & \boxed{v_x = 5 \text{ m/s}} && \text{(Vitesse en } x \text{ )}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Vitesse finale en } y : v_y &= v_{y0} + a_y t &\Rightarrow & v_y = (8,66) + (-9,8)t && \text{(Remplacer } v_{y0} \text{ et } a_y \text{ )} \\ & &\Rightarrow & v_y = 8,66 - 9,8(1,64) && \text{(Remplacer } t = 1,64 \text{ s )} \\ & &\Rightarrow & \boxed{v_y = -7,41 \text{ m/s}} && \text{(Vitesse en } y \text{ )}\end{aligned}$$

À partir de la notion de tangente, évaluons l'angle d'arrivé de la balle :

$$\tan(\alpha) = \frac{v_y}{v_x} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \quad \text{(Isoler } \alpha \text{ )}$$



$$\begin{aligned}&\Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{(-7,41)}{(5)}\right) && \text{(Remplacer } v_x \text{ et } v_y \text{ )} \\ &\Rightarrow \boxed{\alpha = -56,0^\circ} && \text{(Calcul)} \quad \text{(c)}\end{aligned}$$

## Exercices

**Référence :** Physique 1 – Mécanique, Harris Benson. P111 E17, section 4.2

Un ballon de basket-ball est lancé à  $45^\circ$  par rapport à l'horizontale. Le panier se trouve à une distance horizontale de 4 m et à une hauteur de 0,8 m au-dessus du point où on lance le ballon. Quel est le module de la vitesse initiale requise pour atteindre le panier?

# Solutions

**Référence :** Physique 1 – Mécanique, Harris Benson. P111 E17, section 4.2

Données de base :

En y :

$$a_y = -9,8 \text{ m/s}^2$$

$$v_{y0} = v_0 \sin(\theta) = v_0 \sin(45^\circ)$$

$$y_0 = 0 \text{ m}$$

$$y = 0,8 \text{ m}$$

En x :

$$a_x = 0 \text{ m/s}^2$$

$$v_{x0} = v_0 \cos(\theta) = v_0 \cos(45^\circ)$$

$$x_0 = 0 \text{ m}$$

$$x = 4 \text{ m}$$

Équation en x :

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \quad \Rightarrow \quad (4) = (0) + (v_0 \cos(45^\circ))t + \frac{1}{2}(0)t^2$$

$$\Rightarrow 4 = v_0 \cos(45^\circ) t$$

$$\Rightarrow \boxed{t = \frac{4}{v_0 \cos(45^\circ)}} \quad (\text{temps de vol})$$

Équation en y :

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \quad \Rightarrow \quad (0,8) = (0) + (v_0 \sin(45^\circ))t + \frac{1}{2}(-9,8)t^2$$

$$\Rightarrow \boxed{0,8 = v_0 \sin(45^\circ)t - 4,9t^2}$$

On peut remplacer le temps trouvé en x dans l'équation en y :

$$0,8 = v_0 \sin(45^\circ)t - 4,9t^2 \quad \Rightarrow \quad 0,8 = v_0 \sin(45^\circ) \left( \frac{4}{v_0 \cos(45^\circ)} \right) - 4,9 \left( \frac{4}{v_0 \cos(45^\circ)} \right)^2$$

$$\Rightarrow 0,8 = 4 \tan(45^\circ) - \frac{4,9 * 16}{v_0^2 \cos^2(45^\circ)}$$

$$\Rightarrow 0,8 = 4 - \frac{78,4}{v_0^2 \cos^2(45^\circ)}$$

$$\Rightarrow -3,2 = -\frac{78,4}{v_0^2 \cos^2(45^\circ)}$$

$$\Rightarrow v_0^2 = \frac{78,4}{3,2 \cos^2(45^\circ)} = 49$$

$$\Rightarrow v_0 = \pm 7,0 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_0 = 7,0 \text{ m/s}}$$

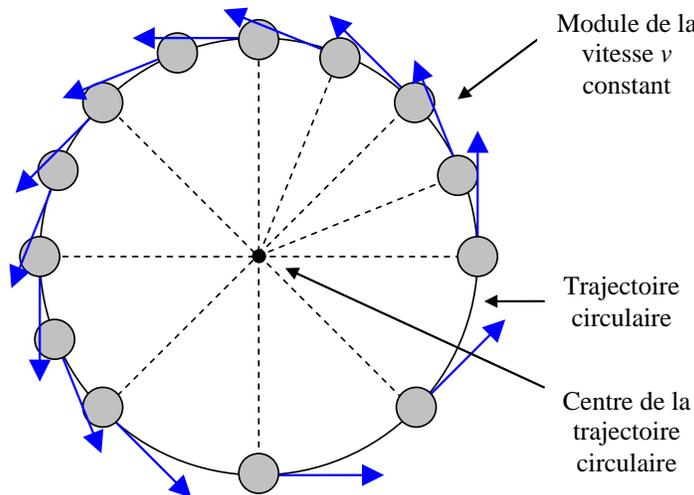




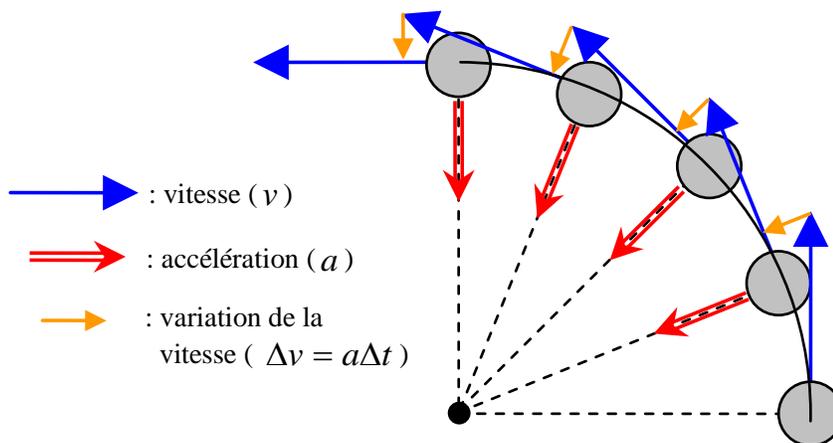
# Chapitre 1.12a – Le mouvement circulaire et l'accélération centripète

## Accélération dans un mouvement circulaire

Un **mouvement circulaire uniforme** (MCU) est un mouvement dont le **module** de la **vitesse** est **constant**, mais dont l'**orientation change perpétuellement** pour former une **trajectoire circulaire**. Analysons l'évolution de l'orientation de la vitesse d'un objet effectuant un MCU :



Puisque le module de la vitesse  $v$  ne change pas, mais qu'il y a réorientation perpétuelle de la vitesse, alors il y a une accélération  $a$ . On remarque que le **module de l'accélération** est **constant**, mais qu'elle est **toujours orientée** vers le **centre de la trajectoire circulaire** :

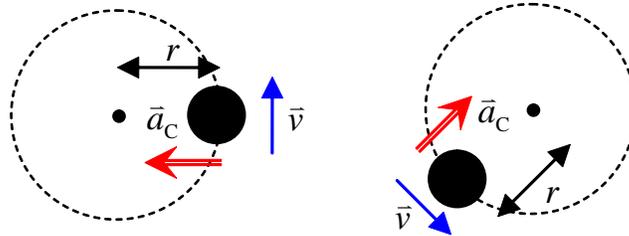


Conclusion : Un MCU nécessite une accélération  $a$  pointant toujours vers le centre de la trajectoire circulaire.

## Accélération centripète

L'**accélération centripète**  $a_c$  est le nom que porte l'**accélération** permettant à un objet d'effectuer une **trajectoire circulaire** de rayon  $r$  à **vitesse constante**  $v$ . Cette accélération de module constant est toujours orientée vers le centre de la trajectoire circulaire :

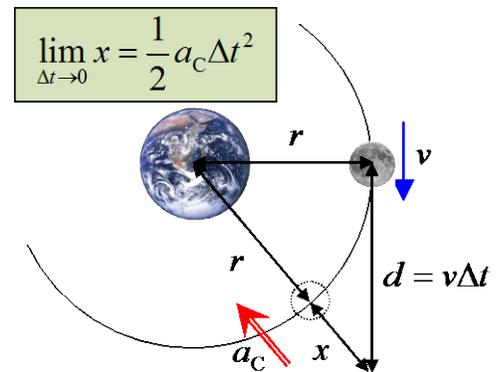
$$a_c = \frac{v^2}{r}$$



- où  $a_c$  : Accélération centripète orientée vers le centre de la trajectoire circulaire (m/s<sup>2</sup>)  
 $v$  : Module de la vitesse de l'objet le long de la trajectoire circulaire ( $v \perp a_c$ ) (m/s)  
 $r$  : Rayon de la trajectoire circulaire (m)

### Preuve :

Approximons un mouvement circulaire comme étant un mouvement à vitesse constante  $v$  suivi d'un mouvement à accélération constante  $a_c$  tel qu'illustré sur ce schéma ci-contre. Appliquons le théorème de Pythagore afin d'évaluer une relation entre nos distances  $r$ ,  $d$  et  $x$  :



$$(r + x)^2 = r^2 + d^2 \quad (\text{Théorème Pythagore})$$

$$\Rightarrow r^2 + 2xr + x^2 = r^2 + d^2 \quad (\text{Développer carré})$$

$$\Rightarrow 2xr + x^2 = d^2 \quad (\text{Simplifier } r^2)$$

$$\Rightarrow x + \frac{x^2}{2r} = \frac{d^2}{2r} \quad (\text{Diviser par } 2r)$$

Remplaçons la distance parcourue à vitesse constante  $d$  par le produit de la vitesse  $v$  et du temps de parcours  $\Delta t$  afin d'évaluer la distance  $x = \frac{1}{2} a_c \Delta t^2$  (un MUA) :

$$x + \frac{x^2}{2r} = \frac{d^2}{2r} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{(v\Delta t)^2}{2r} - \frac{x^2}{2r} \quad (\text{Isoler terme } x \text{ et remplacer } d = v\Delta t)$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} \frac{v^2}{r} \Delta t^2 - \frac{x^2}{2r} \quad (\text{Réécriture})$$

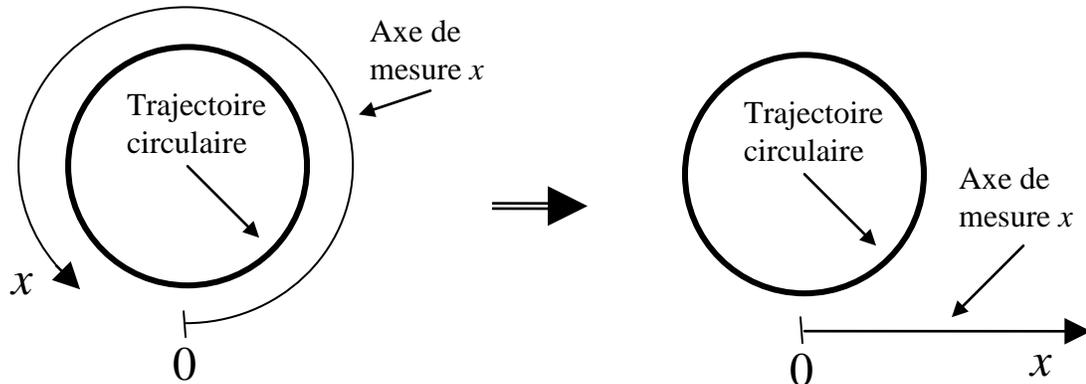
$$\Rightarrow x = \frac{1}{2} a_c \Delta t^2 - \frac{x^2}{2r} \quad (\text{Remplacer } a_c = \frac{v^2}{r})$$

Pour que le mouvement approximé converge vers le mouvement circulaire exact, il faut que le temps de parcours  $\Delta t$  tende vers zéro. Dans ce cas, le déplacement de correction  $x$  à accélération constante sera petit et le terme  $x^2/2r$  sera négligeable :

$$x = \frac{1}{2} a_c \Delta t^2 - \frac{x^2}{2r} \quad \Rightarrow \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} x = \frac{1}{2} a_c \Delta t^2 \quad \text{où} \quad a_c = \frac{v^2}{r} \quad \blacksquare$$

## Une trajectoire rectiligne en forme de cercle

Lorsqu'on étudie le déplacement d'un objet le long d'une **trajectoire courbée**, on peut mesurer le déplacement à l'aide d'un **axe  $x$  rectiligne** épousant la forme de la trajectoire. Si le mouvement le long de la trajectoire courbée est **uniformément accéléré**, alors nous pouvons alors utiliser les **équations du MUA**.

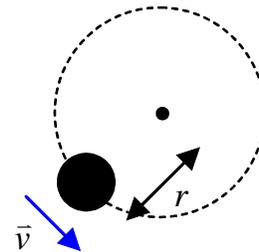


## La période d'un MCU

La **période** d'un MCU est le **temps** requis pour **effectuer un tour complet** de la **trajectoire circulaire** à **vitesse constante**. La période dépend du rayon  $r$  de la trajectoire circulaire et de la vitesse constante  $v$  le long de la trajectoire :

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

où  $T$  : La période du MCU (s)  
 $r$  : Rayon du MCU (m)  
 $v$  : Vitesse du MCU (m/s)



### Preuve :

Puisque le mouvement le long d'un MCU peut être analysé comme étant un mouvement à une dimension, utilisons les équations du MUA pour analyser le temps requis pour effectuer un tour complet de la trajectoire circulaire à vitesse constante :

$$\begin{aligned}
 x &= x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \Rightarrow x = x_0 + v_{x0}t && \text{(Acc. le long de la trajectoire nulle, } a_x = 0 \text{)} \\
 &\Rightarrow x - x_0 = v_{x0}t && \text{(Isoler } x - x_0 \text{)} \\
 &\Rightarrow (2\pi r) = v_{x0}t && \text{(Trajectoire circulaire : } x - x_0 = 2\pi r \text{)} \\
 &\Rightarrow t = \frac{2\pi r}{v_{x0}} && \text{(Isoler } t \text{)} \\
 &\Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} \quad \blacksquare && \text{(Remplacer } t = T \text{ et } v_{x0} = v_x \text{)}
 \end{aligned}$$

## La fréquence

De façon générale, la **fréquence** est le **nombre de cycles complets** (tours complets pour le MCU) effectués **en une seconde**. Puisque la période mesure le temps pour effectuer un cycle complet (secondes/cycle), la fréquence sera l'inverse de la période (cycles/seconde) :

$$f = \frac{1}{T}$$

où  $f$  : La fréquence ( $s^{-1}$  ou Hz)

$T$  : La période (s)

**Situation 1 : En orbite autour de Mars.** La sonde *Mars Reconnaissance Orbiter* est en orbite circulaire autour de la planète Mars à 280 km d'altitude. Le Rayon de Mars est égal à 3400 km. La sonde prend 113 minutes pour parcourir une orbite complète. On désire déterminer **(a)** le module de l'accélération centripète et **(b)** la fréquence.

Évaluons la période du MCU effectué par la sonde en seconde : (1 min = 60 s)

$$T = 113 \text{ min} \quad \Rightarrow \quad T = 113 \text{ min} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 6780 \text{ s}}$$

Évaluons le rayon de la trajectoire circulaire :

$$\begin{aligned} r = R_{\text{mars}} + h_{\text{altitude}} &\Rightarrow r = (3400 \times 10^3) + (280 \times 10^3) && \text{(Remplacer valeurs numériques)} \\ &\Rightarrow \boxed{r = 3,68 \times 10^6 \text{ m}} && \text{(Évaluer } r) \end{aligned}$$

Évaluons la vitesse de la sonde à partir de la période  $T$  et du rayon  $r$  :

$$\begin{aligned} T = \frac{2\pi r}{v} &\Rightarrow v = \frac{2\pi r}{T} && \text{(Isoler } v) \\ &\Rightarrow v = \frac{2\pi(3,68 \times 10^6)}{(6780)} && \text{(Remplacer valeurs numériques)} \\ &\Rightarrow \boxed{v = 3410 \text{ m/s}} && \text{(Évaluer } v) \end{aligned}$$

Évaluons l'accélération centripète du MCU :

$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad a_c = \frac{(3410)^2}{(3,68 \times 10^6)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_c = 3,16 \text{ m/s}^2} \quad \text{(a)}$$

Nous pouvons évaluer la fréquence  $f$  à partir de la période  $T$  :

$$f = \frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{1}{(6780)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f = 1,475 \times 10^{-4} \text{ Hz}} \quad \text{(b)}$$









# Chapitre 1.12b – L'accélération centripète et tangentielle

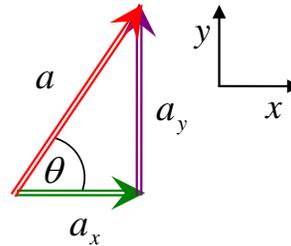
## L'accélération centripète et tangentielle

Une accélération peut toujours être décomposée en deux orientations perpendiculaires :

Décomposition en x et y :

$$a_x = a \cos(\theta)$$

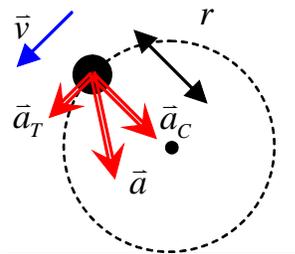
$$a_y = a \sin(\theta)$$



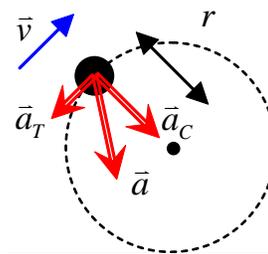
Module de l'accélération :

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

Cependant, lorsqu'on sait que l'accélération produit une **trajectoire circulaire**, on peut décomposer l'accélération en **accélération centripète** ( $\vec{a}_C$ ) et en **accélération tangentielle** ( $\vec{a}_T$ ) :



Vitesse sur la trajectoire circulaire **augmente**



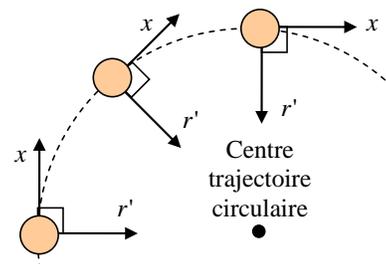
Vitesse sur la trajectoire circulaire **diminue**

Il faut remarquer que :

- Accélération centripète  $a_C = v^2 / r$  permet d'obtenir la trajectoire circulaire.
- Accélération tangentielle permet de modifier le module de la vitesse  $v$  sur la trajectoire circulaire.
- Le module de l'accélération totale  $a$  est :  $a = \sqrt{a_T^2 + a_C^2}$

## Système d'axe d'une translation sur une trajectoire circulaire

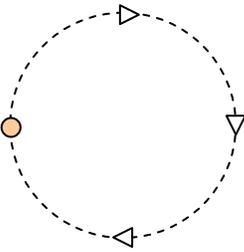
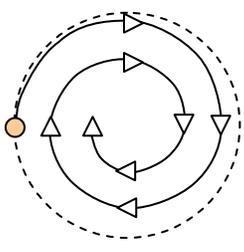
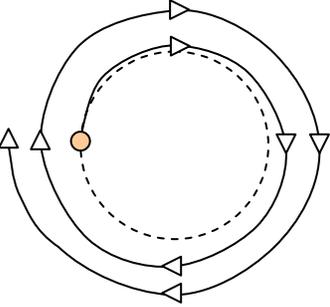
Lorsqu'un objet se déplace le long d'une trajectoire circulaire, il est préférable de décomposer le mouvement selon un axe radial  $r'$  et selon un axe tangential  $x$  qui se déplace avec l'objet tel qu'illustré sur le schéma ci-contre.



## Type de trajectoire avec accélération radiale

Lorsque l'accélération radiale<sup>1</sup>  $a_{r'}$  est égale à l'accélération centripète  $a_C$ , l'objet effectue une trajectoire circulaire parfaite. Cependant, si l'accélération radiale  $a_{r'}$  n'est pas égale à l'accélération centripète  $a_C$ , la trajectoire circulaire subira une variation de rayon  $r$ .

Voici les trois types de trajectoire circulaire que l'on peut observer lorsqu'il y a une accélération radiale  $a_{r'}$  : (on suppose que la vitesse tangentielle est constante)

Trajectoire circulaire parfaite	Trajectoire circulaire fermée	Trajectoire circulaire ouverte
$a_{r'} = a_C = v^2 / r$	$a_{r'} > a_C$	$a_{r'} < a_C$
		

Lorsqu'il y a une accélération tangentielle  $a_x$ , le module de la vitesse le long de la trajectoire circulaire ne sera pas constante. Si un objet veut préserver sa trajectoire circulaire à rayon constant, l'accélération radiale  $a_{r'}$  doit perpétuellement changer de valeur pour s'adapter aux nouvelles valeurs de l'accélération centripète  $a_C$  étant égale à  $v^2 / r$ .

**Situation A : Dérapage ou pas?** Une voiture prend un virage sur une portion de route circulaire d'un rayon de 100 m à une vitesse de 20 m/s (72 km/h). Sachant que le frottement de la route sur les pneus peut produire sur la voiture au maximum une accélération radiale  $a_{r', \max} = 3,6 \text{ m/s}^2$ , on désire déterminer si la voiture effectue un dérapage dans le virage.

Pour demeurer sur la trajectoire circulaire, la voiture doit subir une accélération centripète égale à l'expression suivante :

$$a_C = v^2 / r \quad \Rightarrow \quad a_C = (20)^2 / (100) \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_C = 4 \text{ m/s}^2}$$

Puisque le frottement peut s'adapter jusqu'à produire une accélération maximale radiale  $a_{r', \max} = 3,6 \text{ m/s}^2$  et que l'accélération centripète requise pour demeurer sur la route est égale à  $a_C = 4 \text{ m/s}^2$ , la voiture va nécessairement dérapier vers l'extérieur du virage :

$$\text{dérapage car} \quad a_{r', \max} < a_C \quad \text{et} \quad 3,6 \text{ m/s}^2 < 4 \text{ m/s}^2$$

<sup>1</sup> Il est important de noter que  $a_{r'} \neq d^2r'/dt^2$ , car cette représentation est dans un plan polaire et non cartésien. Cette subtilité sera discutée dans le chapitre 1.12c.

**Situation 2 : Rien ne va plus!** On lance une bille sur une piste circulaire horizontale de 50 cm de rayon. La vitesse initiale de la bille vaut 3 m/s. En raison du frottement entre la piste et la bille, cette dernière s'immobilise au bout de 1,5 tours. On désire déterminer le module de l'accélération de la bille au moment où sa vitesse est égale à 0,9 m/s. (On suppose que la bille freine uniformément.)

Évaluons la circonférence de la piste circulaire :

$$C = 2\pi r \quad \Rightarrow \quad C = 2\pi(0,5) \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = 3,14 \text{ m}}$$

Voici nos données de base lors du freinage :

$$\begin{array}{lll} x_0 = 0 & v_{x0} = 3 \text{ m/s} & a_x = ? \\ x = n_{\text{tours}} C = (1,5)(3,14) = 4,71 \text{ m} & v_x = 0 & t = ? \end{array}$$

Utilisons une équation du MUA pour évaluer l'accélération tangentielle :

$$\begin{aligned} v_x^2 &= v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0) & \Rightarrow & \quad (0)^2 = (3)^2 + 2a_x((4,71) - (0)) & \text{(Remplacer val. num.)} \\ & & \Rightarrow & \quad 0 = 9 + 9,42a_x & \text{(Simplifier)} \\ & & \Rightarrow & \quad 9,42a_x = -9 & \text{(Isoler terme } a_x) \\ & & \Rightarrow & \quad \boxed{a_x = -0,955 \text{ m/s}^2} & \text{(Isoler } a_x) \end{aligned}$$

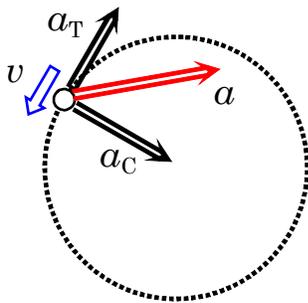
Nous avons notre accélération tangentielle :  $\boxed{a_T = 0,955 \text{ m/s}^2}$

On peut remarque que le **module de l'accélération centripète**  $a_c$  **ne sera pas constante**, car le **freinage diminue la vitesse**  $v$ . Lorsque nous avons une vitesse de 0,9 m/s et un rayon de 50 cm, nous avons l'accélération centripète suivante :

$$a_c = \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad a_c = \frac{(0,9)^2}{(0,5)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_c = 1,62 \text{ m/s}^2}$$

Puisque :  $\vec{a}_c \perp \vec{a}_T$

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_T^2} \quad \text{(Module de l'accélération)}$$



$$\Rightarrow \quad a = \sqrt{(1,62)^2 + (0,955)^2} \quad \text{(Remplacer val. num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a = 1,88 \text{ m/s}^2} \quad \text{(Simplifier)}$$









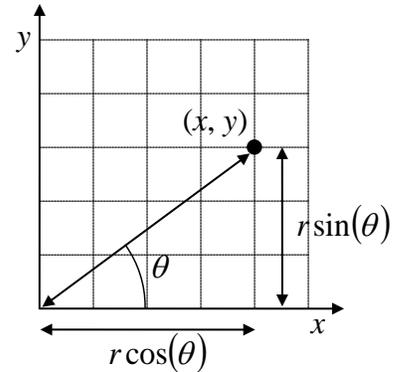


# Chapitre 1.12c – L'accélération en coordonnées polaires

## Les coordonnées polaires

Les coordonnées polaires est un système d'axe permettant d'évaluer la distance  $r$  par rapport à une origine (point de référence) et une orientation  $\theta$  sur  $360^\circ$  ( $2\pi$  radians) dans un plan autour de l'origine. La correspondance entre une coordonnée cartésienne  $xy$  et une coordonnée polaire  $r\theta$  s'effectue par le calcul suivant :

$$x = r \cos(\theta) \quad \text{et} \quad y = r \sin(\theta)$$



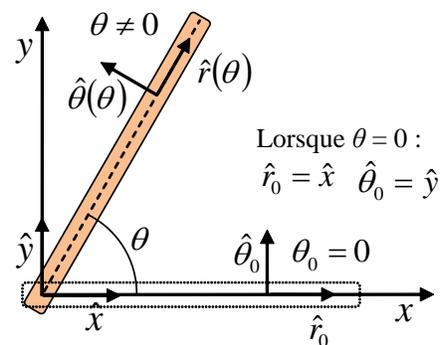
- où
- $x$  : Coordonnée cartésienne selon l'axe  $x$  ( $x \in [-\infty, \infty]$ ).
  - $y$  : Coordonnée cartésienne selon l'axe  $y$  ( $y \in [-\infty, \infty]$ ).
  - $r$  : Coordonnée polaire selon l'axe  $r$  ( $r \in [0, \infty]$ ).
  - $\theta$  : Coordonnée polaire selon l'axe  $\theta$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$ ).

## Les vecteurs unitaires en coordonnée polaire

En coordonnée cartésienne, les vecteurs unitaire  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$  qui représente les orientations des axes  $xy$  sont constants (ne dépendent pas de la coordonnée). Cependant, ce n'est pas le cas pour les vecteur unitaires  $\hat{r}$  et  $\hat{\theta}$ , car l'orientation  $\hat{r}$  de l'éloignement et de la rotation  $\hat{\theta}$  dépendent de la position angulaire  $\theta$  :

$$\hat{r} = \cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y}$$

et 
$$\hat{\theta} = -\sin(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{y}$$

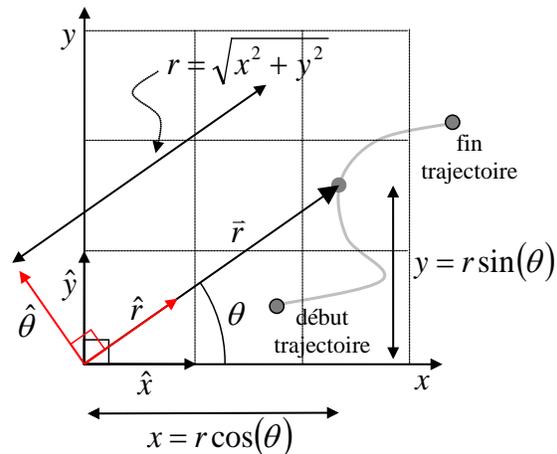


- où
- $\hat{r}$  : Vecteur unitaire de l'axe  $r$  qui dépend de la coordonnée  $\theta$ .
  - $\hat{\theta}$  : Vecteur unitaire de l'axe  $\theta$  qui dépend de la coordonnée  $\theta$ .
  - $\theta$  : Coordonnée polaire selon l'axe  $\theta$  ( $\theta \in [0, 2\pi]$ ).
  - $\hat{x}$  : Vecteur unitaire en coordonnée cartésienne de l'axe  $x$ .
  - $\hat{y}$  : Vecteur unitaire en coordonnée cartésienne de l'axe  $y$ .

## Le vecteur position en coordonnée polaire

Le vecteur position  $\vec{r}$  en coordonnée polaire est très simple à écrire, car il nécessite uniquement la distance  $r$  entre l'origine et la position représentée par  $\vec{r}$  et l'orientation  $\hat{r}$  qui elle comprend déjà l'information de la position angulaire  $\theta$ .

On peut faire la correspondance entre un vecteur position  $\vec{r}$  exprimé en coordonnée cartésienne  $xy$  et en coordonnée polaire  $r\theta$  par les calculs suivants :



En coordonnée cartésienne	En coordonnée polaire
$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y}$ <p>tel que <math>x = r \cos(\theta)</math> et <math>y = r \sin(\theta)</math></p>	$\vec{r} = r \hat{r}$

Il est à noter qu'il est raisonnable d'utiliser la notation «  $\vec{r}$  » pour désigner le concept de vecteur position, car cette écriture respecte la convention d'écriture «  $\vec{A} = A \hat{A}$  » tout en représentant le concept de position par rapport à l'origine d'un système d'axe.

## La différence entre l'accélération en coordonnée cartésienne et en coordonnée polaire

En coordonnée cartésienne, les vecteurs unitaires  $\hat{x}$  et  $\hat{y}$  sont constant dans l'espace et le temps, car ils ne dépendent pas de la coordonnée  $xy$  d'un point. Ainsi, l'expression du vecteur accélération  $\vec{a}$  prend une forme très simple :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{d}{dt} (x \hat{x} + y \hat{y}) \right) = \frac{d^2x}{dt^2} \hat{x} + \frac{d^2y}{dt^2} \hat{y} \quad \text{car} \quad \frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{d\hat{y}}{dt} = 0$$

En coordonnée polaire, les vecteurs unitaire  $\hat{r}$  et  $\hat{\theta}$  ne sont constant dans l'espace et le temps, car ils dépendent de la position angulaire  $\theta$ . Ainsi, l'expression du vecteur accélération  $\vec{a}$  prend une forme plus complexe en raison de l'application de la **règle de la dérivée en chaîne**<sup>1</sup> lors de l'application de l'**opérateur de dérivée total**  $d/dt$  sur le vecteur vitesse  $\vec{v}$  :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta}) \neq \frac{d^2r}{dt^2} \hat{r} + \frac{d^2\theta}{dt^2} \hat{\theta} \quad \text{car} \quad \frac{d\hat{r}}{dt} \neq \frac{d\hat{\theta}}{dt} \neq 0$$

<sup>1</sup> La dérivée en chaîne :  $\frac{d(f(x) \cdot g(x))}{dx} = g(x) \frac{df(x)}{dx} + f(x) \frac{dg(x)}{dx}$

## Variation des vecteurs unitaires en coordonnée polaire

La variation des vecteurs unitaires  $\hat{r}$  et  $\hat{\theta}$  en coordonnée polaire n'est pas nulle dans l'espace selon la coordonnée  $\theta$  ni dans le temps  $t$ .

Vecteur unitaire radial $\hat{r}$		Vecteur unitaire angulaire $\hat{\theta}$	
$\frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta}$	$\frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta}$	$\frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r}$	$\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt} \hat{r}$

Preuve :

À partir des représentations de  $\hat{r}$  et  $\hat{\theta}$  en coordonnée cartésienne, évaluons la variation de ces vecteurs unitaires par rapport à position angulaire  $\theta$  et au temps  $t$  :

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{r}}{d\theta} &= \frac{d(\cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y})}{d\theta} \Rightarrow \frac{d\hat{r}}{d\theta} = -\sin(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{y} \\ &\Rightarrow \frac{d\hat{r}}{d\theta} = \hat{\theta} \quad \blacksquare \quad (\text{Remplacer } \hat{\theta} = -\sin(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{y}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} &= \frac{d(-\sin(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{y})}{d\theta} \Rightarrow \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\cos(\theta)\hat{x} - \sin(\theta)\hat{y} \\ &\Rightarrow \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -(\cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y}) \\ &\Rightarrow \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{r} \quad \blacksquare \quad (\text{Remplacer } \hat{r} = \cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{r}}{dt} &= \frac{d(\cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y})}{dt} \Rightarrow \frac{d\hat{r}}{dt} = -\sin(\theta)\frac{d\theta}{dt}\hat{x} + \cos(\theta)\frac{d\theta}{dt}\hat{y} \\ &\Rightarrow \frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(-\sin(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{y}) \\ &\Rightarrow \frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} \quad \blacksquare \quad (\text{Remplacer } \hat{\theta} = -\sin(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{y}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\theta}}{dt} &= \frac{d(-\sin(\theta)\hat{x} + \cos(\theta)\hat{y})}{dt} \Rightarrow \frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\cos(\theta)\frac{d\theta}{dt}\hat{x} - \sin(\theta)\frac{d\theta}{dt}\hat{y} \\ &\Rightarrow \frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}(\cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y}) \\ &\Rightarrow \frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{r} \quad \blacksquare \quad (\text{Remplacer } \hat{r} = \cos(\theta)\hat{x} + \sin(\theta)\hat{y}) \end{aligned}$$

## La vitesse en coordonnée polaire

En coordonnée polaire, le vecteur vitesse  $\vec{v}$  obtenu par une dérivée total du vecteur position  $\vec{r}$  par rapport au temps  $t$  prend la forme suivante :

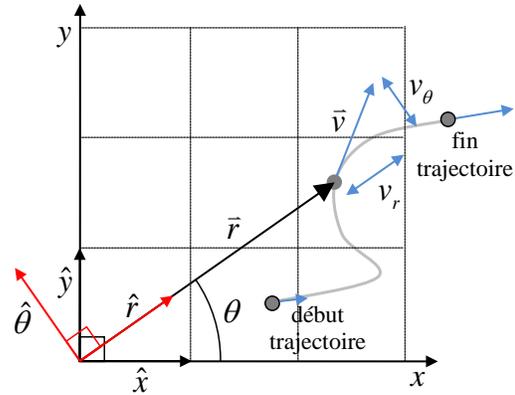
$$\vec{v} = v_r \hat{r} + v_\theta \hat{\theta} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta}$$

où  $\vec{v}$  : Vecteur vitesse d'un objet (m/s)

$v_r$  : Vitesse radiale selon l'axe  $r$   
ou  
vitesse d'éloignement/rapprochement de l'origine (m/s)

$v_\theta$  : Vitesse tangentielle selon l'axe  $\theta$   
ou  
vitesse de déplacement sur un arc de cercle (m/s)

$\dot{\theta}$  : Vitesse angulaire<sup>2</sup> (rad/s)



Nous pouvons exprimer la vitesse radiale  $v_r$  et la vitesse tangentielle  $v_\theta$  avec deux notations :

Vitesse radiale	Vitesse tangentielle
$v_r = \dot{r} = \frac{dr}{dt}$	$v_\theta = r\dot{\theta} = r \frac{d\theta}{dt}$

### Preuve :

À partir de la définition de la vitesse, évaluons la représentation d'un vecteur vitesse en coordonnée polaire à partir de l'expression de  $\hat{r}$  en coordonnée cartésienne :

$$\begin{aligned} \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} &\Rightarrow \vec{v} = \frac{d(r\hat{r})}{dt} && \text{(Remplacer } \vec{r} = r\hat{r} \text{)} \\ &\Rightarrow \vec{v} = \hat{r} \frac{dr}{dt} + r \frac{d\hat{r}}{dt} && \left( \frac{d}{dx} uv = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} \right) \\ &\Rightarrow \vec{v} = \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \left( \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} \right) && \text{(Remplacer } \frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \hat{\theta} \text{)} \\ &\Rightarrow \vec{v} = \dot{r} \hat{r} + r \dot{\theta} \hat{\theta} && \text{(Notation : } \dot{r} = \frac{dr}{dt} \text{ et } \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \text{)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

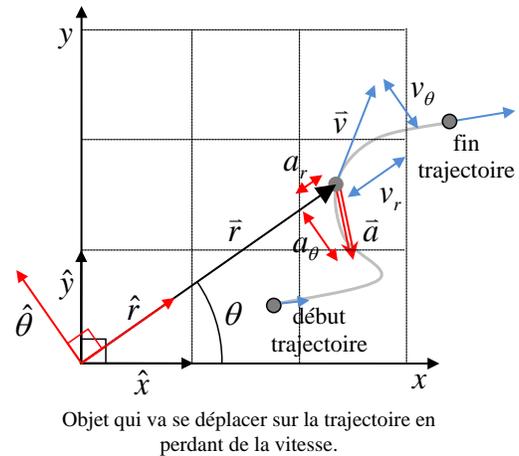
<sup>2</sup> On utilise également la notation  $\omega = \dot{\theta}$  pour désigner la vitesse angulaire.

## L'accélération en coordonnée polaire

En coordonnée polaire, le vecteur accélération  $\vec{a}$  obtenu par une dérivée total du vecteur vitesse  $\vec{v}$  par rapport au temps  $t$  prend la forme suivante :

$$\begin{aligned}\vec{a} &= a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{\theta}\end{aligned}$$

où  $\vec{a}$  : Vecteur accélération d'un objet (m/s<sup>2</sup>)  
 $a_r$  : Accélération radiale selon l'axe  $r$  (m/s<sup>2</sup>)  
 $a_\theta$  : Accélération tangentielle selon l'axe  $\theta$  (m/s<sup>2</sup>)  
 $\ddot{\theta}$  : Accélération angulaire<sup>3</sup> (rad/s<sup>2</sup>)



Nous pouvons exprimer l'accélération radiale  $a_r$  et l'accélération tangentielle  $a_\theta$  avec deux notations :

Accélération radiale	Accélération tangentielle
$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$	$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\left(\frac{dr}{dt}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right)$

Preuve :

À partir de la définition de l'accélération, évaluons la représentation d'un vecteur accélération en coordonnée polaire :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (\text{Définition de l'accélération})$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta})}{dt} \quad (\text{Remplacer } \vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta})$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \frac{d(\dot{r}\hat{r})}{dt} + \frac{d(r\dot{\theta}\hat{\theta})}{dt} \quad (\text{Distribuer la dérivée})$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \hat{r}\frac{d\dot{r}}{dt} + \dot{r}\frac{d\hat{r}}{dt} + \hat{\theta}\frac{d(r\dot{\theta})}{dt} + r\dot{\theta}\frac{d\hat{\theta}}{dt} \quad \left(\frac{d}{dx}uv = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}\right)$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \hat{r}\frac{d\dot{r}}{dt} + \dot{r}\left(\frac{d\theta}{dt}\hat{\theta}\right) + \hat{\theta}\frac{d(r\dot{\theta})}{dt} + r\dot{\theta}\left(-\frac{d\theta}{dt}\hat{r}\right) \quad (\text{Remplacer } \frac{d\hat{r}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\hat{\theta} \text{ et } \frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\hat{r})$$

$$\Rightarrow \vec{a} = \hat{r}\ddot{r} + \dot{r}\left(\dot{\theta}\hat{\theta}\right) + \hat{\theta}\frac{d(r\dot{\theta})}{dt} + r\dot{\theta}\left(-\dot{\theta}\hat{r}\right) \quad (\text{Notation : } \dot{r} = \frac{dr}{dt} \text{ et } \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt})$$

Effectuons une réécriture de notre expression et appliquons la règle de dérivée en chaîne afin de compléter le calcul

$$\vec{a} = \hat{r}\ddot{r} + \dot{r}\left(\dot{\theta}\hat{\theta}\right) + \hat{\theta}\frac{d(r\dot{\theta})}{dt} + r\dot{\theta}\left(-\dot{\theta}\hat{r}\right) \quad (\text{Équation précédente})$$

<sup>3</sup> On utilise également la notation  $\alpha = \ddot{\theta}$  pour désigner l'accélération angulaire.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \bar{a} &= \ddot{r} \hat{r} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\theta} + \frac{d(r\dot{\theta})}{dt} \hat{\theta} - r\dot{\theta}^2 \hat{r} && \text{(Réécriture)} \\ \Rightarrow \bar{a} &= \ddot{r} \hat{r} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\theta} - r\dot{\theta}^2 \hat{r} + \left( \dot{\theta} \frac{dr}{dt} + r \frac{d\dot{\theta}}{dt} \right) \hat{\theta} && \left( \frac{d}{dx} uv = v \frac{du}{dx} + u \frac{dv}{dx} \right) \\ \Rightarrow \bar{a} &= \ddot{r} \hat{r} + \dot{r} \dot{\theta} \hat{\theta} - r\dot{\theta}^2 \hat{r} + (\dot{r} \dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \hat{\theta} && \text{(Notation : } \dot{r} = \frac{dr}{dt} \text{ et } \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \text{)} \\ \Rightarrow \bar{a} &= \ddot{r} \hat{r} + 2\dot{r} \dot{\theta} \hat{\theta} - r\dot{\theta}^2 \hat{r} + r\ddot{\theta} \hat{\theta} && \text{(Regrouper } \dot{r} \dot{\theta} \hat{\theta} \text{)} \\ \Rightarrow \bar{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta}) \hat{\theta} \quad \blacksquare && \text{(Regrouper } \hat{r} \text{ et } \hat{\theta} \text{)} \end{aligned}$$

## Trajectoire circulaire à vitesse constante en coordonnée polaire autour de l'origine

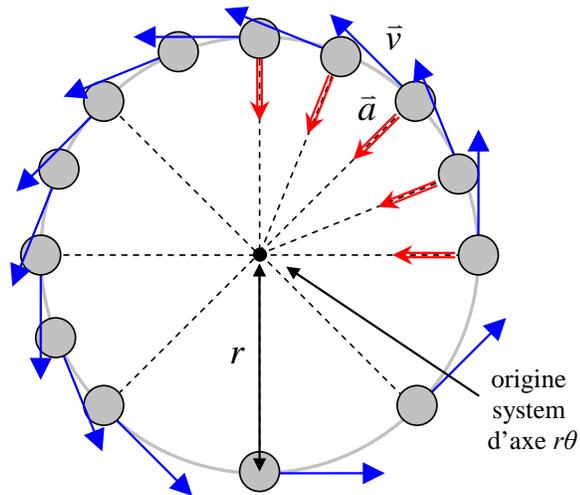
En coordonnée polaire, une trajectoire circulaire en deux dimensions autour de l'origine ( $|\vec{r}| = \text{cst}$ ) dont le module de la vitesse est constant s'exprime grâce aux conditions

$$\dot{r} = 0, \ddot{r} = 0 \text{ et } \dot{\theta} = \text{cst}, \ddot{\theta} = 0$$

ce qui nous donne

$$\bar{a} = -r\dot{\theta}^2 \hat{r} \text{ et } \vec{v} = r\dot{\theta} \hat{\theta} .$$

Ainsi, la coordonnée polaire est adéquatement adaptée à résoudre mathématiquement cette trajectoire, car les modules de l'accélération et de la vitesse sont constants.



Objet en mouvement circulaire à vitesse constante autour d'une origine.

## Trajectoire rectiligne à vitesse constante en coordonnée polaire

En coordonnée cartésienne, une trajectoire rectiligne en deux dimensions s'exprime grâce aux conditions

$$\dot{x} = cst, \quad \ddot{x} = 0 \quad \text{et} \quad \dot{y} = cst, \quad \ddot{y} = 0$$

ce qui permet d'obtenir

$$\vec{a} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{v} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} .$$

En coordonnée polaire, une trajectoire rectiligne en deux dimensions s'exprime grâce aux conditions

$$\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 \quad \text{et} \quad r\ddot{\theta} = -2\dot{r}\dot{\theta}$$

car

$$\vec{a} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{\theta}$$

et nous voulons

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 \quad \text{et} \quad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0$$

ce qui permet d'obtenir

$$\dot{r} = \text{non constant} \quad \text{et} \quad \dot{\theta} = \text{non constant} .$$

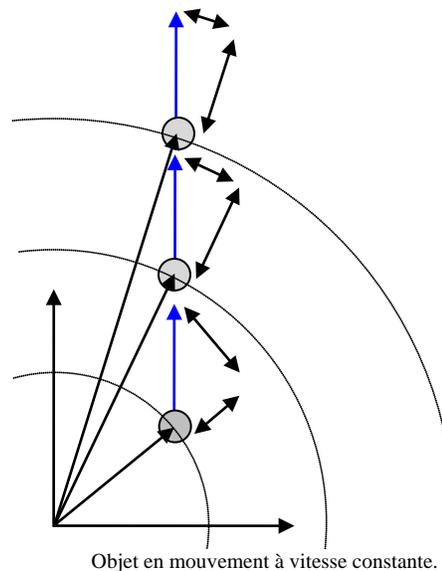
Ainsi, la coordonnée polaire n'est pas bien adaptée à résoudre mathématiquement cette trajectoire car

si

$$r \uparrow \quad \text{et} \quad \theta \uparrow ,$$

alors

$$\dot{r} \uparrow \quad \text{et} \quad \dot{\theta} \downarrow .$$



## L'accélération centripète et l'accélération de Coriolis

Dans l'expression de l'accélération en coordonnée polaire, nous retrouvons deux expressions ayant un effet sur l'évolution dans le temps des coordonnées  $r\theta$  :

$$\vec{a} = a_r \hat{r} + a_\theta \hat{\theta} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{\theta}$$

Accélération centripète	Accélération de Coriolis
$a_c = r\dot{\theta}^2 = \frac{v_\theta^2}{r}$ <p>où <math>v_\theta = r\dot{\theta}</math></p>	$a_{\text{Cor}} = 2\dot{r}\dot{\theta}$

Pour évaluer l'évolution des coordonnées  $r\theta$ , **nous devons déterminer**  $\ddot{r}$  et  $\ddot{\theta}$  et non simplement  $a_r$  et  $a_\theta$ , car  $a_r \neq \ddot{r}$  et  $a_\theta \neq \ddot{\theta}$  ce qui nous donne

$$\ddot{r} = a_r + r\dot{\theta}^2 \quad \text{et} \quad \ddot{\theta} = \frac{a_\theta - 2\dot{r}\dot{\theta}}{r}$$

Accélération centripète :  $a_c = r\dot{\theta}^2$

Cette accélération est un effet de la vitesse tangentielle sur le déplacement radial d'un objet. Pour obtenir une trajectoire circulaire à rayon constant ( $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ ), l'accélération radiale  $a_r$  se doit d'être égale au module de l'accélération centripète  $a_c$  et être orientée vers le centre du cercle (l'interprétation du signe négatif) :

$$\begin{aligned} a_r = -a_c = -r\dot{\theta}^2 &\Rightarrow \ddot{r} = 0 \\ &\Rightarrow \text{trajectoire à rayon } r = \text{cst si } \dot{r} = 0 \end{aligned}$$

Accélération de Coriolis :  $a_{\text{Cor}} = 2\dot{r}\dot{\theta}$

Cette accélération est un effet observable uniquement si le mouvement s'effectue sur un cercle dont le rayon  $r$  change dans le temps ( $\dot{r} \neq 0$ ). Sur Terre, la rotation de celle-ci permet d'obtenir un terme  $\dot{\theta} \neq 0$ . Lorsqu'un objet est en orbite à rayon  $r = \text{cst}$ , il n'y a pas d'effet de Coriolis. Cependant, lorsqu'un objet chute sous l'effet de la gravité, le rapprochement de celui-ci vers le centre de la Terre implique  $\dot{r} \neq 0$  et  $\ddot{r} = -g + r\dot{\theta}^2$  ce qui donne une valeur à  $\ddot{\theta} \neq 0$  même s'il n'y a pas d'accélération  $a_\theta$ . Un objet tombe ainsi légèrement à côté de son point de chute prévu même si celui-ci tourne à vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  avec la Terre, car la valeur de  $\ddot{\theta} \neq 0$  décale le nouveau point de chute par rapport à l'ancien point de chute.

# Chapitre 1.13 – La dérivée en cinématique

## La dérivée

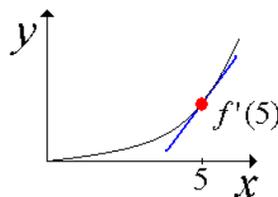
En mathématique, on définit la dérivée d'une fonction  $f(x)$  tel que

$$f'(x) = \frac{d f(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

où  $f'(x)$  correspond à la fonction qui évalue la pente de la tangente en tout point de la fonction  $f(x)$ .

### Exemple graphique :

La **pente bleu** au **point rouge**  $x = 5$  est évaluée à l'aide de la dérivée de la fonction  $f(x)$  et est égale à  $f'(5)$ .



### Exemple numérique :

Soit  $f(4) = 7$  et  $f'(4) = 2$

À la coordonnée  $x = 4$ , la valeur associée est 7 et la pente à cette coordonnée est 2.

## La vitesse et l'accélération à l'aide de la dérivée

Nous avons donné la définition suivante à la vitesse et l'accélération :

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad \text{et} \quad a_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Grâce au calcul différentiel, on peut maintenant utiliser la définition de la dérivée et donner les définitions suivantes à la position, la vitesse et à l'accélération :

<u>La position :</u>	$x(t)$	unité : $[x(t)] = \text{m}$
<u>La vitesse :</u>	$v_x(t) = \frac{d x(t)}{dt}$	unité : $[v_x(t)] = \text{m/s}$
<u>L'accélération :</u>	$a_x(t) = \frac{d v_x(t)}{dt} = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$	unité : $[a_x(t)] = \text{m/s}^2$

**N.B.** Les fonctions de la vitesse et de l'accélération peuvent être évaluées efficacement si l'on **connaît** la fonction de la **position** en fonction du temps, car elles peuvent être obtenues à partir de l'opération de la dérivée.

**Situation A : Une planche à roulettes sur un plan incliné : calcul avec dérivée.** À partir de l'équation de la position  $x(t) = -0,25t^2 + t + 1,75$  associée au mouvement de la planche à roulettes de la situation 3 du chapitre 1.3, on désire évaluer (a) l'équation de la vitesse  $v_x(t)$  et (b) l'équation de l'accélération  $a_x(t)$ .

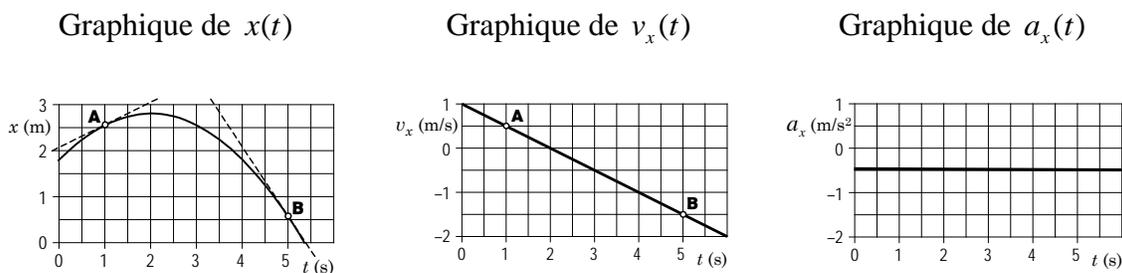
(a) On peut appliquer la dérivée par rapport au temps à la fonction  $x(t)$  et obtenir  $v_x(t)$  :

$$\begin{aligned}
 v_x(t) &= \frac{dx(t)}{dt} &\Rightarrow v_x(t) &= \frac{d(-0,25t^2 + t + 1,75)}{dt} && \text{(Remplacer } x(t) \text{)} \\
 & &\Rightarrow v_x(t) &= \frac{d}{dt}(-0,25t^2) + \frac{d}{dt}(t) + \frac{d}{dt}(1,75) && \text{(Distributivité de la dérivée)} \\
 & &\Rightarrow v_x(t) &= -0,25 \frac{d}{dt}(t^2) + \frac{d}{dt}(t) + 1,75 \frac{d}{dt}(1) && \text{(Factorisation des constantes)} \\
 & &\Rightarrow v_x(t) &= -0,25(2t) + (1) + 1,75(0) && \text{(Évaluer les dérivées)} \\
 & &\Rightarrow &\boxed{v_x(t) = -0,5t + 1} && \text{(Simplifier)}
 \end{aligned}$$

(b) On peut appliquer la dérivée par rapport au temps à la fonction  $v_x(t)$  et obtenir  $a_x(t)$  :

$$\begin{aligned}
 a_x(t) &= \frac{dv_x(t)}{dt} &\Rightarrow a_x(t) &= \frac{d(-0,5t + 1)}{dt} && \text{(Remplacer } x(t) \text{)} \\
 & &\Rightarrow a_x(t) &= \frac{d}{dt}(-0,5t) + \frac{d}{dt}(1) && \text{(Distributivité de la dérivée)} \\
 & &\Rightarrow a_x(t) &= -0,5 \frac{d}{dt}(t) + \frac{d}{dt}(1) && \text{(Factorisation des constantes)} \\
 & &\Rightarrow a_x(t) &= -0,5(1) + (0) && \text{(Évaluer les dérivées)} \\
 & &\Rightarrow &\boxed{a_x(t) = -0,5} && \text{(Simplifier)}
 \end{aligned}$$

Voici la représentation graphique de nos trois équations du mouvement :



## Maximisation et minimisation

Dans plusieurs problèmes de cinématique, il est intéressant d'évaluer des valeurs extrémaux (maximum et minimum). Pour évaluer un extrémum, il faut connaître l'agent qui fait varier le paramètre que l'on veut maximiser ou minimiser. L'agent qui fait varier la position est la vitesse et l'agent qui fait varier la vitesse est l'accélération. Pour ce qui est de l'accélération, l'agent ne porte pas de nom particulier.

Pour **maximiser** ou **minimiser** un **paramètre** (position, vitesse ou accélération), il faut que leur **agent de variation** soit nul (égal à zéro).

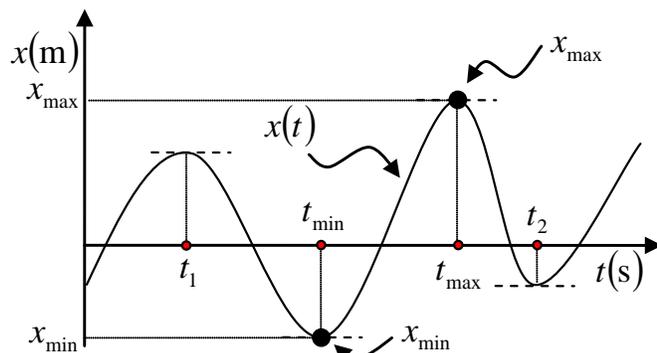
Exemple : Un objet atteint une hauteur maximale lorsque sa vitesse est nulle, car l'objet ne peut pas gagner d'altitude s'il ne possède pas de vitesse vers le haut.

Voici un tableau qui résume les conditions à satisfaire afin de maximiser (max) ou minimiser (min) la position, la vitesse ou l'accélération :

Paramètre à maximiser ou minimiser	Notation	Condition à satisfaire
Position	$x_{\max}$ ou $x_{\min}$	$v_x(t) = \frac{dx}{dt} = 0$
Vitesse	$v_{x\max}$ ou $v_{x\min}$	$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = 0$
Accélération <sup>1</sup>	$a_{x\max}$ ou $a_{x\min}$	$j_x(t) = \frac{da_x}{dt} = 0$

Procédure :

- 1) Évaluer les temps qui permettent de satisfaire la condition de maximisation ou de minimisation.
- 2) Choisir le temps qui correspond à la situation physique à résoudre.
- 3) Évaluer le paramètre à maximiser ou minimiser à l'aide du temps choisi approprié.



• : Temps où  $v_x = dx/dt = 0$

$$v_x = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \{t_1, t_{\min}, t_{\max}, t_2\}$$

$$x_{\min} = x(t = t_{\min})$$

$$x_{\max} = x(t = t_{\max})$$

<sup>1</sup> La dérivée de l'accélération porte le nom de « jerk » avec la notation «  $j$  ». Ce concept est utilisé en ingénierie pour évaluer les variations brutales d'accélération (ex : train, métro).

## Exercices

**Exercice A : La vitesse au 2<sup>e</sup> degré.** La vitesse d'une particule est donnée par l'équation suivante en m/s:  $v(t) = 12t^2 + 2t + 7$

- Évaluez l'équation permettant d'obtenir l'accélération en fonction du temps.
- Quelle est l'accélération à 3 secondes.

**Exercice B : La fusée verticale.** Une fusée avec propulseur se déplace verticalement selon l'équation suivante en mètres par rapport au niveau du sol :

$$y(t) = 0,2t^3 + 0,1t^2 + 5t + 2$$

- À quelle hauteur est lancée initialement la fusée.
- Quelle est la vitesse de la fusée après 3 secondes.
- Quelle est l'accélération de la fusée après 5 secondes.

**Exercice C : La bille s'immobilise.** À quel moment une bille s'immobilise si elle se déplace sur une table inclinée selon l'équation suivante :  $x(t) = -2t^2 + 5t + 3$

**Exercice D : L'ascenseur en accélération verticale.** Un ascenseur s'élève vers le haut selon l'équation suivante en mètres :

$$y(t) = -5t^4 + 8t + 12$$

Évaluez la hauteur maximale atteinte par l'ascenseur.

## Solutions

### Exercice A : *Le vitesse au 2<sup>e</sup> degré.*

$$a) \quad a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = 24t + 2$$

$$b) \quad a(t = 3) = 24(3) + 2 = 74 \text{ m/s}^2$$

### Exercice B : *La fusée verticale.*

$$a) \quad y(t = 0) = 2 \text{ m}$$

$$b) \quad v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = 0,6t^2 + 0,2t + 5 \quad \text{et} \quad v_y(t = 3) = 0,6(3)^2 + 0,2(3) + 5 = 11 \text{ m/s}$$

$$c) \quad a_y(t) = \frac{dv_y(t)}{dt} = 1,2t + 0,2 \quad \text{et} \quad a_y(t = 5) = 1,2(5) + 0,2 = 6,2 \text{ m/s}^2$$

### Exercice C : *La bille s'immobilise.*

$$\text{Vitesse de la bille : } v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -4t + 5$$

$$\begin{aligned} \text{S'immobiliser signifie que } v_x = 0 : \quad v_x(t) = 0 &\Rightarrow -4t + 5 = 0 \\ &\Rightarrow 4t = 5 \\ &\Rightarrow \boxed{t = 1,25 \text{ s}} \end{aligned}$$

La bille s'immobilise après **1,25 secondes**.

### Exercice D : *L'ascenseur en accélération verticale.*

$$\text{Vitesse de l'ascenseur : } v_y(t) = \frac{dy(t)}{dt} = -20t^3 + 8$$

La hauteur maximale signifie que  $v_y = 0$  :

$$\begin{aligned} v_y(t) = 0 &\Rightarrow -20t^3 + 8 = 0 &\Rightarrow 20t^3 = 8 \\ &\Rightarrow t^3 = 0,4 &\Rightarrow t = \sqrt[3]{0,4} \\ &\Rightarrow \boxed{t = 0,737} \end{aligned}$$

On remplace ce temps dans l'équation de la position et l'on obtient la position maximale :

$$y(t = 0,737) = -5(0,737)^4 + 8(0,737) + 12 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_{\max} = 16,42 \text{ m}}$$







# Chapitre 1.14 – L'intégrale en cinématique

## L'intégrale

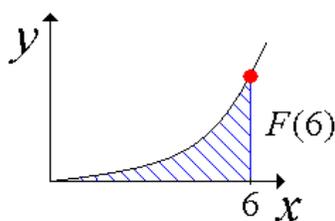
En mathématique, on définit l'intégrale d'une fonction  $f(x)$  tel que

$$F(x) = \int f(x) dx \quad \text{et} \quad F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

où  $F(x)$  est la fonction qui donne la valeur de l'aire sous la courbe de la fonction  $f(x)$  dans l'intervalle  $[0..x]$ . L'intégrale est l'opération mathématique inverse de la dérivée.

### Exemple graphique :

L'aire sous la courbe  $f(x)$  dans l'intervalle  $[0..6]$  est égale à  $F(6)$ .



### Exemple numérique :

Soit  $f(5) = 4$  et  $F(5) = 12$

À la coordonnée  $x = 5$ , la valeur associée est 4 et l'aire sous la courbe dans l'intervalle  $[0..5]$  est égale à 12.

## Le théorème fondamental du calcul

Afin d'évaluer l'aire sous la courbe de la fonction  $f(x)$  dans l'intervalle  $[a..b]$  plutôt que dans l'intervalle  $[0..a]$ , on peut utiliser le théorème suivant :

Formule	Représentation graphique
$\int_{x=a}^b f(x) dx = F(b) - F(a)$	

# La position et la vitesse à l'aide de l'intégrale

Nous avons donné la définition suivante à la vitesse et à l'accélération :

$$v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} \quad \text{et} \quad a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt}$$

Appliquons le calcul différentiel à la définition de la vitesse et de l'accélération afin d'obtenir une définition intégrale de la position et de la vitesse :

Intégrale de l'accélération :

$$\begin{aligned}
 a_x(t) = \frac{dv_x(t)}{dt} &\Rightarrow dv_x(t) = a_x(t) dt && \text{(Isoler } dv_x(t)) \\
 &\Rightarrow \int_{t=t_i}^t dv_x(t) = \int_{t=t_i}^t a_x(t) dt && \text{(Appliquer l'intégrale de } t = t_i \rightarrow t) \\
 &\Rightarrow [v_x(t)]_{t_i}^t = \int_{t=t_i}^t a_x(t) dt && \text{(Résoudre l'intégrale sur } v_x) \\
 &\Rightarrow \boxed{v_x(t) - v_{xi} = \int_{t=t_i}^t a_x(t) dt} && \text{(Évaluer l'intégrale, } v_{xi} = v_x(t_i))
 \end{aligned}$$

Intégrale de la vitesse :

$$\begin{aligned}
 v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} &\Rightarrow dx(t) = v_x(t) dt && \text{(Isoler } dx(t)) \\
 &\Rightarrow \int_{t=t_i}^t dx(t) = \int_{t=t_i}^t v_x(t) dt && \text{(Appliquer l'intégrale de } t = t_i \rightarrow t) \\
 &\Rightarrow [x(t)]_{t_i}^t = \int_{t=t_i}^t v_x(t) dt && \text{(Résoudre l'intégrale sur } v_x) \\
 &\Rightarrow \boxed{x(t) - x_i = \int_{t=t_i}^t v_x(t) dt} && \text{(Évaluer l'intégrale, } x_i = x(t_i))
 \end{aligned}$$

Grâce au calcul différentiel, on peut maintenant utiliser la définition de l'intégrale et donner la définition suivantes à la position, la vitesse et à l'accélération :

<u>La position :</u>	$x(t) - x_i = \int_{t=t_i}^t v_x(t) dt$	unité : $[x(t)] = \text{m}$
<u>La vitesse :</u>	$v_x(t) - v_{xi} = \int_{t=t_i}^t a_x(t) dt$	unité : $[v_x(t)] = \text{m/s}$
<u>L'accélération :</u>	$a_x(t)$	unité : $[a_x(t)] = \text{m/s}^2$

**Situation A : Une planche à roulettes sur un plan incliné : calcul avec intégral.** À partir de l'équation de la vitesse  $v_x(t) = 1 - 0,5t$  associés au mouvement de la planche à roulettes de la situation 3 du chapitre 1.3, on désire évaluer l'équation de la position  $x(t)$  sachant que la position à  $t = 0$  est égale à 1,8 m.

À partir de la version intégrale de la position, évaluons l'équation de la position. Utilisons  $t = 0$  comme borne inférieure à l'intégrale, car la position est connue à ce temps :

$$x(t) - x_i = \int_{t=t_i}^t v_x(t) dt$$

$$\Rightarrow x(t) - x_0 = \int_{t=0}^t v_x(t) dt \quad (\text{Bornes : } t = 0 \rightarrow t)$$

$$\Rightarrow x(t) - x_0 = \int_{t=0}^t (1 - 0,5t) dt \quad (\text{Remplacer } v_x(t) = 1 - 0,5t)$$

$$\Rightarrow x(t) - x_0 = \int_{t=0}^t dt + \int_{t=0}^t -0,5t dt \quad (\text{Distribuer l'intégrale})$$

$$\Rightarrow x(t) - x_0 = \int_{t=0}^t dt - 0,5 \int_{t=0}^t t dt \quad (\text{Factoriser les constantes des intégrales})$$

$$\Rightarrow x(t) - x_0 = [t]_0^t - 0,5 \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^t \quad (\text{Résoudre l'intégrale sur } v_x)$$

$$\Rightarrow x(t) - x_0 = ((t) - (0)) - 0,5 \left( \frac{(t)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} \right) \quad (\text{Évaluer l'intégrale})$$

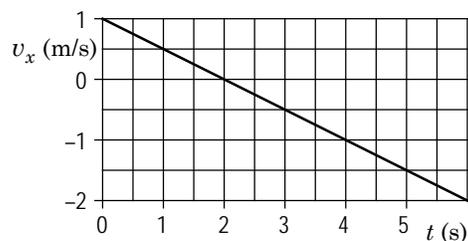
$$\Rightarrow x(t) = t - 0,25t^2 + x_0 \quad (\text{Isoler } x(t))$$

$$\Rightarrow x(t) = t - 0,25t^2 + (1,8) \quad (\text{Remplacer } x_0 = 1,8)$$

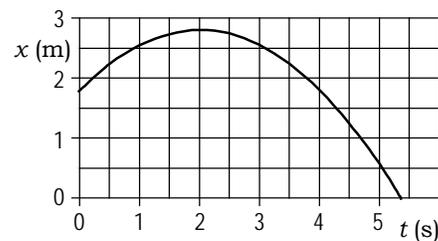
$$\Rightarrow \boxed{x(t) = -0,25t^2 + t + 1,8} \quad (\text{Réécriture})$$

Voici une représentation graphique de nos deux équations du mouvement :

Graphique de  $v_x(t)$  :



Graphique de  $x(t)$  :



**Situation B : Équation du mouvement d'une accélération constante.** Un mobile se déplace avec une accélération constante  $a_x$ . À  $t = 0$ , le mobile occupait la position  $x_0$  et se déplaçait à la vitesse  $v_{x0}$ . On désire évaluer **(a)** l'équation de la vitesse du mobile et **(b)** l'équation de la position du mobile.

**(a)** À partir de la version intégrale de la vitesse, évaluons l'équation de la vitesse. Puisque la vitesse connue est exprimée à  $t = 0$ , utilisons  $t = 0$  comme borne inférieure à l'intégrale :

$$\begin{aligned}
 v_x(t) - v_{xi} &= \int_{t=ti}^t a_x(t) dt \Rightarrow v_x(t) - v_{x0} = \int_{t=0}^t a_x(t) dt && \text{(Bornes : } t = 0 \rightarrow t) \\
 \Rightarrow v_x(t) - v_{x0} &= \int_{t=0}^t a_x dt && \text{(Remplacer } a_x(t) = a_x) \\
 \Rightarrow v_x(t) - v_{x0} &= a_x \int_{t=0}^t dt && \text{(Factoriser constante)} \\
 \Rightarrow v_x(t) - v_{x0} &= a_x [t]_0^t && \text{(Résoudre l'intégrale)} \\
 \Rightarrow v_x(t) - v_{x0} &= a_x ((t) - (0)) && \text{(Évaluer l'intégrale)} \\
 \Rightarrow \boxed{v_x(t) = a_x t + v_{x0}} &&& \text{(Isoler } v_x(t))
 \end{aligned}$$

**(b)** À partir de la version intégrale de la position, évaluons l'équation de la position. Puisque la position connue est exprimée à  $t = 0$ , utilisons  $t = 0$  comme borne inférieure à l'intégrale :

$$\begin{aligned}
 x(t) - x_i &= \int_{t=ti}^t v_x(t) dt \Rightarrow x(t) - x_0 = \int_{t=0}^t v_x(t) dt && \text{(Bornes : } t = 0 \rightarrow t) \\
 \Rightarrow x(t) - x_0 &= \int_{t=0}^t (a_x t + v_{x0}) dt && \text{(Remplacer } v_x(t) = a_x t + v_{x0}) \\
 \Rightarrow x(t) - x_0 &= a_x \int_{t=0}^t t dt + v_{x0} \int_{t=0}^t dt && \text{(Distribuer et factoriser)} \\
 \Rightarrow x(t) - x_0 &= a_x \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^t + v_{x0} [t]_0^t && \text{(Résoudre l'intégrale)} \\
 \Rightarrow x(t) - x_0 &= a_x \left( \frac{(t)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} \right) + v_{x0} ((t) - (0)) && \text{(Évaluer l'intégrale)} \\
 \Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{1}{2} a_x t^2 + v_{x0} t + x_0} &&& \text{(Isoler } x(t))
 \end{aligned}$$

Remarque : On réalise que l'on retombe exactement sur les équations du MUA.

# Résumé de la cinématique

Voici un court résumé des relations existants entre la position, la vitesse et l'accélération :

<u>Position</u>	$x(t)$	←	$x(t)$	<u>Position</u>
	↓		↑	
<b>dérivée</b>	$\frac{dx(t)}{dt}$		$\int v_x(t)dt + x_0$	<b>intégrale</b>
	↓		↑	
<u>Vitesse</u>	$v_x(t)$	↔	$v_x(t)$	<u>Vitesse</u>
	↓		↑	
<b>dérivée</b>	$\frac{dv_x(t)}{dt}$		$\int a_x(t)dt + v_{x0}$	<b>intégrale</b>
	↓		↑	
<u>Accélération</u>	$a_x(t)$	↔	$a_x(t)$	<u>Accélération</u>

## Exercices

**Exercice A : La voiture jouet téléguidée.** À  $t = 0$ , une voiture jouet téléguidée est située à  $x = 5$  m. Sur un intervalle de temps entre 0 et 3 s, sa vitesse est donnée par la fonction  $v_x(t) = 2t$  où  $v_x$  est en mètres par seconde et  $t$  est en seconde. Évaluez la position de la voiture à  $t = 2$  s.

**Exercice B : La particule accélérée.** L'accélération d'une particule est donnée par l'équation  $a_x(t) = 3t$ . Sachant que  $x_0 = 4$  m et  $v_{x0} = 2$  m/s, calculez (a) l'accélération à 5 s, (b) la vitesse à 5 s et (c) la position à 5 s.

**Exercice C : La vitesse du mobile.** La vitesse d'un mobile en fonction du temps est donnée par l'équation suivante :

$$v_x(t) = 0,4t^2 + 3t$$

- Évaluez la fonction qui permet d'évaluer l'accélération du mobile.
- De combien de mètres s'est-il déplacé entre 1 s et 3 s ?

## Solutions

### Exercice A : La voiture jouet téléguidée.

À partir de l'équation de base :

$$\begin{aligned}x(t) - x_0 &= \int_{t=0}^t v_x(t) dt && \Rightarrow x_2 - x_0 = \int_{t=0}^2 v_x(t) dt && \text{(Bornes : } t = 0 \rightarrow t = 2 \text{)} \\&&& \Rightarrow x_2 - x_0 = \int_{t=0}^2 2t dt && \text{(Remplacer } v_x(t) = 2t \text{)} \\&&& \Rightarrow x_2 - x_0 = 2 \int_{t=0}^2 t dt && \text{(Factoriser constante)} \\&&& \Rightarrow x_2 - x_0 = 2 \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^2 && \text{(Résoudre l'intégrale)} \\&&& \Rightarrow x_2 - x_0 = 2 \left( \frac{(2)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} \right) && \text{(Évaluer l'intégrale)} \\&&& \Rightarrow x_2 - x_0 = 4 && \text{(Calcul)}\end{aligned}$$

On peut maintenant isoler notre position  $x(t = 2) = x_2$  :

$$\begin{aligned}x_2 - x_0 &= 4 && \Rightarrow x_2 = 4 + x_0 \\&&& \Rightarrow x_2 = 4 + (5) \\&&& \Rightarrow \boxed{x_2 = 9 \text{ m}}\end{aligned}$$

### Exercice B : La particule accélérée.

À partir de l'équation de l'accélération, nous pouvons évaluer l'accélération à 5 s :

$$a_x(t=5) = 3(5) \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_x(t=5) = a_{x5} = 15 \text{ m/s}^2} \quad \text{(a)}$$

À partir de l'équation de l'accélération, nous pouvons évaluer l'équation de la vitesse :

$$\begin{aligned} v_x(t) - v_{x0} &= \int_{t=0}^t a_x(t) dt & \Rightarrow & \quad v_x(t) - v_{x0} = \int_{t=0}^t 3t dt & \text{(Remplacer } a_x(t)) \\ & & \Rightarrow & \quad v_x(t) - v_{x0} = 3 \int_{t=0}^t t dt & \text{(Remplacer } a_x(t)) \\ & & \Rightarrow & \quad v_x(t) - v_{x0} = 3 \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^t & \text{(Résoudre l'intégrale)} \\ & & \Rightarrow & \quad v_x(t) - v_{x0} = 3 \left( \frac{(t)^2}{2} - \frac{(0)^2}{2} \right) & \text{(Évaluer l'intégrale)} \\ & & \Rightarrow & \quad v_x(t) = \frac{3}{2}t^2 + v_{x0} & \text{(Isoler } v_x(t)) \\ & & \Rightarrow & \quad \boxed{v_x(t) = \frac{3}{2}t^2 + 2} & \text{(Remplacer } v_{x0} = 2 \text{ m/s)} \end{aligned}$$

On peut évaluer maintenant la vitesse à 5 s :

$$v_x(t=5) = \frac{3}{2}(5)^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_x(t=5) = v_{x5} = 39,5 \text{ m/s}} \quad \text{(b)}$$

À partir de l'équation de vitesse, nous pouvons évaluer l'équation de la position :

$$\begin{aligned} x(t) - x_0 &= \int_{t=0}^t v_x(t) dt & \Rightarrow & \quad x(t) - x_0 = \int_{t=0}^t \left( \frac{3}{2}t^2 + 2 \right) dt & \text{(Remplacer } v_x(t)) \\ & & \Rightarrow & \quad x(t) - x_0 = \frac{3}{2} \left[ \frac{t^3}{3} \right]_0^t + 2[t]_0^t & \text{(Résoudre l'intégrale)} \\ & & \Rightarrow & \quad x(t) - x_0 = \frac{1}{2}t^3 + 2t & \text{(Évaluer l'intégrale)} \\ & & \Rightarrow & \quad x(t) = \frac{1}{2}t^3 + 2t + x_0 & \text{(Isoler } x(t)) \\ & & \Rightarrow & \quad x(t) = \frac{1}{2}t^3 + 2t + 4 & \text{(Remplacer } x_0 = 4 \text{ m)} \end{aligned}$$

On peut évaluer maintenant la position à 5 s :

$$x(t=5) = \frac{1}{2}(5)^3 + 2(5) + 4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t=5) = x_5 = 76,5 \text{ m}} \quad \text{(c)}$$

### Exercice C : La vitesse du mobile.

À partir de l'équation de vitesse, nous pouvons évaluer l'équation de l'accélération :

$$\begin{aligned} a_x(t) &= \frac{dv_x(t)}{dt} &\Rightarrow a_x(t) &= \frac{d(0,4t^2 + 3t)}{dt} && \text{(Remplacer } v_x(t)) \\ & &\Rightarrow a_x(t) &= 0,4 \frac{d(t^2)}{dt} + 3 \frac{d(t)}{dt} && \text{(Distribution et factorisation)} \\ & &\Rightarrow a_x(t) &= 0,4(2t) + 3(1) && \text{(Évaluer les dérivées)} \\ & &\Rightarrow \boxed{a_x(t) = 0,8t + 3} & \text{ (a)} && \text{(Simplification)} \end{aligned}$$

On peut évaluer le déplacement grâce à l'équation de la vitesse et la notion d'intégrale :

$$\begin{aligned} x(t) - x_i &= \int_{t=t_i}^t v_x(t) dt \\ \Rightarrow x_3 - x_1 &= \int_{t=1}^3 v_x(t) dt && \text{(Borne : } t = 1 \rightarrow t = 3) \\ \Rightarrow x_3 - x_1 &= \int_{t=1}^3 (0,4t^2 + 3t) dt && \text{(Remplacer } v_x(t)) \\ \Rightarrow x_3 - x_1 &= 0,4 \int_{t=1}^3 t^2 dt + 3 \int_{t=1}^3 t dt && \text{(Distribution et factorisation)} \\ \Rightarrow x_3 - x_1 &= 0,4 \left[ \frac{t^3}{3} \right]_1^3 + 3 \left[ \frac{t^2}{2} \right]_1^3 && \text{(Résoudre l'intégrale)} \\ \Rightarrow x_3 - x_1 &= 0,4 \left( \frac{(3)^3}{3} - \frac{(1)^3}{3} \right) + 3 \left( \frac{(3)^2}{2} - \frac{(1)^2}{2} \right) && \text{(Évaluer Intégrale)} \\ \Rightarrow x_3 - x_1 &= (3,467) + (12) && \text{(Calcul)} \\ \Rightarrow x_3 - x_1 &= 15,467 && \text{(Calcul)} \end{aligned}$$

Puisque nous cherchons le déplacement entre 1 et 3 s, nous avons le résultat suivant :

$$\Delta x_{1 \rightarrow 3} = x_3 - x_1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta x_{1 \rightarrow 3} = 15,467 \text{ m}} \quad \text{(b)}$$

# Chapitre 1.X1 – L'intégrale numérique en cinématique

## La cinématique numérique

La cinématique numérique a pour objectif d'évaluer une position  $x$  et une vitesse  $v_x$  à partir d'une valeur initiale de position  $x_i$ , de vitesse  $v_{xi}$  et de temps  $t_i$ , de l'expression de l'accélération  $a_x$  et d'un écoulement de temps  $\Delta t$ . Par la suite, on effectue plusieurs itérations à partir des valeurs calculées précédemment pour déterminer les autres valeurs de positions et de vitesses futures.



Ordinateur portable

À l'aide de la dynamique, l'équation de l'**accélération**  $a_x = a_x(x, v_x, t)$  est une **fonction entièrement connue** qui dépend de  $x$  et  $v_x$  et  $t$  et elle est obtenue à partir du concept de force  $\vec{F}$  et de la 2<sup>ème</sup> loi de Newton<sup>1</sup> ( $\vec{F} = m\vec{a}$ ).

### Exemples :

- Chute libre verticale :

$$a_y = -g$$

où  $g$  : Accélération gravitationnelle constante (m/s<sup>2</sup>)

- Chute verticale avec résistance :

$$a_y = -g - \frac{b}{m} v_y \quad a_y = -g - \frac{b}{m} |v_y| v_y$$

(proportionnel à  $v_y$ )                      (proportionnel à  $v_y^2$ )

où  $g$  : Accélération gravitationnelle constante (m/s<sup>2</sup>)

$b$  : Coefficient de frottement (kg s<sup>-1</sup>, kg m<sup>-1</sup>)

$m$  : Masse de l'objet en chute (kg)

- Système masse-ressort :

$$a_x = -\omega_0^2 x \quad a_x = -\omega_0^2 x - \frac{b}{m} v_x + \frac{F_{\text{ext}}}{m} \cos(\omega_{\text{ext}} t)$$

(libre)                                      (amorti-entretenu)

où  $\omega_0$  : Fréquence naturelle d'oscillation (rad/s)      ( $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ ,  $k$  : constante du ressort)

$b$  : Coefficient de frottement (kg s<sup>-1</sup>)

$F_{\text{ext}}$  : Force du mouvement entretenu en newton (N)

$\omega_{\text{ext}}$  : Fréquence de l'oscillation entretenu/forcée (rad/s)

$m$  : Masse du bloc en oscillation (kg)

<sup>1</sup> La 2<sup>ème</sup> loi de Newton sera présentée dans la section Chapitre 2.1 – Les lois du mouvement de Newton.

## Définition des termes

Voici la liste des termes importants à définir avant d'appliquer une technique d'intégration numérique pour évaluer une position  $x_f$  et une vitesse  $v_{xf}$  :

Terme connu	Terme facile à évaluer	Terme à évaluer
$x_i$ : Position initiale $v_{xi}$ : Vitesse initiale $t_i$ : Temps initial	$t_f$ : Temps final $a_{xi}$ : Accélération initiale	$x_f$ : Position finale $v_{xf}$ : Vitesse finale
Fonction entièrement connue		
$a_x = a_x(x, v_x, t)$ : Équation de l'accélération		
Pas d'intégration		
$\Delta t$ : Intervalle de temps de l'intégration numérique		

Remarque :

- Petit  $\Delta t \Rightarrow$  **Précision**  $\uparrow$  mais **calcul simulation**  $\uparrow$ .
- Grand  $\Delta t \Rightarrow$  **Précision**  $\downarrow$  mais **calcul simulation**  $\downarrow$ .
- Avec un bon algorithme, on peut maximiser la précision tout en gardant un  $\Delta t$  relativement grand ce qui réduit le temps calcul pour une longue simulation.

## L'intégration par la méthode d'Euler (ordre 1)

La méthode d'Euler propose d'utiliser uniquement les conditions initiales ( $x_i, v_{xi}$  et  $t_i$ ) pour évaluer la position finale  $x_f$  et la vitesse  $v_{xf}$  finale. Cette technique propose de déplacer l'objet à vitesse constante et d'évaluer la vitesse finale avec une accélération initiale  $a_{xi}$  constante.

Voici l'algorithme de la méthode d'Euler :

1. Affectation des données initiales :  $x_i, v_{xi}$  et  $t_i$
2. Évaluer l'accélération initiale :  $a_{xi} = a_x(x_i, v_{xi}, t_i)$
3. Évaluer la position finale :  $x_f = x_i + v_{xi}\Delta t$  (avec vitesse initiale)
4. Évaluer la vitesse finale :  $v_{xf} = v_{xi} + a_{xi}\Delta t$
5. Évaluer le temps final :  $t_f = t_i + \Delta t$

Avantage : Facile à implanter (méthode naïve) et très rapide à calculer.

Désavantage : Méthode de résolution qui entraîne beaucoup d'imprécision. La solution diverge très rapidement lorsque le  $\Delta t$  est grand.

## L'intégration par la méthode d'Euler semi-implicite (ordre 1)

La méthode d'Euler semi-implicite propose de calculer la vitesse finale  $v_{xf}$  avec l'accélération initiale  $a_{xi}$  constante et de déplacer l'objet avec une vitesse constante égale à la vitesse finale  $v_{xf}$ .

Voici l'algorithme de la méthode d'Euler inversé :

1. Identifier les données initiales :  $x_i, v_{xi}$  et  $t_i$
2. Évaluer l'accélération initiale :  $a_{xi} = a_x(x_i, v_{xi}, t_i)$
3. Évaluer la vitesse finale :  $v_{xf} = v_{xi} + a_{xi}\Delta t$
4. Évaluer la position finale :  $x_f = x_i + v_{xf}\Delta t$  (avec vitesse finale)
5. Évaluer le temps final :  $t_f = t_i + \Delta t$

Avantage : Facile à implanter et rapide à calculer. Plus de stabilité lorsqu'il y a des accélérations qui sont fonction de la position (comme un ressort) et propose des orbites fermées lors d'une accélération radiale en  $1/r^2$ .

Désavantage : Méthode de résolution qui diverge rapidement pour une grande majorité de problèmes comme ceux faisant intervenir la vitesse dans la définition de l'accélération (comme la force magnétique).

## L'intégration par la méthode Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4)

La méthode Runge-Kutta d'ordre 4 (RK4) propose d'évaluer une position et une vitesse intermédiaire afin de mieux estimer la position et la vitesse finale. Bien que cet algorithme ne soit pas unique, l'implantation suivante propose de calculer des valeurs intermédiaires à un temps  $t_i + \Delta t/2$  situées à mi-chemin dans l'itération :

Voici l'algorithme de la méthode RK4<sup>2</sup> :

### Calculs à la position initiale

1. Identifier les données initiales :  $x_i, v_{xi}$  et  $t_i$
2. Évaluer l'accélération initiale :  $a_{xi} = a_x(x_i, v_{xi}, t_i)$

---

<sup>2</sup> Dans la littérature, on utilise régulièrement la notation suivante :

$$k_1 = a_{x0}\Delta t, \quad k_2 = a_{xf(1)}\Delta t, \quad k_3 = a_{xmid}\Delta t \quad \text{et} \quad k_4 = a_{xf(2)}\Delta t$$

### Calculs à la 1<sup>ière</sup> position finale

3. Évaluer la position finale #1 :  $x_{f(1)} = x_i + v_{xi}\Delta t$  (sans  $a_{xi}$ )
4. Évaluer la vitesse finale #1 :  $v_{xf(1)} = v_{xi} + a_{xi}\Delta t$  (avec  $a_{xi}$ )
5. Évaluer le temps final #1 :  $t_{f(1)} = t_i + \Delta t$
6. Évaluer l'accélération finale #1 :  $a_{xf(1)} = a_x(x_{f(1)}, v_{xf(1)}, t_{f(1)})$

### Calculs à la position à demi-temps

7. Évaluer la position milieu :  $x_{mid} = x_i + v_{xi} \frac{\Delta t}{2} + \frac{1}{2} a_{xi} \left(\frac{\Delta t}{2}\right)^2$  (avec  $a_{xi}$ )
8. Évaluer la vitesse milieu :  $v_{xmid} = v_{xi} + \left(\frac{3}{4} a_{xi} + \frac{1}{4} a_{xf(1)}\right) \frac{\Delta t}{2}$  (avec  $a_{xi}$ ,  $a_{xf(1)}$ )
9. Évaluer le temps milieu :  $t_{mid} = t_i + \frac{\Delta t}{2}$
10. Évaluer l'accélération milieu 2 :  $a_{xmid} = a_x(x_{mid}, v_{xmid}, t_{mid})$

### Calculs à la 2<sup>ième</sup> position finale

11. Évaluer la position finale #2 :  $x_{f(2)} = x_i + v_{xi}\Delta t + \frac{1}{2} a_{xi}\Delta t^2$  (avec  $a_{xi}$ )
12. Évaluer la vitesse finale #2 :  $v_{xf(2)} = v_{xi} + \left(\frac{1}{2} a_{xi} + \frac{1}{2} a_{xf(1)}\right) \Delta t$  (avec  $a_{xi}$ ,  $a_{xf(1)}$ )
13. Évaluer le temps final #2 :  $t_{f(2)} = t_i + \Delta t$
14. Évaluer l'accélération finale #2 :  $a_{xf(2)} = a_x(x_{f(2)}, v_{xf(2)}, t_{f(2)})$

### Calcul de la position finale avec pondération de l'accélération

15. Évaluer la position  $x_f$  :  $x_f = x_i + v_{xi}\Delta t + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} a_{xi} + \frac{2}{3} a_{xmid}\right) \Delta t^2$
16. Évaluer la vitesse  $v_{xf}$  :  $v_{xf} = v_{xi} + \left(\frac{1}{6} a_{xi} + \frac{4}{6} a_{xmid} + \frac{1}{6} a_{xf(2)}\right) \Delta t$
17. Évaluer le temps  $t_f$  :  $t_f = t_i + \Delta t$

Avantage : Algorithme qui converge vers la solution exacte beaucoup plus rapidement même avec un grand  $\Delta t$ .

Désavantage : Algorithme qui cause naturellement une atténuation lorsqu'il est utilisé lors d'oscillation comme dans la simulation d'un système masse-ressort.

Preuve : (terme 15 et 16)

Soit un objet situé à la position  $x_0$  se déplaçant à la vitesse  $v_{x0}$  au temps  $t_0 = 0$ . À l'aide de la 2<sup>ème</sup> loi de Newton

$$\sum F_x = ma_x$$

nous pouvons établir une relation

$$a_x = a_x(x, v_x, t)$$

nous permettant d'évaluer l'accélération  $a_{x0}$  à  $t_0 = 0$ . Évaluons la position  $x$ , la vitesse  $v_x$  et l'accélération  $a_x$  à un temps  $t = \Delta t$  en approximant l'expression de  $x$ ,  $v_x$  et  $a_x$  à l'aide d'un développement en série de Taylor

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{(n)}(0)}{n!} \Delta t^n, \quad v_x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_x^{(n)}(0)}{n!} \Delta t^n \quad \text{et} \quad a_x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_x^{(n)}(0)}{n!} \Delta t^n$$

où

$$x^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n}{dt^n} x \right|_{t=0}, \quad v_x^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n}{dt^n} v_x \right|_{t=0} \quad \text{et} \quad a_x^{(n)}(0) = \left. \frac{d^n}{dt^n} a_x \right|_{t=0}.$$

Réduisons l'expression de  $x$  à un polynôme du 5<sup>ème</sup> ordre

$$x = \frac{x(0)}{1} + \frac{x^{(1)}(0)}{1} \Delta t + \frac{x^{(2)}(0)}{2} \Delta t^2 + \frac{x^{(3)}(0)}{6} \Delta t^3 + \frac{x^{(4)}(0)}{24} \Delta t^4 + O(\Delta t^5)$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$x = x_0 + v_{x0} \Delta t + \frac{1}{2} a_{x0} \Delta t^2 + \frac{1}{6} x^{(3)}(0) \Delta t^3 + \frac{1}{24} x^{(4)}(0) \Delta t^4 + O(\Delta t^5)$$

avec

$$x_0 = x^{(0)}(0), \quad v_{x0} = x^{(1)}(0) \quad \text{et} \quad a_{x0} = x^{(2)}(0).$$

Réduisons l'expression de  $v_x$  à un polynôme du 4<sup>ème</sup> ordre

$$v_x = \frac{v_x^{(0)}(0)}{1} + \frac{v_x^{(1)}(0)}{1} \Delta t + \frac{v_x^{(2)}(0)}{2} \Delta t^2 + \frac{v_x^{(3)}(0)}{6} \Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$v_x = v_{x0} + a_{x0} \Delta t + \frac{1}{2} x^{(3)}(0) \Delta t^2 + \frac{1}{6} x^{(4)}(0) \Delta t^3 + O(\Delta t^4)$$

avec

$$v_{x0} = v_x^{(0)}(0) \quad \text{et} \quad a_{x0} = \left. \frac{dv_x}{dt} \right|_{t=0} = v_x^{(1)}(0)$$

Ainsi que

$$x^{(3)}(0) = v_x^{(2)}(0) \quad \text{et} \quad x^{(4)}(0) = v_x^{(3)}(0) \quad \text{puisque} \quad v_x = \frac{dx}{dt}.$$

Réduisons l'expression de  $a_x$  à un polynôme du 3<sup>ième</sup> ordre

$$a_x = \frac{a_x^{(0)}(0)}{1} + \frac{a_x^{(1)}(0)}{1} \Delta t + \frac{a_x^{(2)}(0)}{2} \Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

que l'on peut réécrire sous la forme

$$a_x = a_0 + x^{(3)}(0) \Delta t + \frac{1}{2} x^{(4)}(0) \Delta t^2 + O(\Delta t^3)$$

avec

$$a_{x0} = a_x^{(0)}(0)$$

Ainsi que

$$x^{(3)}(0) = a_x^{(1)}(0) \quad \text{et} \quad x^{(4)}(0) = a_x^{(2)}(0) \quad \text{puisque} \quad a_x = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

Dans les trois expressions  $x$ ,  $v_x$  et  $a_x$  correspondant à une approximation des équations exactes, nous retrouvons les fonctions  $x^{(3)}(0)$  et  $x^{(4)}(0)$  qui sont inconnues. Effectuons le changement de variable  $A = x^{(3)}(0)$  et  $B = x^{(4)}(0)$  afin d'alléger la notation ce qui nous donne les expressions suivantes :

- $x = x_0 + v_{x0} \Delta t + \frac{1}{2} a_{x0} \Delta t^2 + \frac{1}{6} A \Delta t^3 + \frac{1}{24} B \Delta t^4$
- $v_x = v_{x0} + a_{x0} \Delta t + \frac{1}{2} A \Delta t^2 + \frac{1}{6} B \Delta t^3$
- $a_x = a_{x0} + A \Delta t + \frac{1}{2} B \Delta t^2$

Établissons des conditions de raccordement à un temps  $t = \Delta t / 2$  et à un temps  $t = \Delta t$  à l'expression de  $a_x$  ce qui nous donne les équations suivantes :

$a_x(\Delta t / 2) = a_{x0} + A(\Delta t / 2) + \frac{1}{2} B(\Delta t / 2)^2$	$a_x(\Delta t) = a_{x0} + A(\Delta t) + \frac{1}{2} B(\Delta t)^2$
$\Rightarrow a_x(\Delta t / 2) = a_{x0} + \frac{1}{2} A \Delta t + \frac{1}{8} B \Delta t^2$	$\Rightarrow a_x(\Delta t) = a_{x0} + A \Delta t + \frac{1}{2} B \Delta t^2$
$\Rightarrow 8a_x(\Delta t / 2) = 8a_{x0} + 4A \Delta t + B \Delta t^2$	$\Rightarrow 2a_x(\Delta t) = 2a_{x0} + 2A \Delta t + B \Delta t^2$
$\Rightarrow \boxed{4A \Delta t + B \Delta t^2 = 8a_x(\Delta t / 2) - 8a_{x0}}$	$\Rightarrow \boxed{2A \Delta t + B \Delta t^2 = 2a_x(\Delta t) - 2a_{x0}}$

Les conditions de raccordement proposent le système d'équations suivant qui sera à résoudre :

$$4A \Delta t + B \Delta t^2 = 8a_x (\Delta t / 2) - 8a_{x0} \quad (1)$$

$$2A \Delta t + B \Delta t^2 = 2a_x (\Delta t) - 2a_{x0} \quad (2)$$

En effectuant (1) - (2), nous obtenons le résultat suivant :

$$[4A \Delta t + B \Delta t^2] - [2A \Delta t + B \Delta t^2] = [8a_x (\Delta t / 2) - 8a_{x0}] - [2a_x (\Delta t) - 2a_{x0}]$$

$$\Rightarrow 2A \Delta t = -6a_{x0} + 8a_x (\Delta t / 2) - 2a_x (\Delta t)$$

$$\Rightarrow \boxed{A \Delta t = -3a_{x0} + 4a_x (\Delta t / 2) - a_x (\Delta t)}$$

En effectuant (1) - 2\*(2), nous obtenons le résultat suivant :

$$[4A \Delta t + B \Delta t^2] - 2[2A \Delta t + B \Delta t^2] = [8a_x (\Delta t / 2) - 8a_{x0}] - 2[2a_x (\Delta t) - 2a_{x0}]$$

$$\Rightarrow -B \Delta t^2 = -4a_{x0} + 8a_x (\Delta t / 2) - 4a_x (\Delta t)$$

$$\Rightarrow \boxed{B \Delta t^2 = 4a_{x0} - 8a_x (\Delta t / 2) + 4a_x (\Delta t)}$$

Avec les expressions de  $A \Delta t$  et  $B \Delta t^2$ , nous pouvons les remplacer dans  $x$ ,  $v_x$  et obtenir les équations suivantes :

$$\text{(Position)} \quad x = x_0 + v_{x0} \Delta t + \frac{1}{2} a_{x0} \Delta t^2 + \frac{1}{6} A \Delta t^3 + \frac{1}{24} B \Delta t^4$$

$$\Rightarrow x = x_0 + v_{x0} \Delta t + \frac{1}{2} a_{x0} \Delta t^2 + \frac{1}{6} (-3a_{x0} + 4a_x (\Delta t / 2) - a_x (\Delta t)) \Delta t^2 + \frac{1}{24} (4a_{x0} - 8a_x (\Delta t / 2) + 4a_x (\Delta t)) \Delta t^2$$

$$\Rightarrow x = x_0 + v_{x0} \Delta t + \frac{1}{2} a_{x0} \Delta t^2 + \frac{1}{2} \left( -a_{x0} + \frac{4}{3} a_x (\Delta t / 2) - \frac{1}{3} a_x (\Delta t) \right) \Delta t^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} a_{x0} - \frac{2}{3} a_x (\Delta t / 2) + \frac{1}{3} a_x (\Delta t) \right) \Delta t^2$$

$$\Rightarrow x = x_0 + v_{x0} \Delta t + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} a_{x0} + \frac{2}{3} a_x (\Delta t / 2) \right) \Delta t^2 \quad \blacksquare (1)$$

$$\text{(Vitesse)} \quad v_x = v_{x0} + a_{x0} \Delta t + \frac{1}{2} A \Delta t^2 + \frac{1}{6} B \Delta t^3$$

$$\Rightarrow v_x = v_{x0} + a_{x0} \Delta t + \frac{1}{2} (-3a_{x0} + 4a_x (\Delta t / 2) - a_x (\Delta t)) \Delta t + \frac{1}{6} (4a_{x0} - 8a_x (\Delta t / 2) + 4a_x (\Delta t)) \Delta t$$

$$\begin{aligned}
v_x &= v_{x0} + a_{x0}\Delta t \\
\Rightarrow & + \left( -\frac{9}{6}a_{x0} + \frac{12}{6}a_x(\Delta t/2) - \frac{3}{6}a_x(\Delta t) \right)\Delta t + \left( \frac{4}{6}a_{x0} - \frac{8}{6}a_x(\Delta t/2) + \frac{4}{6}a_x(\Delta t) \right)\Delta t \\
\Rightarrow & v_x = v_{x0} + \left( \frac{1}{6}a_{x0} + \frac{4}{6}a_x(\Delta t/2) + \frac{1}{6}a_x(\Delta t) \right)\Delta t \quad \blacksquare (2)
\end{aligned}$$

**Remarque :**

Dans cette notation, nous avons la correspondance

$$a_{xmid} = a_x(\Delta t/2) \quad \text{et} \quad a_{xf(2)} = a_x(\Delta t) .$$

Ces deux accélérations se doivent d’être évaluées avec des expressions  $x$  et  $v_x$  développées en série de Taylor au 3<sup>ième</sup> ordre ce qui donne des expressions comme

$$v_{xmid} = v_{x0} + \left( \frac{3}{4}a_{x0} + \frac{1}{4}a_{xf(1)} \right)\frac{\Delta t}{2} \quad \text{et} \quad v_{xf(2)} = v_{x0} + \left( \frac{1}{2}a_{x0} + \frac{1}{2}a_{xf(1)} \right)\Delta t$$

dont la démonstration des coefficients est laissée à la discrétion du lecteur.

## Comparaison des méthodes numériques avec la solution analytique

Voici trois problèmes ayant été solutionnés analytiquement (solution algébrique exacte) et numériquement par les trois algorithmes précédents.

**La chute libre :**

Accélération :

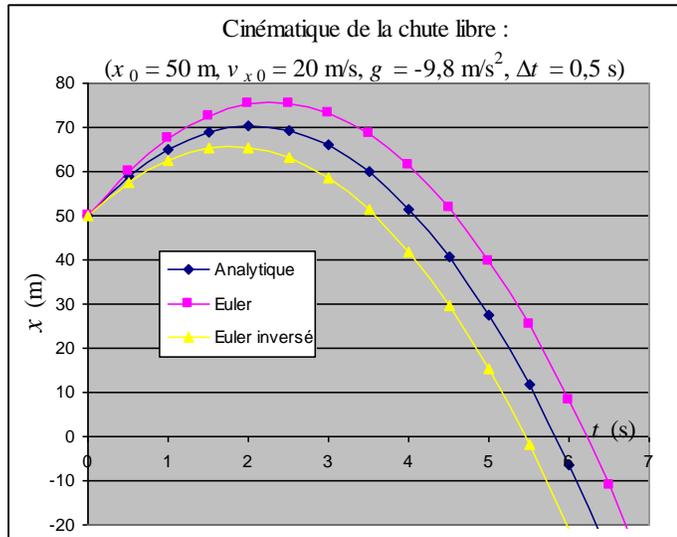
$$a_x = -g$$

Solution analytique<sup>3</sup> (MUA) :

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

**Conclusion :**

Les deux algorithmes d’Euler convergent vers la solution analytique lorsque l’accélération est constante et l’écart diminue rapidement lorsqu’on diminue l’intervalle de temps  $\Delta t$ .



<sup>3</sup> La preuve de cette solution analytique est disponible au chapitre NYA – Chapitre 1.6.

La chute avec résistance proportionnelle à  $v_y$  :

Accélération :

$$a_y = -g - \frac{b}{m} v_y$$

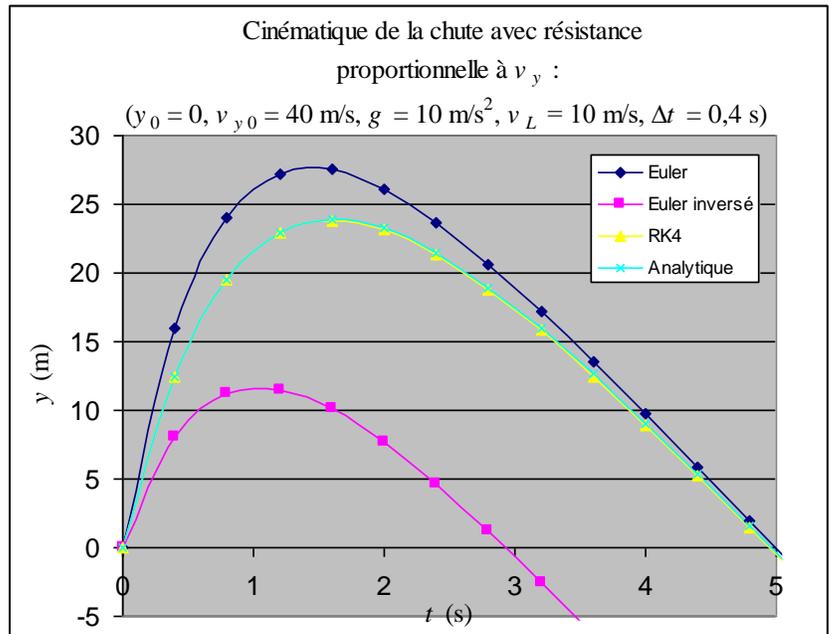
Solution analytique<sup>4</sup> :

$$y = y_0 - v_L t + (v_L + v_{y0}) \frac{v_L}{g} \left( 1 - e^{-\frac{gt}{v_L}} \right)$$

où  $v_L = mg / b$

Conclusion :

Les trois méthodes numériques se comportent adéquatement lorsque la vitesse limite est atteinte, mais la méthode RK4 permet d'évaluer avec beaucoup plus de précision le comportement de la fonction lorsque la vitesse de l'objet  $v_y$  est supérieure à la vitesse limite  $v_L$ .



Système masse-ressort :

Accélération :

$$a_x = -\omega_0^2 x$$

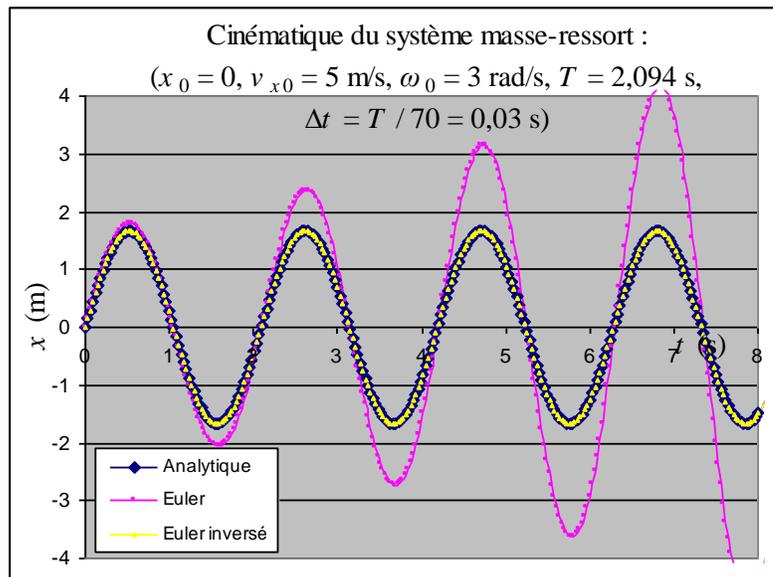
Solution analytique<sup>5</sup> (MHS) :

$$x = A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

où  $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{x0}^2}{\omega_0^2}}$   
 $\phi = \sin^{-1}(x_0 / A)$

Conclusion :

La méthode d'Euler diverge très rapidement. La méthode d'Euler inversé semble mieux adaptée à ce type de problème.

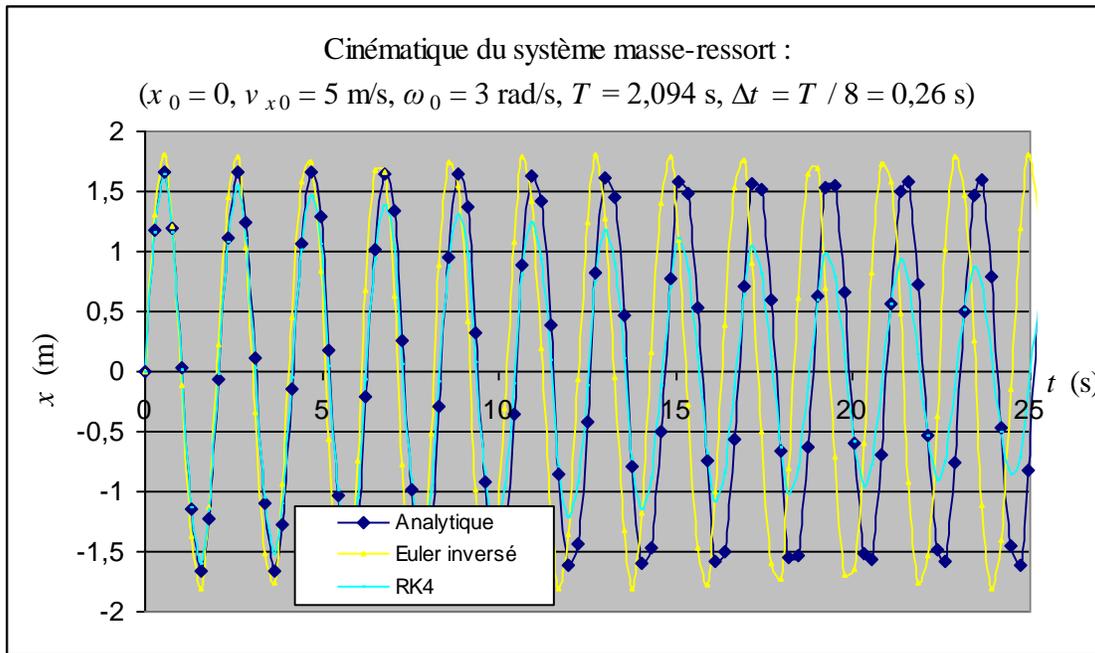


Période d'oscillation :  $T = 2\pi / \omega_0 = 3,1416 \text{ s}$

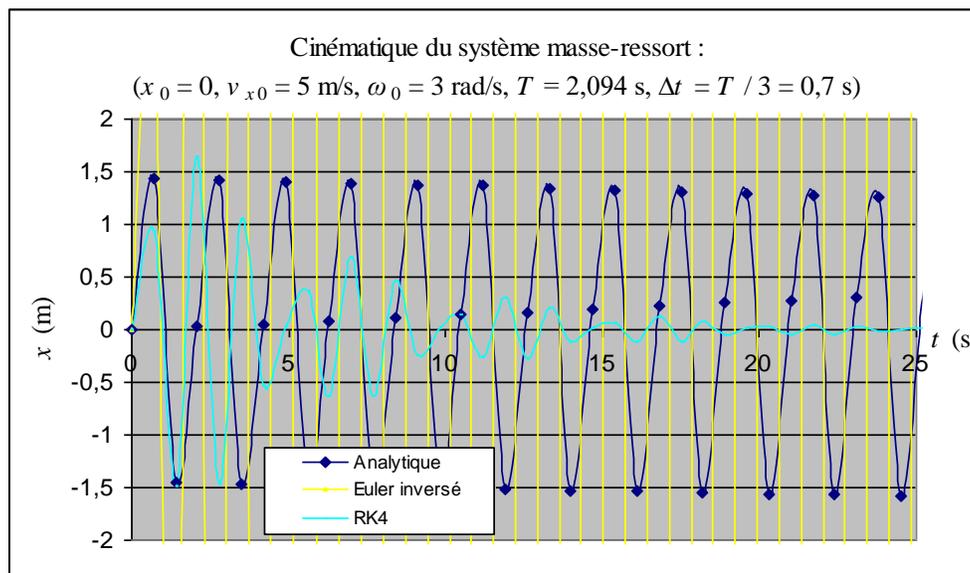
<sup>4</sup> La preuve de cette solution analytique est disponible au chapitre NYA – Chapitre 2.X1.

<sup>5</sup> La preuve de cette solution analytique est disponible au chapitre NYC – Chapitre 1.1c.

En appliquant la méthode de RK4, on réalise que cette méthode, bien qu'elle soit plus précise que la méthode d'Euler inversé pour la grande majorité des problèmes, commence à générer de **l'atténuation aux oscillations** lorsque l'intervalle de temps  $\Delta t$  est supérieur à  $1/20$  de la période  $T$  d'oscillation (usage de moins de 20 points pour estimer un mouvement sinusoïdale).



Lorsque  $\Delta t = T/4$ , la méthode d'Euler inversé diverge en « explosant ». La méthode RK4 demeure stable avec atténuation lorsque  $T/20 < \Delta t < T/3$  et diverge en « explosant » lorsque  $\Delta t > T/3$ . Cela semble raisonnable, car il est difficile d'approximer une fonction sinusoïdale avec moins de 4 points par cycle complet.



Système masse-ressort amorti :

Accélération :

$$a_x = -\omega_0^2 x - \frac{b}{m} v_x$$

Solution analytique<sup>6</sup> :

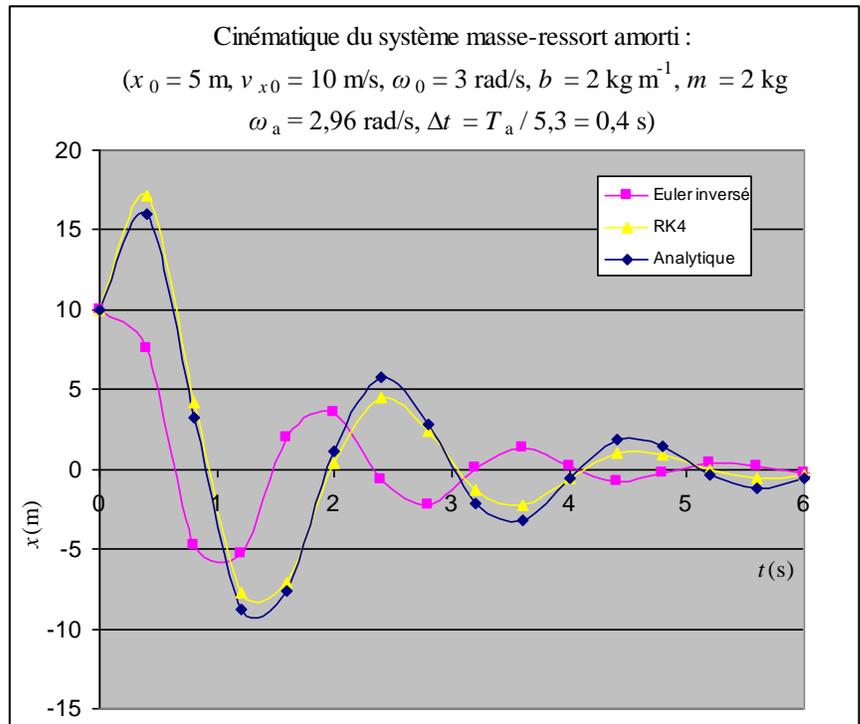
$$x = A_0 e^{-\frac{b}{2m}t} \sin(\omega_a t + \phi)$$

où

$$A_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{\left(v_{x0} - \frac{b}{2m}x_0\right)^2}{\omega_a^2}}$$

$$\phi = \sin^{-1}(x_0 / A)$$

$$\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$



Période d'oscillation :  $T_a = 2\pi / \omega_a$

Conclusion :

L'algorithme RK4 permet de maintenir les oscillations à la fréquence  $\omega_a$  adéquatement tout en préservant une bonne estimation de l'amplitude et de la phase et ce malgré « l'atténuation naturelle » causée par l'algorithme.

**Stabilité des algorithmes en une dimension**

Voici un petit bilan des conclusions obtenues par l'application des différentes méthodes d'intégrations numériques à différents types de problèmes :

Algorithme	Accélération <sup>7</sup> $a_x = a_0 t^n$	Accélération $a_x = a_x(x)$	Accélération $a_x = a_x(v_x)$	Accélération $a_x = a_x(x, v_x)$
Euler	<b>stable</b>	<b>instable</b>	<b>instable</b>	<b>instable</b>
Euler inversé	<b>stable</b>	<b>stable</b>	<b>instable</b>	<b>instable</b>
RK4	<b>stable</b>	<b>stable</b>	<b>stable</b>	<b>stable</b>

<sup>6</sup> La preuve de cette solution analytique est disponible au chapitre NYC – Chapitre 1.7.

<sup>7</sup> Bien que l'exemple présenté dans ce document fait l'objet d'une accélération constante ( $n = 0$ ), il est possible de démontrer numériquement que l'algorithme d'Euler converge adéquatement lorsque l'accélération dépend uniquement d'une fonction polynomiale du temps.

# Comparaison des méthodes numériques avec la solution analytique pour un mouvement en deux dimensions

Les différents algorithmes présentés peuvent être implémentés vectoriellement. Il suffit de définir un vecteur pour l'ensemble des paramètres :

Position	Vitesse	Accélération
$x \rightarrow \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$	$v_x \rightarrow \vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$	$a_x \rightarrow \vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$

## Particule chargée dans un champ magnétique constant selon l'axe z :

Force magnétique :

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Accélération :

$$a_x = \frac{qB_z}{m} v_y \quad \text{et} \quad a_y = -\frac{qB_z}{m} v_x$$

Solution analytique<sup>8</sup> :

$$x(t) = x_0 + R(\sin(\omega t - \phi) + \sin(\phi))$$

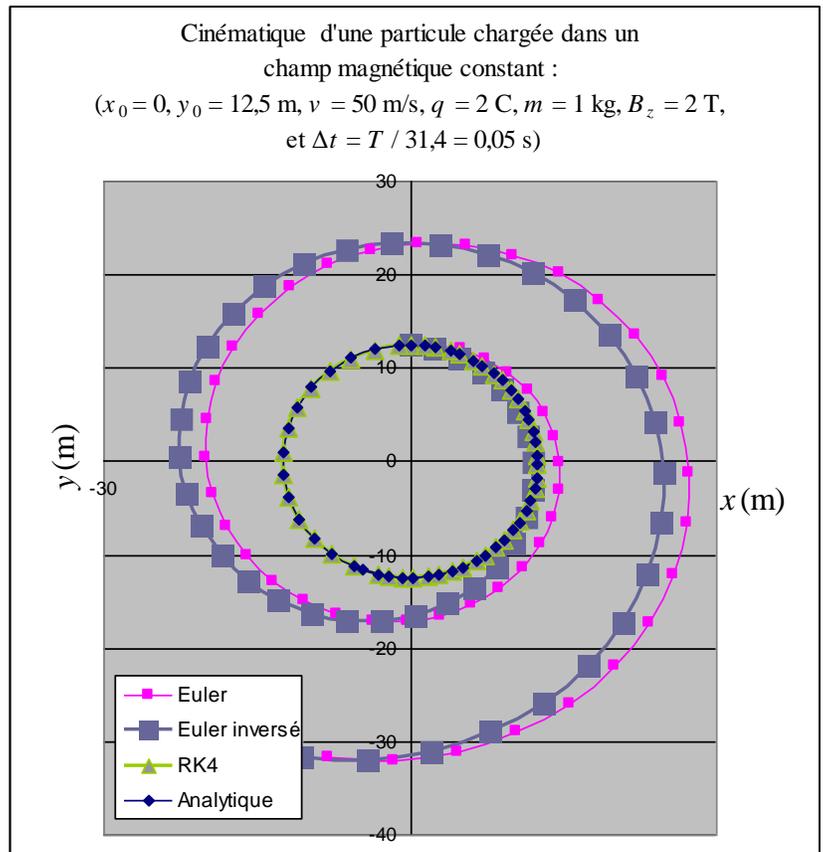
$$y(t) = y_0 + R(\cos(\omega t - \phi) - \cos(\phi))$$

où  $v = \sqrt{v_{x0}^2 + v_{y0}^2}$

$$R = \frac{mv}{qB_z}$$

$$\phi = \arctan(v_{y0} / v_{x0})$$

$$\omega = \frac{qB_z}{m}$$



Période d'oscillation :  $T = 2\pi / \omega = 2\pi m / qB_z$

## Conclusion :

L'algorithme RK4 peut converger vers la solution analytique seulement lorsqu'il y a un minimum de 30 points pour approximer la trajectoire circulaire (converge si  $\Delta t < T/30$ ). Lorsqu'on utilise un pas d'itération trop grand, l'algorithme RK4 tend à produire une trajectoire circulaire qui « entre » dans la trajectoire analytique (trajectoire contraire à celles des algorithmes d'Euler qui augmentent la taille du cercle).

<sup>8</sup> La preuve de cette solution analytique est disponible au chapitre NYB – Chapitre 4.2d.









# Chapitre 2.1 – Les lois du mouvement de Newton

## De Aristote à René Descartes

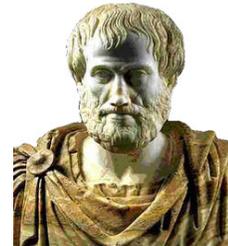
L'explication de la nature du mouvement fut élaborée sur plusieurs siècles. Au 4<sup>e</sup> siècle avant notre ère, **Aristote**<sup>1</sup> élaborera les hypothèses suivantes :

➤ Le **mouvement vertical** d'un objet que l'on lâche s'explique par la tendance naturelle des objets à « retourner vers le centre de l'Univers » situé au centre de la Terre pour l'époque.

Exemple : une pomme tombe vers le sol.

➤ Le **mouvement horizontal** ne peut se produire qu'en présence d'une influence extérieure. Il faut absolument une « poussée » pour qu'un objet puisse se déplacer horizontalement.

Exemple : Il faut un bœuf pour faire avancer une charrette.



Aristote  
(384-322 av. J.C.)

Vers 1650, **René Descartes**<sup>2</sup> formula une explication beaucoup plus simple à la nature du mouvement en introduisant le concept d'inertie :

➤ Sans influence extérieure, le mouvement d'un objet a tout simplement tendance à demeurer inchangé.

➤ Lorsqu'un objet est au repos, il a tendance à demeurer au repos.

➤ L'inertie est une grandeur augmentant la difficulté à modifier l'état de mouvement d'un objet.



René Descartes  
(1596-1650)

## Sir Isaac Newton

En 1687, Sir Isaac Newton<sup>3</sup> publie les *Philosophiæ naturalis principia mathematica* et marque un grand changement dans l'écriture de la physique. Il introduit le calcul différentiel dans l'explication de la nature du mouvement. Il introduit le concept de **force** qu'il relie grâce à **l'inertie** au concept d'**accélération**. C'est également dans cet œuvre qu'il énonce la théorie de l'attraction universelle qui porte le nom maintenant de la **théorie de la gravitation**.



Isaac Newton  
(1643-1727)

<sup>1</sup> Aristote, un philosophe grec, fut l'élève de Platon et s'intéressa aux sciences physiques, biologiques, astronomiques et plusieurs autres.

<sup>2</sup> René Descartes, mathématicien, physicien et philosophe français, fut le fondateur des principes cartésiens.

<sup>3</sup> Sir Isaac Newton, mathématicien, physicien, astronome et philosophe anglais, fut le fondateur de la mécanique Newtonienne.

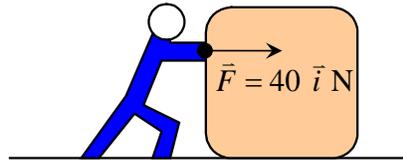
## La force

La **force** représente toute forme d'influence qui agit sur un objet (masse) et qui a **pour effet** de **modifier** son **mouvement naturel** (repos ou vitesse constante). On utilise dans le système SI le newton pour mesurer la force qui est représentée mathématiquement à l'aide d'un **vecteur**.

Exemple : Albert pousse une boîte

Notation mathématique :  $force = \vec{F}$

Unité SI (newton) :  $[\vec{F}] = \text{N}$



## L'inertie

**L'inertie** est la propriété augmentant la difficulté à modifier le mouvement naturel d'un objet. La **masse** est la **quantité physique** définissant l'**inertie** dans un **mouvement rectiligne**. Pour des raisons historiques, c'est le kilogramme qui est utilisé pour mesurer la masse et non le gramme.

Notation mathématique :  $masse = m$

Unité SI (kilogramme) :  $[m] = \text{kg}$



Plume : petite inertie



Camion : grande inertie

## La 1<sup>re</sup> de Newton

La première loi de Newton s'énonce de la façon suivante :

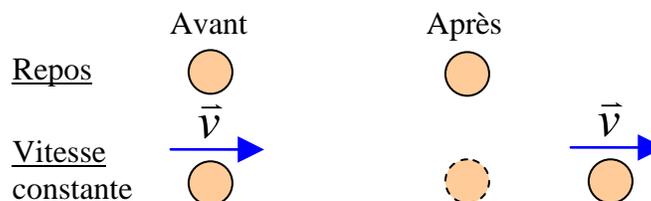
*En l'absence d'influence extérieure, un objet au repos demeure au repos et un objet déjà en mouvement se déplace en ligne droite à vitesse constante.*

Mathématiquement, la 1<sup>re</sup> loi de Newton s'énonce de la façon suivante :

$$\sum \vec{F} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \text{ est constante}$$

où  $\sum \vec{F}$  : Somme de toutes les forces appliquées sur l'objet (force résultante) (N)

$\vec{v}$  : Vecteur vitesse de l'objet (m/s)



## La 2<sup>e</sup> loi de Newton

La deuxième loi de Newton s'énonce de la façon suivante :

*Un objet accélère dans la direction de la force qu'il subit, proportionnellement à la force qu'il subit et en proportion inverse de sa masse.*

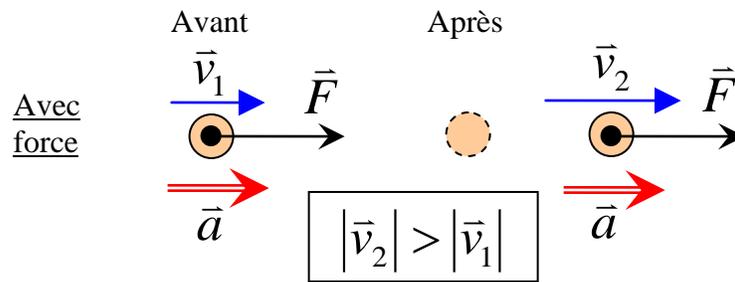
Mathématiquement, nous pouvons résumer la 2<sup>e</sup> loi de Newton de la façon suivante :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

où  $\sum \vec{F}$  : Somme de toutes les forces appliquées sur l'objet (force résultante) (N ou kg m/s<sup>2</sup>)

$m$  : Masse de l'objet qui subit la force (kg)

$\vec{a}$  : Accélération de l'objet qui subit la force (m/s<sup>2</sup>)

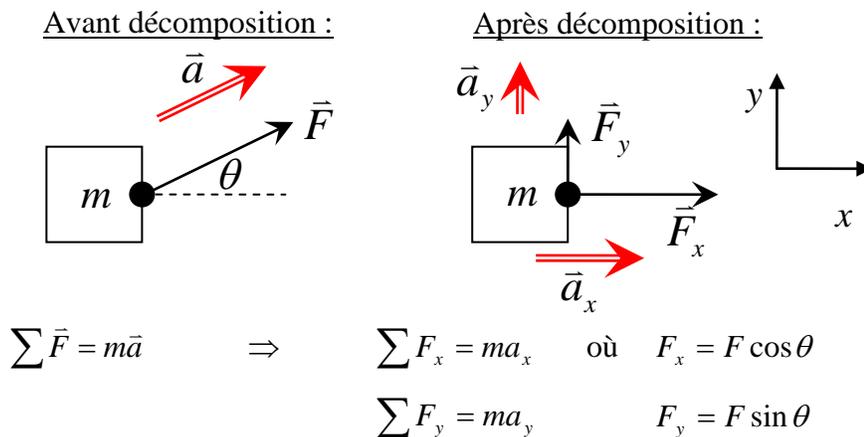


À partir de la 2<sup>ième</sup> loi de Newton, on réalise que l'on peut définir le Newton à partir du kilogramme, du mètre et de la seconde :

$$\vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \text{N} = (\text{kg}) \left( \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{N} = \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2}}$$

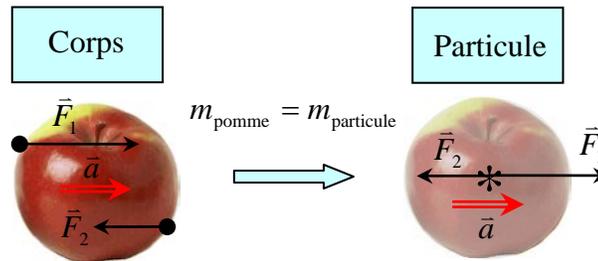
## Décomposition des forces

Pour solutionner des problèmes à l'aide de la 2<sup>e</sup> loi de Newton, on doit décomposer l'équation  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$  qui est vectorielle dans un système d'axe  $xy$ . Voici un exemple de décomposition admissible : (angle exprimé par rapport à l'horizontale)



# La dynamique de la particule

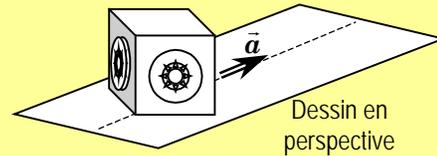
En dynamique de la particule, on réduit tout corps à une seule particule ayant la masse totale du corps. Ceci permet d'évaluer l'état de **translation du corps** en évaluant par la **2<sup>e</sup> loi de Newton** l'accélération de la particule en supposant que toutes les forces appliquées sur le corps sont appliquées sur la particule.



La dynamique de la particule approxime un corps comme étant une particule pouvant effectuer des translations.

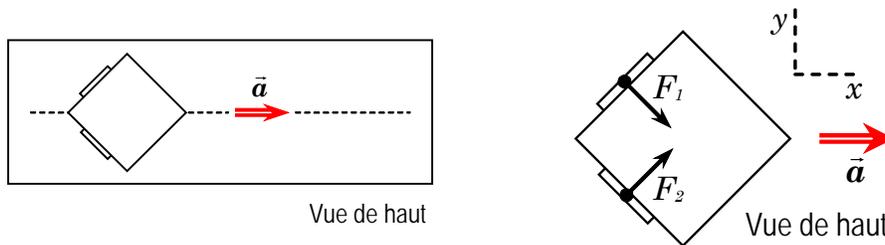
La dynamique de la particule ne permet pas d'évaluer la rotation ni la vibration du corps.

**Situation 1 : La propulsion par ventilateurs.** Un bloc cubique est posé sur une table à air horizontale (frottement négligeable). Sur deux faces verticales adjacentes se trouvent des ventilateurs identiques. Lorsque les deux ventilateurs identiques fonctionnent, on observe que le bloc accélère à  $0,3 \text{ m/s}^2$  selon une orientation définie par la diagonale qui passe entre les deux faces où se trouvent les ventilateurs.

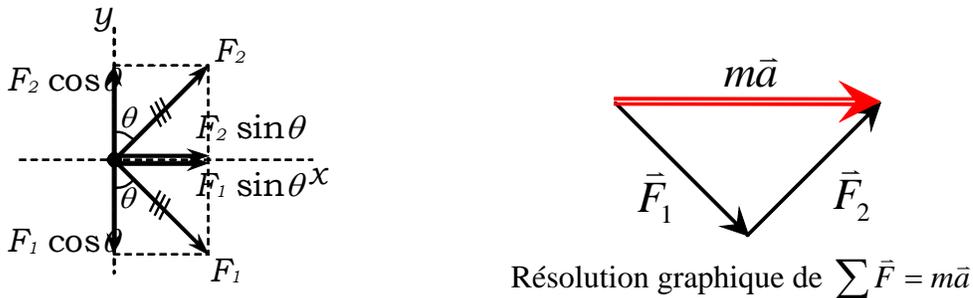


La masse du bloc (avec les ventilateurs) est égale à  $2 \text{ kg}$ . On désire déterminer le module de la force exercée par chaque ventilateur.

Effectuons un diagramme des forces vue de haut : ( $\theta = 45^\circ$  et  $F_1 = F_2 = F$ )



Décomposons nos forces dans le système d'axe  $xy$  et évaluons graphiquement la 2<sup>e</sup> loi de Newton :

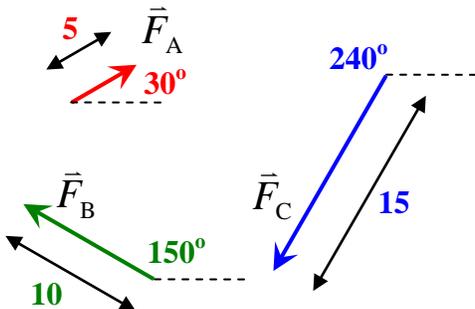


Évaluons la force  $F$  des deux ventilateurs à l'aide des forces selon l'axe  $x$  :

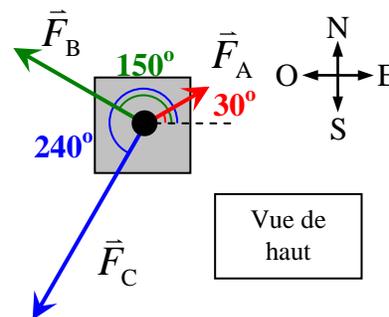
$$\begin{aligned} \sum F_x = ma_x &\Rightarrow F_1 \sin(\theta) + F_2 \sin(\theta) = ma_x && \text{(Remplacer } \sum F_x \text{)} \\ &\Rightarrow 2F \sin(\theta) = ma_x && (F_1 = F_2 = F) \\ &\Rightarrow F = \frac{ma_x}{2 \sin(\theta)} && \text{(Isoler } F \text{)} \\ &\Rightarrow F = \frac{(2)(0,3)}{2 \sin(45^\circ)} && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ &\Rightarrow \boxed{F = 0,424 \text{ N}} && \text{(Évaluer } F \text{)} \end{aligned}$$

**Situation A : Une caisse poussée de tous les côtés.** Une caisse de 10 kg est immobile sur une surface plane. **Albert**, **Béatrice** et **Clovis** pousse sur la caisse simultanément avec des forces différentes en module et en orientation. **Albert** pousse avec une force de **5 N** orienté à **30°** par rapport à l'est, **Béatrice** pousse avec une force de **10 N** orienté à **150°** par rapport à l'est et **Clovis** pousse avec une force de **15 N** orienté à **240°** par rapport à l'est. On désire (a) dessiner qualitativement les trois vecteurs forces, (b) additionner graphiquement les trois vecteurs et évaluer graphiquement la 2<sup>ième</sup> loi de Newton et (c) évaluer le module de l'accélération de la caisse.

(a) Voici les trois vecteurs dessinés :

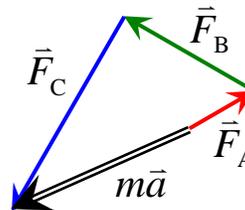


Forces appliquées sur la caisse :



(b) Voici l'addition graphique de la 2<sup>ième</sup> loi de Newton : ( $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ )

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = m\vec{a}$$



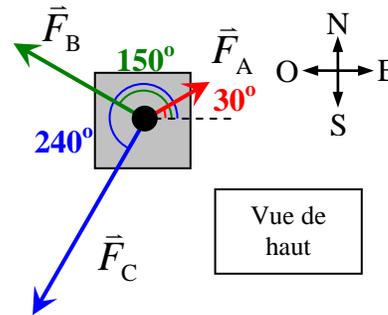
(c) Calculons la force décomposée en  $x$  et en  $y$  :

En  $x$  :

$$\begin{aligned}\sum F_x &= F_A \cos(30^\circ) + F_B \cos(150^\circ) + F_C \cos(240^\circ) \\ &= (5)(0,866) + (10)(-0,866) + (15)(-0,5) \\ &= -11,83 \text{ N}\end{aligned}$$

En  $y$  :

$$\begin{aligned}\sum F_y &= F_A \sin(30^\circ) + F_B \sin(150^\circ) + F_C \sin(240^\circ) \\ &= (5)(0,5) + (10)(0,5) + (15)(-0,866) \\ &= -5,49 \text{ N}\end{aligned}$$



Nous pouvons calculer le module de la force :

$$F_{\text{tot}} = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(-11,83)^2 + (-5,49)^2} \Rightarrow \boxed{F_{\text{tot}} = 13,04 \text{ N}}$$

Évaluons le module de l'accélération avec la 2<sup>ième</sup> loi de Newton : ( $F = ma$ , version scalaire)

$$F = ma \quad \Rightarrow \quad a = \frac{F}{m} = \frac{(13,04)}{(10)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 1,30 \text{ m/s}^2}$$

## Technique pour résoudre des problèmes à l'aide du concept de force

Voici un algorithme de résolution de problème utilisant la 2<sup>ième</sup> loi de Newton :

- 1) Identifier toutes les masses.
- 2) Identifier toutes les forces appliquées sur chaque masse.
- 3) Faire un diagramme des forces pour chaque masse avec un système d'axe  $xy$ .
- 4) Écrire la 2<sup>ième</sup> loi de Newton pour chaque masse ( $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ )
- 5) Décomposer l'équation  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$  dans le système d'axe  $xy$ .
- 6) Résoudre le système d'équation.
- 7) Répondre à la question.





# Chapitre 2.2 – La force gravitationnelle

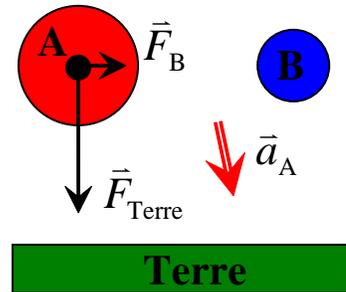
## La force gravitationnelle (le poids)

La **force gravitationnelle** est une interaction physique qui cause une **attraction** entre des **objets** ayant une **masse**. Tout objet ayant une masse est attiré grâce à la force gravitationnelle vers les autres masses. Cette force d'attraction s'effectue à distance.

Situation : Objet A situé près d'un objet B et de la surface de la Terre.

$\vec{F}_B$  : Force gravitationnelle résultant que **A** est attiré vers **B**.

$\vec{F}_{\text{Terre}}$  : Force gravitationnelle résultant que **A** est attiré vers la **Terre**.



Puisque la force gravitationnelle est une force très faible, il faut beaucoup de masse pour observer un effet observable. Ainsi, la force  $\vec{F}_B$  est négligeable. Habituellement, ce n'est que les astres (comme la Terre) qui applique une force gravitationnelle suffisamment imposante sur les objets pour être considérée dans une situation.

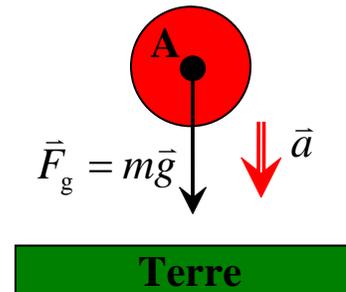
Voici la définition de la **force gravitationnelle** appliquée par un astre, une planète ou une étoile :

$$\vec{F}_g = m\vec{g}$$

où  $\vec{F}_g$  : Force gravitationnelle appliquée sur l'objet (N)

$m$  : Masse de l'objet qui subit la force (kg)

$\vec{g}$  : Accélération gravitationnelle que subit l'objet sous l'influence de l'astre en chute libre ( $\text{m/s}^2$ )



Preuve :

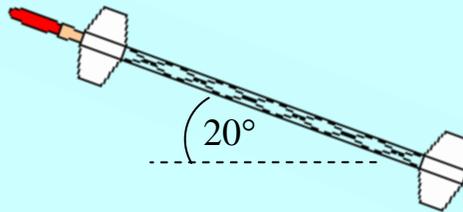
Supposons un objet subissant uniquement une force gravitationnelle appliquée par un astre. Alors, démontrons l'expression de la force gravitationnelle à l'aide de la 2<sup>ième</sup> loi de Newton et de l'accélération en chute libre à la surface de l'astre :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = m\vec{a} &\Rightarrow \vec{F}_g = m\vec{a} && \text{(Une seule force en jeu, } \vec{F}_g \text{)} \\ &\Rightarrow \vec{F}_g = m(-g\vec{j}) && \text{(Accélération en chute libre, } \vec{a} = -g\vec{j} \text{ (} a_y = -g \text{))} \\ &\Rightarrow \vec{F}_g = m\vec{g} \quad \blacksquare && \text{(Accélération gravitationnelle, } \vec{g} = -g\vec{j} \text{)} \end{aligned}$$

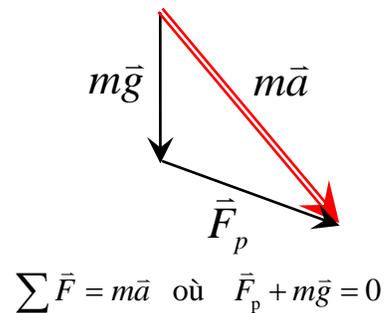
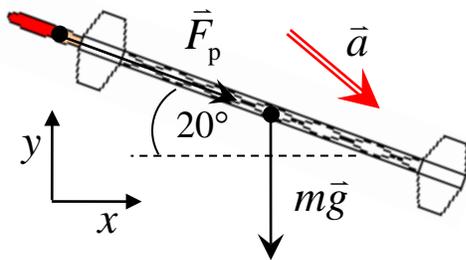
Remarque :

- La force gravitationnelle appliquée par une planète selon un système d'axe  $xy$  où  $y$  est positif vers le haut se décompose de la façon suivante :  $\vec{F}_g = m\vec{g} = -mg\vec{j}$
- La masse gravitationnelle (utilisée dans la force gravitationnelle) est égale à la masse d'inertie (utilisée dans la 2<sup>ième</sup> loi de Newton).

**Situation A : L'écrasement de l'Altair.** L'Altair est un vaisseau de  $8 \times 10^5$  kg qui est propulsé par un moteur qui exerce une force de  $2,4 \times 10^6$  N parallèlement au vaisseau. Pour des raisons toujours inconnues, l'Altair s'est écrasé à la surface de la lune ( $g = 1,6$  m/s<sup>2</sup>) avec un angle de  $20^\circ$  par rapport à la surface. On désire évaluer le module de l'accélération de l'Altair tout juste avant l'écrasement.



Voici le schéma des forces de la situation : Résolution de la 2<sup>e</sup> loi de Newton graphiquement :



Évaluons l'accélération en  $x$  et  $y$  à partir de la somme des forces appliquées sur l'Altair selon le système d'axe  $xy$  et de la 2<sup>ième</sup> loi de Newton :

$$\begin{aligned} \sum F_x = ma_x &\Rightarrow F_p \cos(20^\circ) = ma_x && \text{(Remplacer } \sum F_x \text{)} \\ &\Rightarrow (2,4 \times 10^6) \cos(20^\circ) = (8 \times 10^5) a_x && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ &\Rightarrow \boxed{a_x = 2,819 \text{ m/s}^2} && \text{(Évaluer } a_x \text{)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum F_y = ma_y &\Rightarrow -F_p \sin(20^\circ) - mg = ma_y && \text{(Remplacer } \sum F_y \text{)} \\ &\Rightarrow -(2,4 \times 10^6) \sin(20^\circ) - (8 \times 10^5)(1,6) = (8 \times 10^5) a_y && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ &\Rightarrow \boxed{a_y = -2,626 \text{ m/s}^2} && \text{(Évaluer } a_y \text{)} \end{aligned}$$

Évaluons le module de l'accélération :

$$\begin{aligned} a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} &\Rightarrow a = \sqrt{(2,819)^2 + (-2,626)^2} && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ &\Rightarrow \boxed{a = 3,853 \text{ m/s}^2} && \text{(Évaluer } a \text{)} \end{aligned}$$

# La gravitation universelle

La plus grande réalisation d'Isaac Newton fut d'unifier le concept de force gravitationnelle terrestre à celui de la force gravitationnelle céleste. À partir des trois lois de Kepler<sup>1</sup> obtenus expérimentalement par l'observation du mouvement des astres par Johannes Kepler en 1609 et 1618, Newton découvrit<sup>2</sup> en 1687 une expression plus générale à la force gravitationnelle ce qui lui a permis de démontrer théoriquement les lois de Kepler. Cette force était principalement fondée sur l'attraction à distance des masses.



Johannes Kepler  
(1571-1630)

Isaac Newton  
(1643-1727)

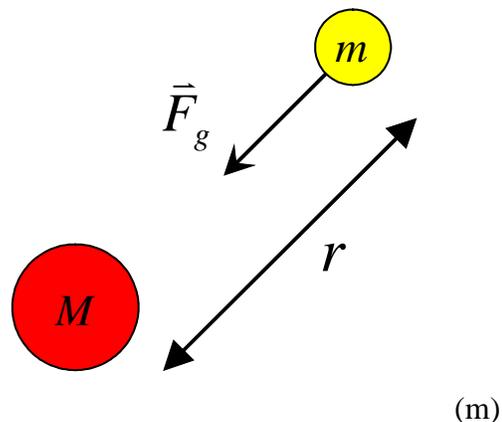
Voici les quatre constatations de Newton :

- 1)  $F_g \propto m$  : La force gravitationnelle sur Terre ( $\vec{F}_g = m\vec{g}$ ) est proportionnelle à la masse qui subit la force. Ceci devrait être valable également dans l'espace.
- 2)  $F_g \propto M$  : Puisque la force gravitationnelle est la conséquence de l'attraction des masses, alors la masse qui applique la force doit faire partie de l'expression de la force gravitationnelle.
- 3)  $F_g \propto 1/r^2$  : La trajectoire elliptique des astres autour du soleil à différentes vitesses dans l'espace impose une restriction au niveau de l'efficacité de la force gravitationnelle. Pour que le tout soit cohérent, il faut que la force gravitationnelle entre l'astre qui applique la force et l'astre qui subit la force diminue en fonction du carré de la distance.
- 4)  $F_g \propto G$  : Afin d'obtenir une équation ayant comme unité le newton<sup>3</sup>, le tout doit être multiplié par une constante de proportionnalité.

Voici l'expression scalaire de la force gravitationnelle :

$$F_g = G \frac{mM}{r^2}$$

- où
- $F_g$  : La force gravitationnelle d'attraction (N)
  - $G$  : Constante de la gravitation universelle  
( $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$ )
  - $m$  : Masse qui subit la force (kg)
  - $M$  : Masse qui applique la force (kg)
  - $r$  : Distance entre les deux masses  $M$  et  $m$



(m)

<sup>1</sup> Les trois lois de Kepler sont les suivantes : loi des orbites elliptiques, loi des aires et loi des périodes.

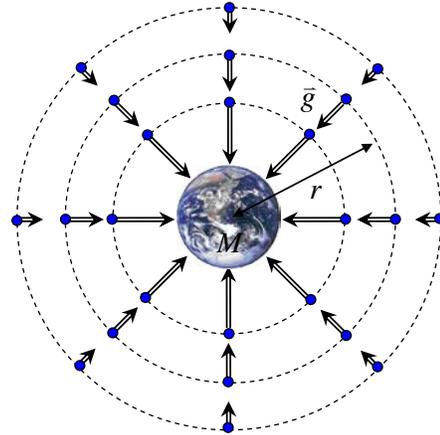
<sup>2</sup> Plusieurs historiens affirment que Newton avait pris connaissance des travaux de Robert Hooke au sujet du facteur  $1/r^2$  avant de publier son ouvrage sans y faire référence puisqu'il était en compétition avec lui.

<sup>3</sup> La constante  $G$  fut déterminée grâce aux résultats de l'expérience de Cavendish (pendule de torsion, 1793). À l'époque de Newton, la force gravitationnelle n'était pas évaluée en newton et la constante  $G$  était égale à 1.

## Le champ gravitationnel

En physique, un **champ** représente une **zone d'influence** dans l'espace susceptible d'appliquer une **force** à distance sur un objet. Puisque la force gravitationnelle est justement une force à distance, on peut définir un champ associé à la force gravitationnelle.

Tout objet ayant une masse  $M$  produit un champ gravitationnel autour de lui, car l'objet doit interagir gravitationnellement à distance avec des objets de masse  $m$  autour de lui. Le champ gravitationnel  $\vec{g}$  associé à une masse  $M$  est radial, orienté vers la masse  $M$  et diminue en fonction du carré de la distance  $r$  ( $g \propto 1/r^2$ ).

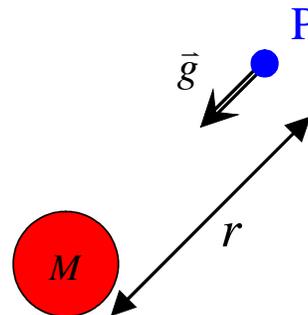


Mathématiquement, on utilise un vecteur pour représenter le module et l'orientation du champ gravitationnel  $\vec{g}$  en un point de l'espace.

Voici l'équation permettant d'évaluer le module du champ gravitationnel  $g$  produit par une masse  $M$  à un endroit P de l'espace situé à une distance  $r$  de la masse  $M$ . Cette équation s'applique uniquement pour les objets sphériques de masse volumique uniforme :

$$g = G \frac{M}{r^2}$$

- où
- $g$  : Le champ gravitationnel radial vers  $M$  (N/kg)
  - $G$  : Constante de la gravitation universelle  
( $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$ )
  - $M$  : Masse qui produit le champ gravitationnel (kg)
  - $r$  : Distance entre  $M$  et le point P (m)



Remarque : Évaluer le champ gravitationnel est équivalent à évaluer l'accélération en chute libre d'un objet à un endroit donné (champ  $g$  surface de la Terre : 9,8 N/kg).

### Preuve :

Évaluons l'expression du champ gravitationnel  $g$  à partir des deux expressions de la force gravitationnelle que nous avons.

$$F_g = mg \quad \Rightarrow \quad G \frac{mM}{r^2} = mg \quad \text{(Remplacer } F_g = G \frac{mM}{r^2} \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad g = G \frac{M}{r^2} \quad \blacksquare \quad \text{(Simplifier } m \text{)}$$

**Situation X : Albert sur Mars.** La masse d'Albert est égale à 90 kg. La masse de la planète Mars est égale à  $6,42 \times 10^{23}$  kg et son rayon est égal à 3397 km. On désire déterminer (a) la masse et (b) le poids d'Albert sur Mars. (On suppose que la planète Mars est sphérique et que sa masse volumique est uniforme)



Voici nos données de base :

- $m = 90$  kg (Masse qui subit la force)
- $M = 6,42 \times 10^{23}$  kg (Masse qui applique la force)
- $r = 3397 \times 10^3$  m (Distance entre le centre de la Mars et la surface)

Évaluons le champ gravitationnel à la surface de la planète Mars :

$$g = G \frac{M}{r^2} \Rightarrow g = (6,67 \times 10^{-11}) \frac{(6,42 \times 10^{23})}{(3397 \times 10^3)^2} \Rightarrow \boxed{g = 3,71 \text{ N/kg}}$$

(a) Puisque la masse est une caractéristique de l'objet qui subit la force, elle ne dépend pas de son environnement. Ainsi :

masse : 90 kg

(b) Le poids est le synonyme de la force gravitationnelle qui dépend du champ et de la masse qui subit la force. Ainsi :

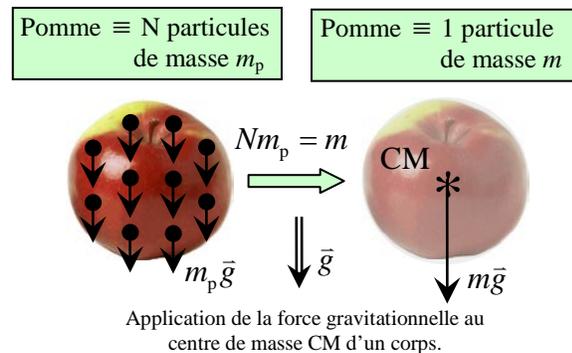
$$\text{le poids : } F_g = mg = (90)(3,71) = 333,9 \text{ N}$$

## La force gravitationnelle et le centre de masse

Lorsqu'un corps ne peut pas être considéré comme étant ponctuelle (comme dans le **chapitre 4 : Mécanique des corps**), il faut savoir où appliquer la force gravitationnelle sur le corps. La force gravitationnelle résultante est toujours appliquée sur un corps à la position du centre de masse (voir **chapitre 4.3 : Le centre de masse**).

Le **centre de masse** CM (symbole : \*) est un point de référence imaginaire situé à la **position moyenne** de la **masse** d'un corps. Dans un corps symétrique et homogène, le centre de masse est situé au centre géométrique du corps.

Si l'on considère un corps comme étant un regroupement de  $N$  particules de masse  $m_p$ , on peut étudier la dynamique de translation des  $N$  particules comme étant qu'une seule particule de masse  $m$  subissant une force gravitationnelle résultante appliquée au centre de masse du corps et calculer l'accélération de ce centre de masse par la 2<sup>ième</sup> loi de Newton.



# Les marées

Le phénomène des marées est une conséquence de la force gravitationnelle qu'applique la Lune sur la Terre. Bien que le phénomène des marées soit assez complexe à décrire, on peut le simplifier et le justifier par une différence de force gravitationnelle qu'applique la Lune aux deux extrémités de la Terre.

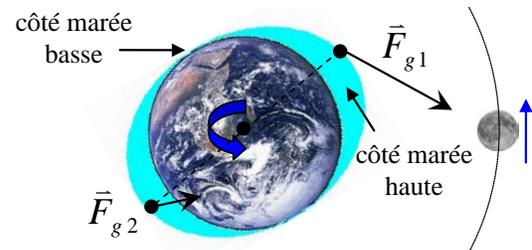


Port à marée basse



Route à marée haute

Cette différence de force gravitationnelle déforme les océans en forme d'ovale (sans Lune, la forme serait sphérique comme celle de la Terre). L'axe de l'ovale n'est pas aligné<sup>4</sup> sur l'axe Terre-Lune. Puisque la Terre tourne sur elle-même plus rapidement que la rotation de la Lune autour de la Terre, la rotation de la Terre provoque la rencontre de la marée haute et basse. Puisque la Terre n'effectue qu'un seul tour sur elle-même par jour, il y a donc deux marées complètes par jours, car il y a deux pointes à la forme ovale des océans.



Rotation de la Terre sur elle-même :  $\approx 24$  h

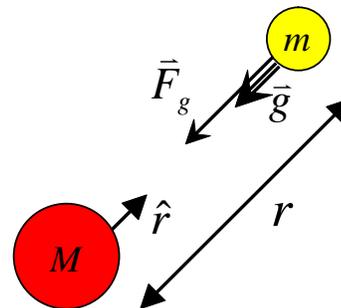
Rotation de la Lune autour de la Terre :  $\approx 27,3$  jours

## Force gravitationnelle sous forme vectorielle

Puisque la force gravitationnelle est une force radiale d'attraction. On peut la représenter vectoriellement à l'aide du vecteur unitaire radial  $\hat{r}$  désignant l'orientation radiale de la force. On introduit un signe négatif afin de représenter la nature attractive de la force :

Force gravitationnelle avec champ $\vec{g}$	Champ gravitationnelle	Force gravitationnelle générale
$\vec{F}_g = m\vec{g}$	$\vec{g} = -G \frac{M}{r^2} \hat{r}$	$\vec{F}_g = -G \frac{mM}{r^2} \hat{r}$

- où  $\vec{F}_g$  : Force gravitationnelle subit par  $m$  (N)
- $\vec{g}$  : Champ gravitationnel produit par  $M$  (N/kg)
- $M$  : Masse qui produit le champ gravitationnel (kg)
- $m$  : Masse qui subit l'influence du champ gravitationnel (kg)
- $G$  : Constante de la gravitation universelle ( $6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2 / \text{kg}^2$ )
- $\hat{r}$  : Vecteur unitaire de  $M$  (source) à  $m$  (cible)



**Rappel :**  $\hat{r}$   $\Rightarrow$  orientation du champ gravitationnel  
 signe négatif  $\Rightarrow$  champ gravitationnel attractif

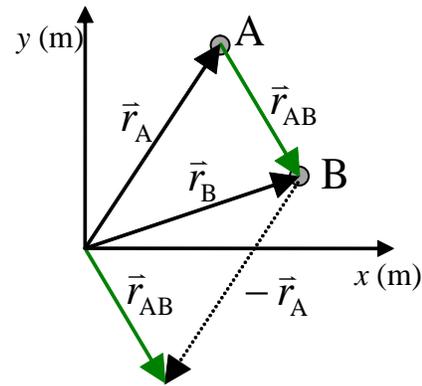
<sup>4</sup> L'axe n'est pas aligné en raison du frottement des marées.  
 Référence : Marc Séguin, Physique XXI Tome A  
 Note de cours rédigée par Simon Vézina

## Le vecteur déplacement à partir de deux positions

Un vecteur déplacement  $\vec{r}_{AB}$  pour passer d'une coordonnée A à une coordonnée B peut être évalué à partir de deux vecteurs positions  $\vec{r}_A$  et  $\vec{r}_B$ . Le module de  $\vec{r}_{AB}$  permet d'obtenir la distance  $r_{AB}$  entre les deux coordonnées et l'orientation de  $\vec{r}_{AB}$  ce vecteur permet d'obtenir le sens du déplacement  $\hat{r}_{AB}$  :

$$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

- où  $\vec{r}_{AB}$  : Vecteur déplacement pour passer de la coordonnée A à B.  
 $\vec{r}_A$  : Vecteur position de la coordonnée A.  
 $\vec{r}_B$  : Vecteur position de la coordonnée B.

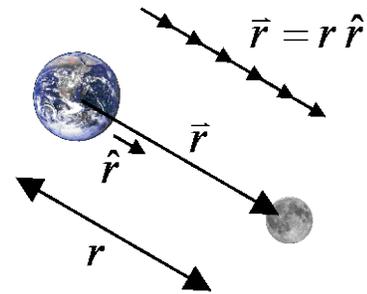


## Le vecteur orientation $\hat{r}$

Le vecteur orientation  $\hat{r}$  permet d'obtenir le sens d'un déplacement sans considérer le module de celui-ci. Il est important de ne pas confondre ce vecteur avec la notion de déplacement  $\vec{r}$  et de distance  $r$ . Cependant, toutes ces notions sont reliées mathématiquement par l'équation suivante :

$$\hat{r} = \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{et} \quad \vec{r} = r \hat{r}$$

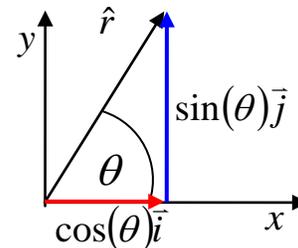
- où  $\hat{r}$  : Vecteur unitaire orientation.  
 $\vec{r}$  : Vecteur déplacement entre deux coordonnées.  
 $r$  : Distance entre deux points ( $r = |\vec{r}|$ ).



Dans un système d'axe  $xy$ , le vecteur unitaire  $\hat{r}$  peut être décomposé de la façon suivante :

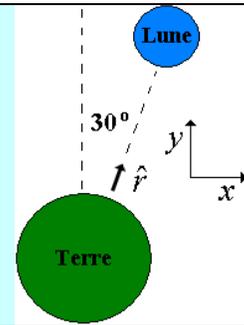
$$\hat{r} = \cos(\theta)\vec{i} + \sin(\theta)\vec{j}$$

- où  $\theta$  : Angle entre le vecteur  $\hat{r}$  et l'axe  $x$



**Situation A : Force gravitationnelle sous forme vectorielle.**

Dans un plan cartésien  $xy$ , la Lune est positionnée par rapport à la Terre à un angle de  $-30^\circ$  par rapport à l'axe  $y$  tel qu'illustré sur le schéma ci-contre. On désire évaluer (a) la force gravitationnelle sous forme vectorielle appliquée par la Terre sur la Lune et (b) le module du champ gravitationnel à l'endroit où la lune est située.



Voici quelques données importantes :

$$m_{\text{Terre}} = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}, \quad m_{\text{Lune}} = 7,36 \times 10^{22} \text{ kg}, \quad r_{\text{Terre-Lune}} = 3,84 \times 10^8 \text{ m}$$

Voici les termes de l'équation générale à définir :

$$M = m_{\text{Terre}} \quad m = m_{\text{Lune}} \quad r = r_{\text{Terre-Lune}}$$

Considérons la Terre à l'origine du système d'axe  $xy$ . Ainsi, on peut facilement évaluer le vecteur unitaire  $\hat{r}$  désignant l'orientation de la force gravitationnelle :

$$\hat{r} = \sin(30^\circ) \vec{i} + \cos(30^\circ) \vec{j}$$

Évaluons le champ gravitationnel produit par la Terre sur la Lune :

$$\begin{aligned} \vec{g} &= -G \frac{M}{r^2} \hat{r} \Rightarrow \vec{g} = -\left(6,67 \times 10^{-11}\right) \frac{\left(5,98 \times 10^{24}\right)}{\left(3,84 \times 10^8\right)^2} \left(\sin(30^\circ) \vec{i} + \cos(30^\circ) \vec{j}\right) \\ &\Rightarrow \vec{g} = -2,7 \times 10^{-3} \left(\sin(30^\circ) \vec{i} + \cos(30^\circ) \vec{j}\right) \\ &\Rightarrow \boxed{\vec{g} = \left(-1,35 \vec{i} - 2,34 \vec{j}\right) \times 10^{-3} \text{ N/kg}} \end{aligned}$$

Évaluons la force gravitationnelle appliquée par la Terre sur la Lune :

$$\begin{aligned} \vec{F}_g &= m \vec{g} \Rightarrow \vec{F}_g = \left(7,36 \times 10^{22}\right) \left(-1,35 \vec{i} - 2,34 \vec{j}\right) \times 10^{-3} \\ &\Rightarrow \boxed{\vec{F}_g = \left(-0,99 \vec{i} - 1,72 \vec{j}\right) \times 10^{20} \text{ N}} \quad \text{(a)} \end{aligned}$$

Évaluons le module du champ gravitationnel produit par la Terre à l'endroit de la lune :

$$\begin{aligned} g &= |\vec{g}| \Rightarrow g = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} \quad \text{(Module d'un vecteur)} \\ &\Rightarrow g = \sqrt{\left(-1,35 \times 10^{-3}\right)^2 + \left(-2,34 \times 10^{-3}\right)^2} \\ &\Rightarrow \boxed{g = 2,70 \times 10^{-3} \text{ N/kg}} \quad \text{(b)} \end{aligned}$$

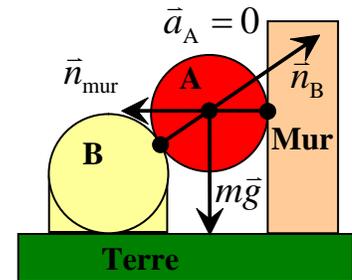
# Chapitre 2.3a – Les forces de contact

## La force normale

La **force normale** est la force exercée par une **surface** sur un objet en **contact** avec elle **empêchant** ceux-ci de **s'interpénétrer**. La surface, jouant le rôle de support ou d'appui, applique une **force de poussée** toujours **perpendiculaire à la surface**. Lorsque l'objet n'est plus en contact avec la surface, celle-ci n'applique plus de force normale.

La force normale résulte du fait que les atomes contenus dans un objet repoussent les atomes d'un autre objet lorsque ceux-ci sont très près. Cette force est de **nature électrique**.

Il est important de préciser que la force normale ne peut **pas être évaluée** à l'aide d'une **formule directement**, car elle dépend de la situation. Ainsi, la force normale pourra seulement être évaluée à l'aide de la **2<sup>e</sup> loi de Newton**.



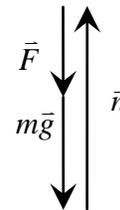
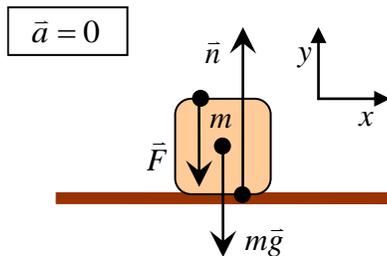
En raison de la géométrie sphérique de l'objet A, toutes les normales sont orientées vers son centre.

Symbole :  $\vec{n}$

Unité SI (newton) :  $[\vec{n}] = \text{N}$

**Situation A : Un bloc appuyé contre une planche.** Un bloc de 5 kg repose contre une planche de bois horizontale. Albert pousse avec une force de 20 N verticalement vers le bas sur le bloc. On désire évaluer la force normale qu'applique la planche de bois sur le bloc.

Voici le schéma des forces de la situation : Résolution de la 2<sup>e</sup> loi de Newton graphiquement :



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{où} \quad \vec{F} + m\vec{g} + \vec{n} = 0$$

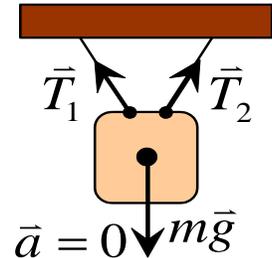
Évaluons la force normale à l'aide de la 2<sup>e</sup> loi de Newton :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = m\vec{a} &\Rightarrow \vec{F} + m\vec{g} + \vec{n} = m\vec{a} && \text{(Remplacer } \sum \vec{F} \text{)} \\ &\Rightarrow \vec{F} + m\vec{g} + \vec{n} = 0 && \text{(Bloc à l'équilibre, donc } \vec{a} = 0 \text{)} \\ &\Rightarrow -F - mg + n = 0 && \text{(Décomposition des forces en y)} \\ &\Rightarrow n = F + mg && \text{(Isoler } n \text{)} \\ &\Rightarrow n = (20) + (5)(9,8) && \text{(Remplacer valeurs numériques)} \\ &\Rightarrow \boxed{n = 69 \text{ N}} && \text{(Évaluer } n \text{)} \end{aligned}$$

## La tension

La **tension** est le nom que porte la force appliquée par une **corde** sur un objet. Une corde ne peut **pas pousser** un objet, car elle n'est pas rigide (ce n'est pas une tige). Pour qu'elle puisse appliquer une force de tension, la **corde** doit être **tendue**. L'**orientation** de la tension est toujours **parallèle** à la **corde** et orienté vers **l'extérieur de l'objet** afin de tirer sur l'objet.

Comme dans le cas de la force normale, la tension ne peut **pas être évaluée** à l'aide d'une **formule directement**, car elle dépend de la situation. La tension pourra seulement être évaluée à l'aide de la **2<sup>e</sup> loi de Newton**. Lorsqu'un la tension doit dépasser une valeur critique pour satisfaire la situation en jeu, la corde peut alors briser.



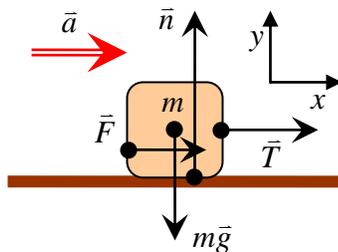
Dans le corps humain, les **muscles** jouent le rôle de **force de tension**, car ils se comportent comme des cordes (on ne peut pas pousser avec un muscle).

Symbole :  $\vec{T}$

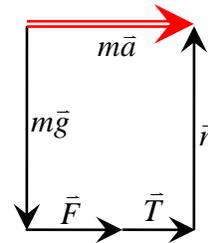
Unité SI (newton) :  $[\vec{T}] = \text{N}$

**Situation B : Quand on est deux, ça va deux fois mieux.** Un bloc de 50 kg est déposé sur une surface horizontale sans frottement. Lorsqu'Albert pousse horizontalement sur le bloc avec une force de 10 N et que Béatrice tire le bloc à l'aide d'une corde, le bloc accélère au rythme de 0,3 m/s<sup>2</sup>. On désire évaluer la tension appliquée par la corde sur le bloc.

Voici le schéma des forces de la situation :



Résolution de la 2<sup>e</sup> loi de Newton graphiquement :

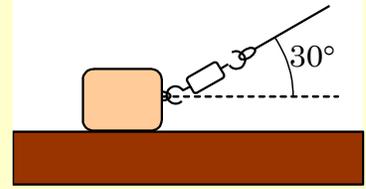


$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{où} \quad \vec{F} + \vec{T} + m\vec{g} + \vec{n} = m\vec{a}$$

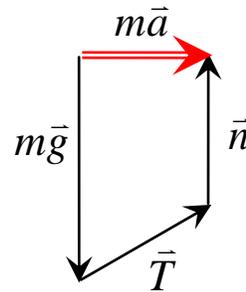
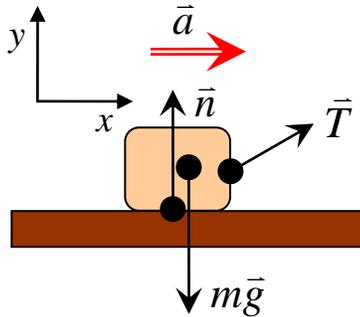
Évaluons la tension à l'aide de la 2<sup>e</sup> loi de Newton selon l'axe  $x$  :

$$\begin{aligned} \sum F_x = ma_x &\Rightarrow F + T = ma_x && \text{(Remplacer } \sum F_x \text{)} \\ &\Rightarrow F + T = m(+a) && \text{(Bloc accélère, donc } a_x = +a \text{ où } a = 0,3 \text{ m/s}^2\text{)} \\ &\Rightarrow T = ma - F && \text{(Isoler } T\text{)} \\ &\Rightarrow T = (50)(0,3) - (10) && \text{(Remplacer valeurs numériques)} \\ &\Rightarrow \boxed{T = 5 \text{ N}} && \text{(Évaluer } T\text{)} \end{aligned}$$

**Situation 4 : Un bloc sur un plan horizontal sans frottement.** Sur une surface horizontale sans frottement, on tire sur un bloc de 2 kg avec une corde orientée à  $\theta = 30^\circ$  par rapport à l'horizontale. Un dynamomètre placé entre la corde et le bloc indique 4 N. On désire déterminer le module de la force normale exercée par la surface sur le bloc ainsi que l'accélération du bloc



Voici le schéma des forces de la situation : Résolution de la 2<sup>e</sup> loi de Newton graphiquement :



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{où} \quad \vec{T} + m\vec{g} + \vec{n} = m\vec{a}$$

Développons notre 2<sup>e</sup> loi de Newton selon l'axe  $x$  afin d'obtenir l'accélération  $a_x$  du bloc :

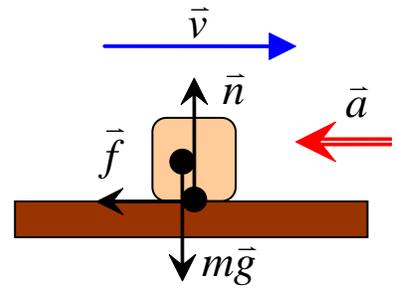
$$\begin{aligned} \sum F_x = ma_x &\Rightarrow T \cos(30^\circ) = ma_x && \text{(Remplacer } \sum F_x \text{)} \\ &\Rightarrow a_x = \frac{T \cos(30^\circ)}{m} && \text{(Isoler } a_x \text{)} \\ &\Rightarrow a_x = \frac{(4)\cos(30^\circ)}{(2)} && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ &\Rightarrow \boxed{a_x = 1,73 \text{ m/s}^2} && \text{(Évaluer } a_x \text{)} \end{aligned}$$

Développons notre 2<sup>e</sup> loi de Newton selon l'axe  $y$  afin d'obtenir la normale  $n$  appliquée par le sol sur le bloc :

$$\begin{aligned} \sum F_y = ma_y &\Rightarrow n - mg + T \sin(30^\circ) = ma_y && \text{(Remplacer } \sum F_y \text{)} \\ &\Rightarrow n - mg + T \sin(30^\circ) = 0 && \text{(Remplacer } a_y = 0 \text{)} \\ &\Rightarrow n = mg - T \sin(30^\circ) && \text{(Isoler } n \text{)} \\ &\Rightarrow n = (2)(9,8) - (4)\sin(30^\circ) && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ &\Rightarrow \boxed{n = 17,6 \text{ N}} && \text{(Évaluer } n \text{)} \end{aligned}$$

# La force de frottement exercée par une surface

Le **frottement de surface** est la force exercée par une **surface** sur un objet qui tend à **s'opposer** au **glissement** de l'objet sur la surface. La surface, jouant le rôle de friction, applique une **force** toujours **parallèle** à la **surface** dans le **sens opposé** au **mouvement relatif** de l'objet **par rapport** à la **surface**. Lorsque l'objet n'est plus en contact avec la surface, celle-ci n'applique plus de force de frottement.



Nous allons exploiter deux méthodes pour évaluer le module de la force de frottement :

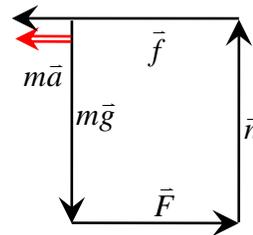
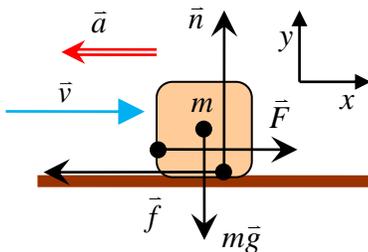
- 1) Utiliser la 2<sup>e</sup> loi de Newton.
- 2) Utiliser le modèle simplifié du frottement (voir **chapitre 2.5** :  $f = \mu n$ ).

Symbole :  $\vec{f}$

Unité SI (newton) :  $[\vec{f}] = \text{N}$

**Situation C : Frotter et décélérer.** Albert pousse horizontalement sur un bloc de 20 kg avec une force de 40 N et le bloc décélère à un rythme de 0,2 m/s<sup>2</sup> en raison du frottement de contact avec le sol. On désire évaluer le module de la force de frottement qu'exerce le sol sur le bloc.

Voici le schéma des forces de la situation : Résolution de la 2<sup>e</sup> loi de Newton graphiquement :



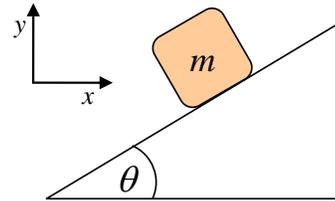
$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{où} \quad \vec{F} + m\vec{g} + \vec{n} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Évaluons le module du frottement à l'aide de la 2<sup>e</sup> loi de Newton selon l'axe  $x$  :

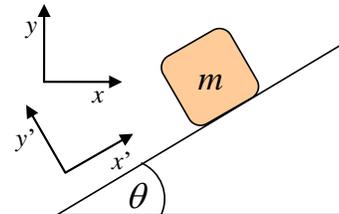
$$\begin{aligned} \sum F_x = ma_x &\Rightarrow F - f = ma_x && \text{(Remplacer } \sum F_x \text{)} \\ &\Rightarrow F - f = m(-a) && \text{(Bloc décélère, donc } a_x = -a \text{ où } a = 0,2 \text{ m/s}^2 \text{)} \\ &\Rightarrow f = F + ma && \text{(Isoler } f \text{)} \\ &\Rightarrow f = (40) + (20)(0,2) && \text{(Remplacer valeurs numériques)} \\ &\Rightarrow \boxed{f = 44 \text{ N}} && \text{(Évaluer } f \text{)} \end{aligned}$$

## La géométrie du plan incliné

Le plan incliné est un problème de physique ayant une géométrie particulière, car un objet qui glisse sur celui-ci n'effectue pas un mouvement purement horizontal ou purement vertical. Dans les faits, le mouvement est une combinaison des deux mouvements précédents.



Pour simplifier les mathématiques, il est préférable de définir un axe parallèle au plan incliné et un axe perpendiculaire au plan. Cependant, ce nouveau choix d'axe implique une décomposition des forces verticales (comme la force gravitationnelle).



Voici la décomposition selon l'axe  $x'$  et  $y'$  de la force gravitationnelle :

$$m\vec{g} \text{ en } x' : -mg \sin(\theta)$$

$$m\vec{g} \text{ en } y' : -mg \cos(\theta)$$

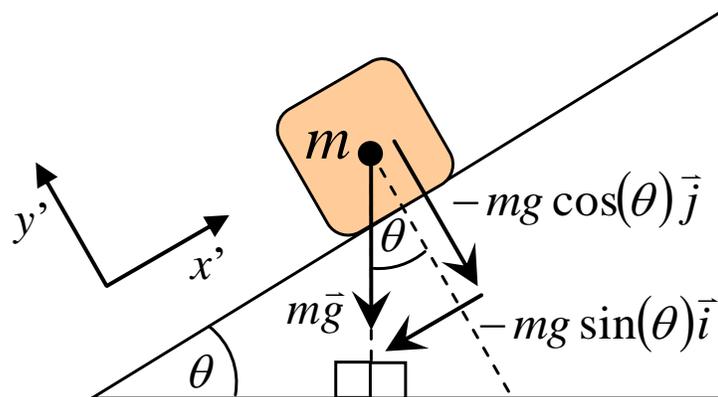
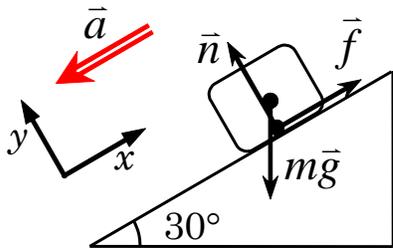


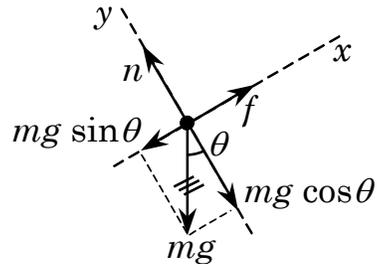
Schéma des forces	Avantage	Inconvénient
<p>(Situation où <math>mg \sin(\theta) &gt; f</math>)</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ Pas besoin de décomposer la force de frottement de contact <math>\vec{f}</math>.</li> <li>➤ Pas besoin de décomposer la force normale <math>\vec{n}</math>.</li> <li>➤ Pas besoin de décomposer l'accélération <math>\vec{a}</math>.</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>➤ La force gravitationnelle <math>m\vec{g}</math> doit être décomposée en <math>x'</math> et en <math>y'</math>.</li> </ul>

**Situation 6 : Un bloc sur un plan incliné avec frottement.** On dépose un bloc de 2 kg sur un plan incliné à 30° par rapport à l'horizontale. Le module de la force de frottement qui s'exerce sur le bloc est égal à 6 N. On désire déterminer l'accélération du bloc (grandeur et orientation).

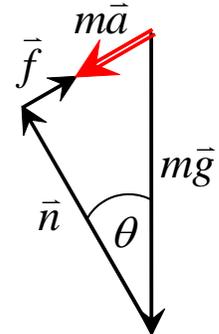
Voici le schéma des forces de la situation :



Décomposition des forces selon l'axe  $x$  et  $y$  :



Résolution de la 2<sup>e</sup> loi de Newton graphiquement :



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\text{où } m\vec{g} + \vec{n} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Développons notre 2<sup>e</sup> loi de Newton selon l'axe  $x$  afin d'obtenir l'accélération  $a_x$  du bloc :

$$\begin{aligned} \sum F_x = ma_x &\Rightarrow f - mg \sin(\theta) = ma_x && \text{(Remplacer } \sum F_x \text{)} \\ &\Rightarrow a_x = \frac{f - mg \sin(\theta)}{m} && \text{(Isoler } a_x \text{)} \\ &\Rightarrow a_x = \frac{(6) - (2)(9,8)\sin((30^\circ))}{(2)} && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ &\Rightarrow \boxed{a_x = -1,9 \text{ m/s}^2} && \text{(Évaluer } a_x \text{)} \end{aligned}$$

Le bloc accélère à un rythme de **1,9 m/s<sup>2</sup>** le long du plan incliné **vers la gauche** (qui est dans le sens négatif de l'axe  $x$ ).

**P.S.** Pour obtenir la normale à la surface  $n$ , nous devrions résoudre la 2<sup>e</sup> loi de Newton selon l'axe  $y$  tel que

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow n - mg \cos(\theta) = 0 \quad \text{où } a_y = 0 .$$





# Chapitre 2.3b – La loi de Hooke

## Le ressort idéal

En 1676, Robert Hooke (physicien anglais) établit un lien entre la déformation d'un objet et la volonté de l'objet à revenir à son état naturel (non déformé). Pour ce faire, l'objet déformé doit appliquer une force sur son environnement qui le contraint à épouser une forme non stable. Dans le cas du ressort idéal, élasticité et linéaire, Hooke réalise qu'un ressort étiré ou comprimé applique une force proportionnelle à l'étirement ou à la compression du ressort. Cette force est alors appliquée sur les deux extrémités où le ressort est fixé. Lorsque le ressort possède sa longueur naturelle, il n'applique aucune force.



Robert Hooke  
(1635-1703)

Pour un **ressort idéal** de **masse négligeable**, la force  $F_r$  appliquée par le ressort est égale à l'étirement ou à la compression  $e$  du ressort multiplié par la constante du ressort  $k$  (constante de Hooke):

$$F_r = ke$$

- où
- $F_r$  : Force appliquée par le ressort (N)
  - $k$  : Constante de rappel du ressort (N/m)
  - $e$  : Module de l'étirement ou de la compression du ressort (m)



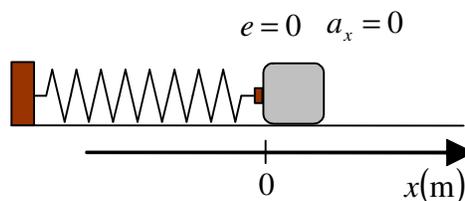
Ressort pour suspension de voiture.

## Les trois comportements du ressort

Le ressort peut appliquer aucune force, pousser ou tirer sur un objet en contact avec lui :

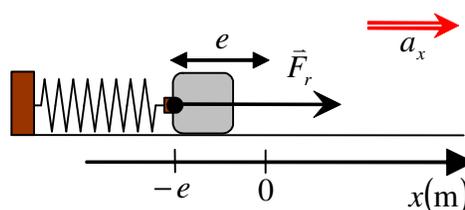
- 1) Lorsque le ressort possède sa longueur naturelle

⇒ le ressort n'applique pas force



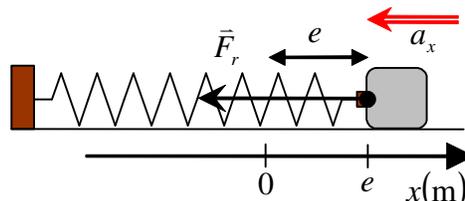
- 2) Lorsque le ressort est comprimé

⇒ le ressort pousse



- 3) Lorsque le ressort est étiré

⇒ le ressort tire



## La définition vectorielle de la force du ressort

La force d'un ressort idéal peut être définie vectoriellement à l'aide du vecteur déformation  $\vec{e}$  qui représente l'étirement ou la compression du ressort. Ce vecteur possède comme origine la position d'équilibre du ressort. On peut également utiliser l'axe  $x$  pour désigner la déformation du ressort. Si l'équilibre est atteint à  $x = 0$  lorsque  $e = 0$ , on peut faire l'association  $e = x$  :

Forme vectorielle	Forme selon l'axe $x$ (équilibre à $x = 0$ )
$\vec{F}_r = -k\vec{e}$	$F_r = -kx$

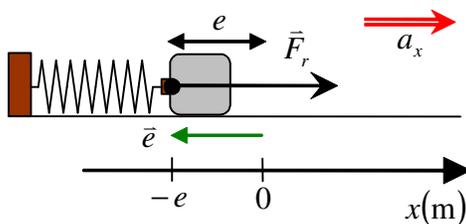
où  $\vec{F}_r$  : Force appliquée par le ressort (N)

$k$  : Constante de rappel du ressort (N/m)

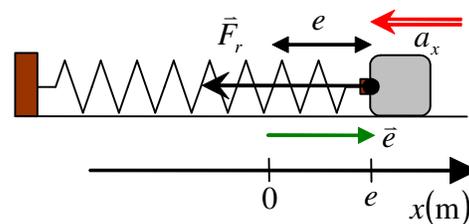
$\vec{e}$  : Vecteur étirement ou compression du ressort (m)

$x$  : Position de l'extrémité libre du ressort,  $x = 0$  est à la position d'équilibre (m)

Compression du ressort :



Étirement du ressort :

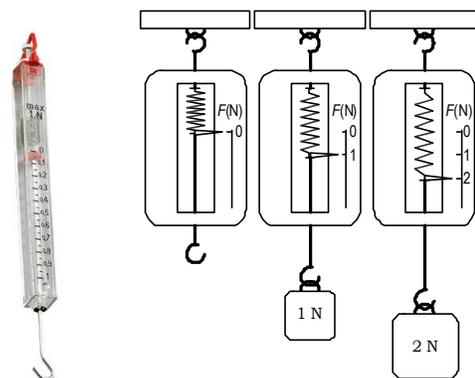


## Le dynamomètre

Le **dynamomètre** est un outil qui permet de **mesurer** une **force appliquée** sur un objet à l'aide de la déformation d'un ressort.

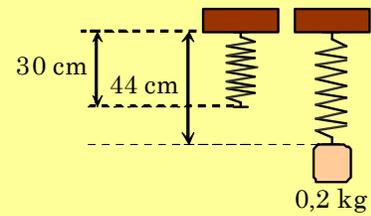
Puisque la déformation d'un ressort idéal est linéaire, alors la graduation sur le dynamomètre est linéaire (on double l'étirement, alors on double la force). On peut ainsi mesurer l'augmentation de la force appliquée par le dynamomètre  $\Delta F_r$ , par son augmentation de longueur  $\Delta e$  :

$$\Delta F_r = k \Delta e$$

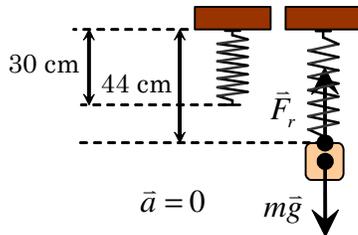


Dans cet exemple, la constante  $k = 1 \text{ N/m}$ . Puisque la force augmente de 1 N, alors l'étirement du ressort augmente de 1 m.

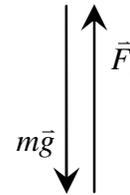
**Situation 1 : Un ressort idéal.** Un ressort idéal accroché au plafond possède une longueur naturelle de 30 cm. Lorsqu'un bloc de 0,2 kg est suspendu à son extrémité, sa longueur est de 44 cm (voir schéma ci-contre). On désire déterminer **(a)** la constante de rappel du ressort et **(b)** prévoir sa longueur lorsqu'on accroche un bloc de 0,5 kg à son extrémité.



Voici le schéma des forces de la situation :



Résolution de la 2<sup>e</sup> loi de Newton graphiquement :



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{où} \quad \vec{F}_r + m\vec{g} = 0$$

Évaluons la constante du ressort à l'aide de la 2<sup>e</sup> loi de Newton appliquée sur la masse  $m = 0,2 \text{ kg}$  :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = m\vec{a} &\Rightarrow \vec{F}_r + m\vec{g} = m\vec{a} && \text{(Remplacer } \sum \vec{F} \text{)} \\ &\Rightarrow \vec{F}_r + m\vec{g} = 0 && \text{(Remplacer } \vec{a} = 0 \text{)} \\ &\Rightarrow F_r - mg = 0 && \text{(Décomposition des forces en y)} \\ &\Rightarrow F_r = mg && \text{(Isoler } F_r \text{)} \\ &\Rightarrow ke = mg && \text{(Remplacer } F_r = ke \text{)} \\ &\Rightarrow k = \frac{mg}{e} && \text{(Isoler } k \text{)} \\ &\Rightarrow k = \frac{(0,2)(9,8)}{(0,44 - 0,30)} && \text{(Remplacer valeurs numériques)} \\ &\Rightarrow \boxed{k = 14 \text{ N/m}} && \text{(a) (Évaluer } k \text{)} \end{aligned}$$

Pour évaluer la longueur du ressort lorsque l'on accroche un bloc  $m = 0,5 \text{ kg}$ , appliquons à nouveau la 2<sup>e</sup> loi de Newton sur la masse en utilisant la constante de rappel  $k = 14 \text{ N/m}$  :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = m\vec{a} &\Rightarrow \vec{F}_r + m\vec{g} = m\vec{a} && \text{(Remplacer } \sum \vec{F} \text{)} \\ &\Rightarrow \vec{F}_r + m\vec{g} = 0 && \text{(Remplacer } \vec{a} = 0 \text{)} \\ &\Rightarrow F_r - mg = 0 && \text{(Décomposition des forces en y)} \\ &\Rightarrow F_r = mg && \text{(Isoler } F_r \text{)} \\ &\Rightarrow ke = mg && \text{(Remplacer } F_r = ke \text{)} \\ &\Rightarrow e = \frac{mg}{k} && \text{(Isoler } e \text{)} \\ &\Rightarrow e = \frac{(0,5)(9,8)}{(14)} && \text{(Remplacer valeurs numériques)} \\ &\Rightarrow \boxed{e = 0,35 \text{ m}} && \text{(Évaluer } e \text{)} \end{aligned}$$

Pour évaluer la longueur du ressort, utilisons l'équation  $L = L_0 \pm e$  en utilisant le signe positif pour l'étirement :

$$\begin{aligned} L = L_0 \pm e &\Rightarrow L = L_0 + e && \text{(Équation en étirement)} \\ &\Rightarrow L = (30 \text{ cm}) + (35 \text{ cm}) && \text{(Remplacer valeurs numériques)} \\ &\Rightarrow \boxed{L = 65 \text{ cm}} && \text{(b)} \end{aligned}$$

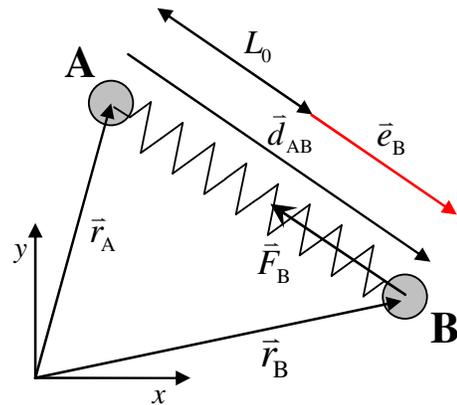
## La force du ressort avec deux particules (complément informatique)

La force  $\vec{F}_B$  qu'un ressort applique sur une particule **B** lorsque le ressort est relié à deux particules **A** et **B** dépend de l'étirement  $\vec{e}_B$  du ressort selon la particule **B** et de la longueur naturelle  $L_0$  du ressort :

$$\vec{F}_B = -k \vec{e}_B$$

tel que 
$$\vec{e}_B = \vec{d}_{AB} \left( 1 - \frac{L_0}{|\vec{d}_{AB}|} \right)$$

et 
$$\vec{d}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$



où  $\vec{F}_B$  : Force qu'exerce le ressort sur la particule **B** (N).

$\vec{e}_B$  : Vecteur déformation du ressort selon **B** (m).

$k$  : Constante du ressort (N/m).

$L_0$  : Longueur naturelle du ressort (m).

$\vec{d}_{AB}$  : Déplacement de la particule **A** et **B** ce qui donne la longueur du ressort (m).

$\vec{r}_A$  : Position de la particule **A** (m).

$\vec{r}_B$  : Position de la particule **B** (m).

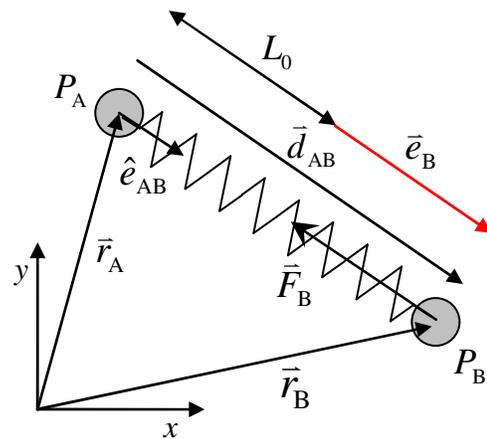
### Preuve :

Considérons les deux particules  $P_A$  et  $P_B$  situés aux vecteurs positions  $\vec{r}_A$  et  $\vec{r}_B$ . Le vecteur déplacement pour passer de la particule  $P_A$  à la particule  $P_B$  se calcul grâce à l'équation

$$\vec{d}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A.$$

L'orientation du vecteur étirement  $\hat{e}_{AB}$  du ressort selon la particule  $P_B$  sera dans la direction du vecteur déplacement  $\vec{d}_{AB}$  et peut être évalué par le calcul

$$\hat{e}_{AB} = \frac{\vec{d}_{AB}}{|\vec{d}_{AB}|}.$$



Pour obtenir le vecteur déformation du ressort  $\vec{e}_B$  selon la particule  $P_B$ , nous pouvons soustraire la longueur naturelle  $L_0$  du ressort au vecteur déplacement  $\vec{d}_{AB}$  par le calcul

$$\vec{e}_B = \vec{d}_{AB} - L_0 \hat{e}_{AB}.$$

En développant l'expression de  $\vec{e}_B$ , nous obtenons :

$$\vec{e}_B = \vec{d}_{AB} - L_0 \hat{e}_{AB} \quad \Rightarrow \quad \vec{e}_B = \vec{d}_{AB} - L_0 \left( \frac{\vec{d}_{AB}}{|\vec{d}_{AB}|} \right) \quad (\text{Remplacer } \hat{e}_{AB} = \frac{\vec{d}_{AB}}{|\vec{d}_{AB}|})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{e}_B = \vec{d}_{AB} \left( 1 - \frac{L_0}{|\vec{d}_{AB}|} \right) \quad (\text{Factoriser } \vec{d}_{AB})$$

Ainsi, on obtient la force que le ressort applique sur la particule  $P_B$  par l'équation

$$\vec{F}_B = -k \vec{e}_B . \quad \blacksquare$$





# Chapitre 2.4 – La réciprocité des forces

## Notation sur les forces

En physique, il faut toujours identifier qui applique la force (la source d'une action) et qui subit la force (la cible d'une action).

Ex : La pomme tombe au sol.

- Source de la force gravitationnelle : La Terre
- La cible de la force gravitationnelle : La pomme



Pomme qui tombe sous l'effet de la gravité terrestre

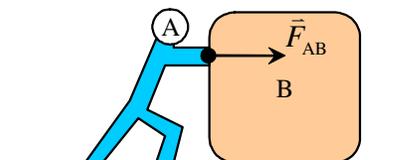
Utilisons la notation suivante afin préciser qui applique la force et qui subit la force :

$$\vec{F}_{AB} \equiv \vec{F}_{A \text{ applique force sur B}}$$

où  $\vec{F}_{AB}$  : Force que l'objet A applique sur l'objet B (N).

A : Lettre désignant une référence à l'objet A.

B : Lettre désignant une référence à l'objet B.



## Le principe d'action-réaction (3<sup>e</sup> loi de Newton)

La troisième loi de Newton (action-réaction) s'énonce de la façon suivante :

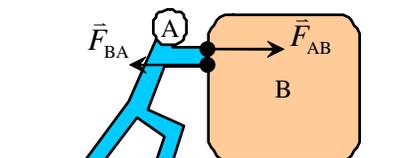
*Lorsqu'un objet A applique une force sur un objet B, l'objet A va subir également une force de même module, mais dans la direction opposée. Cette force sera appliquée par l'objet B.*

Mathématiquement, nous pouvons résumer la 3<sup>e</sup> loi de Newton de la façon suivante :

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$$

où  $\vec{F}_{AB}$  : Force que l'objet A applique sur l'objet B (N).

$\vec{F}_{BA}$  : Force que l'objet B applique sur l'objet A (N).



À chaque fois que l'on fait un bilan de force sur un objet A et un objet B, toutes les forces concernant ces deux objets se retrouveront en paire que l'on nomme « paire action-réaction ». Ils sont facilement identifiables, car ils portent le même nom d'identification et les indices de source et cible sont inversés (ex :  $\vec{n}_{AB}$  et  $\vec{n}_{BA}$ ). Dans l'exemple précédent, les forces  $\vec{F}_{AB}$  et  $\vec{F}_{BA}$  forment une paire « action-réaction ».

## La bande d'une patinoire

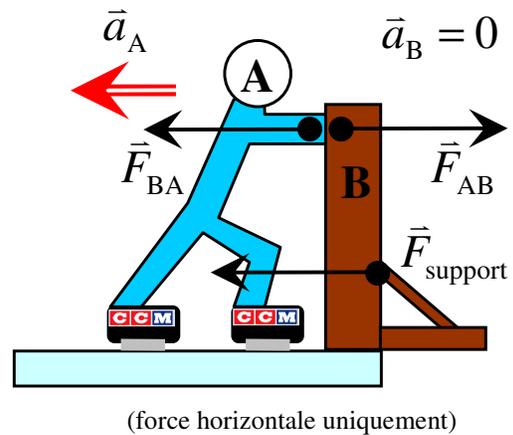
Afin d'illustrer la pertinence de la 3<sup>e</sup> loi de Newton, analysons la situation suivante :

### Situation :

Un patineur est immobile face à une bande de patinoire. Il applique une force de poussée sur la bande et il se met à reculer.

### Question :

Quelle force permet au patineur de subir une accélération ?



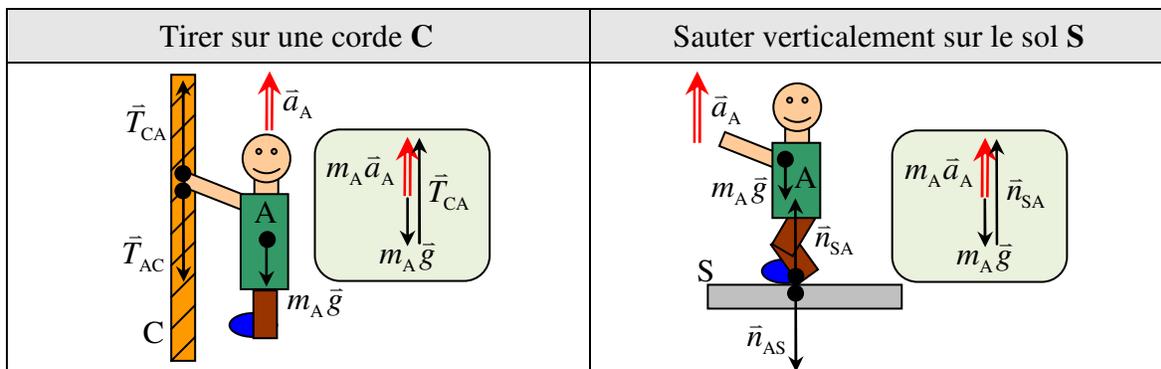
### Explication :

- 1) Si le patineur passe du repos à un état de mouvement  $\Rightarrow$  il y a une **accélération**.
- 2) Selon  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ , si le patineur accélère  $\Rightarrow$  il y a une **force** appliquée sur le **patineur**.
- 3) L'objet qui applique la force sur le patineur doit être nécessairement la bande, car le patineur ne peut pas s'auto-pousser (se pousser lui-même).
- 4) La bande pousse sur le patineur, car le patineur pousse sur la bande. **C'est l'action-réaction** qui explique l'origine du mouvement du patineur.

## Propulsion par action-réaction

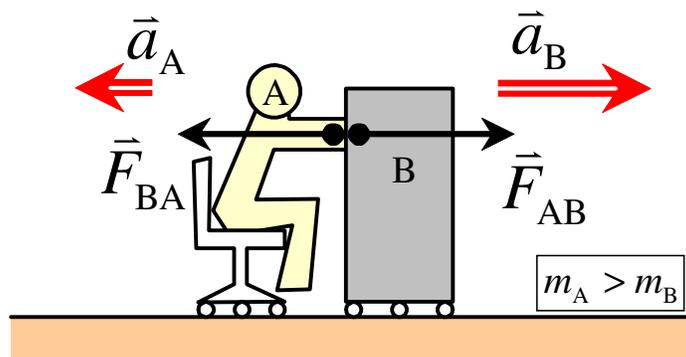
À chaque fois qu'un objet désire subir une accélération par sa « propre action », celui-ci doit appliquer une force sur son environnement afin de subir la « réaction » de sa force. Une personne ne peut pas « s'auto pousser » pour accélérer.

Voici quelques exemples pour illustrer différents modes de propulsion :



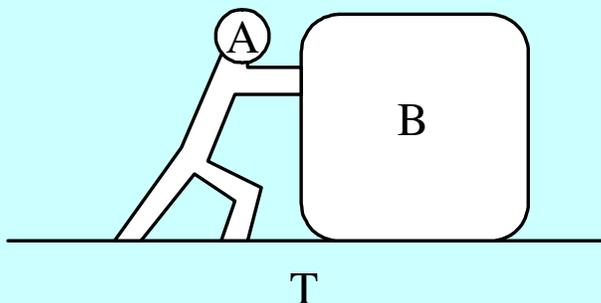
## L'action-réaction et l'accélération

La 3<sup>e</sup> loi de Newton précise le module des forces jumelées en paire action-réaction, mais ne décrit pas les conséquences de ces forces. Lorsque deux objets s'appliquent des forces  $\vec{F}_{AB}$  et  $\vec{F}_{BA}$ , les modules des forces sont égaux, mais les accélérations de chaque objet dépendent de leur masse respective par la 2<sup>ième</sup> loi de Newton ( $\vec{F} = m\vec{a}$ ).



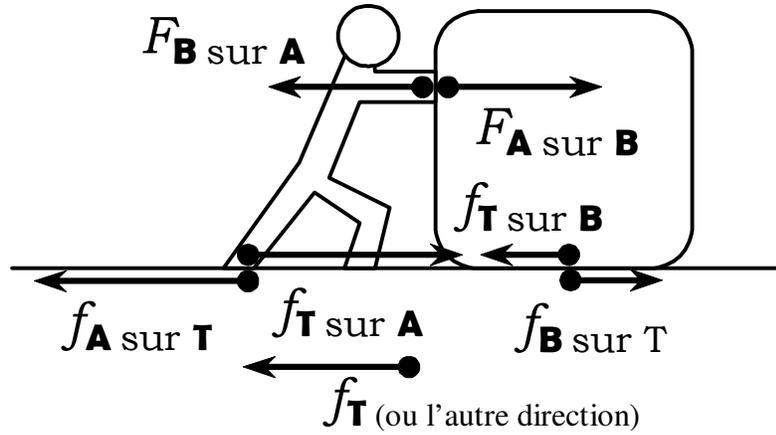
**Situation A : L'action-réaction à trois objets.** On désire identifier toutes les forces appliquées sur les trois objets de la situation suivante :

Albert pousse une Boîte sur un Tapis rugueux.

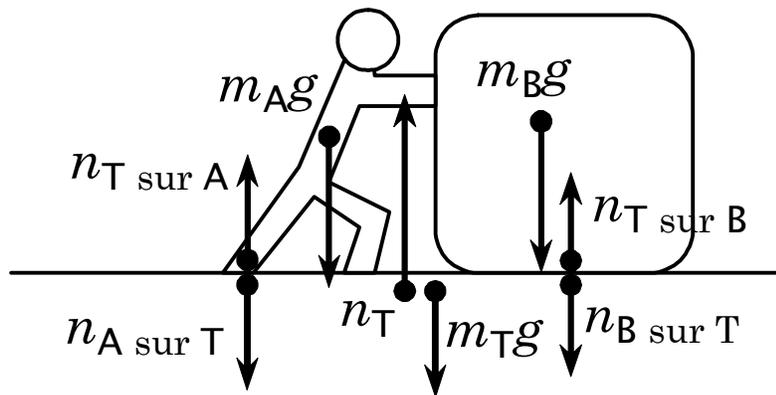


Afin de clarifier le dessin et le rendre moins lourd, nous allons représenter les forces horizontales et les forces verticales sur deux schémas séparés :

Selon l'axe des  $x$  : (7)



Selon l'axe des  $y$  : (8)











# Chapitre 2.5a – Les coefficients de frottement

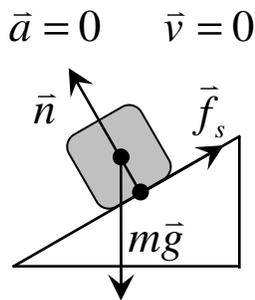
## Deux types de frottement de surface

Lorsqu'il y a deux objets en contact, il y a du frottement de surface. Par contre, on peut définir deux types de frottement : statique et cinétique.

### Statique :

Force de frottement agissant sur un **objet immobile** par rapport à la surface de contact.

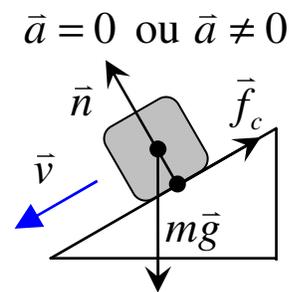
Symbole :  $\vec{f}_s$   
Unité (Newton) :  $[\vec{f}_s] = \text{N}$



### Cinétique :

Force de frottement agissant sur un **objet en mouvement** par rapport à la surface de contact.

Symbole :  $\vec{f}_c$   
Unité (Newton) :  $[\vec{f}_c] = \text{N}$



## Le frottement cinétique

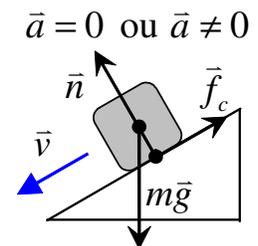
Expérimentalement, le **frottement cinétique** est **proportionnel** à la **force normale**  $n$  appliquée par l'objet qui produit le frottement et aux deux types de surfaces en contact. Plus la force normale sera grande, plus le frottement cinétique sera grand. Ce frottement s'applique seulement si l'**objet** subissant le frottement est en **mouvement par rapport** à sa **surface** de contact :

$$f_c = \mu_c n$$

où  $f_c$  : Force de friction cinétique (N).

$\mu_c$  : Coefficient de frottement cinétique (pas d'unité).

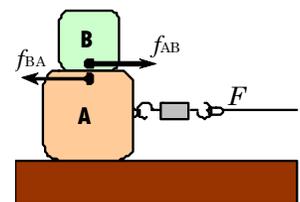
$n$  : Force normale (N).



Il est difficile de donner une définition vectorielle au frottement, car cette force peut également accélérer un objet (force même sens que la vitesse de l'objet).

### Exemple :

Un bloc **B** est accéléré par le frottement appliquée par un bloc **A**. Le bloc **A** est accéléré pas une force extérieure de traction et est ralenti par l'action-réaction du frottement.



# Le frottement statique

Lorsque l'objet est immobile par rapport à une surface grâce à un frottement, alors la surface applique une force de **frottement statique**. Cette force n'est pas constante, car elle s'ajuste en module et en orientation afin de respecter la 2<sup>e</sup> loi de Newton suivante :

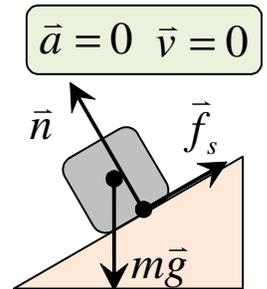
$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = m\vec{a} &\Rightarrow \sum F_{//} = 0 && \text{(Accélération nulle)} \\ &\Rightarrow \sum F_{// \text{ autre}} - f_s = 0 && (f_s \text{ s'oppose aux autres forces } \sum F_{// \text{ autre}}) \end{aligned}$$

(Accélération égale zéro, car l'objet est immobile et demeure immobile)

Le rôle du frottement statique est de bloquer les autres forces voulant provoquer un mouvement parallèle à la surface de contact jusqu'à une valeur limite  $f_{s(\max)}$  :

$$0 \leq f_s \leq f_{s(\max)} \quad \text{où} \quad f_{s(\max)} = \mu_s n$$

- où
- $f_{s(\max)}$  : Force de frottement statique maximale (N)
  - $\mu_s$  : Coefficient de frottement statique (pas d'unité).
  - $n$  : Force normale (N).



Ainsi, selon le module et l'orientation des autres forces appliquées sur un objet, la force de frottement statique sera dans le sens opposé dont le module va satisfaire le critère

$$\sum F_{// \text{ autre}} = f_s \quad \text{tel que} \quad 0 < f_s \leq \mu_s n$$

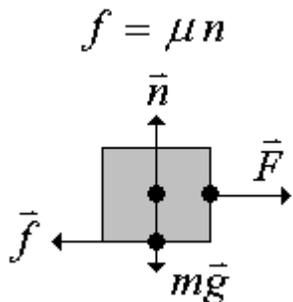
Autrement (si  $f_s > \mu_s n$ ), on prouve que l'objet ne peut pas être immobilisé grâce au frottement statique.

## Frottement cinétique $f_c$ vs frottement statique $f_s$

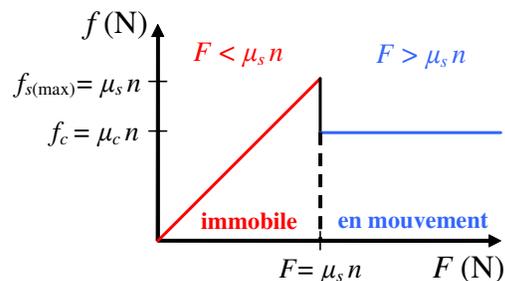
Si l'objet est initialement immobile, nous avons deux scénarios possibles : (surface immobile)

- 1)  $\sum F_{//} \leq \mu_s n \Rightarrow$  l'objet reste immobile ( $f = f_s = \sum F_{//}$ ,  $a_{//} = 0$ )
- 2)  $\sum F_{//} > \mu_s n \Rightarrow$  l'objet accélère ( $f = f_c = \mu_c n$ ,  $a_{//} \neq 0$ )

Voici un graphique illustrant la force de frottement  $f$  en fonction d'une force de poussée  $\vec{F}$  appliquée sur un objet initialement immobile. La force de frottement peut être statique, statique maximale ou bien cinétique.



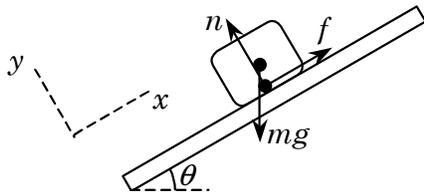
(Schéma des forces de la situation)



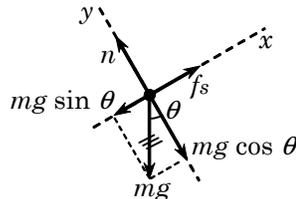
P.S. Ce graphique est une approximation de la réalité.

**Situation 4 : Bloc sur le point de glisser.** On dépose un bloc de laiton de 2 kg sur une plaque en acier. On augmente lentement l'angle  $\theta$  que fait la plaque avec l'horizontale et on observe que le bloc se met à glisser lorsque  $\theta$  dépasse  $27^\circ$ . On désire déterminer le coefficient de frottement statique entre le laiton et l'acier.

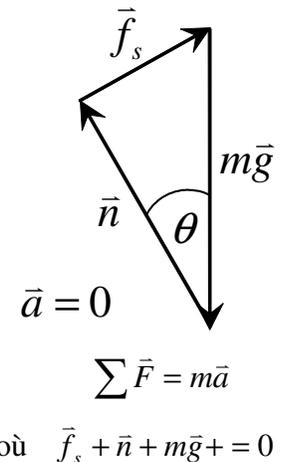
Voici le schéma des forces de la situation :



Décomposition des forces selon l'axe  $x$  et  $y$  :



Résolution de la 2<sup>e</sup> loi de Newton graphiquement :



Développons notre 2<sup>e</sup> loi de Newton selon l'axe  $y$  afin d'obtenir la normale à la surface  $\vec{n}$  :

$$\begin{aligned} \sum F_y = ma_y &\Rightarrow n - mg \cos(\theta) = ma_y && \text{(Remplacer } \sum F_y \text{)} \\ &\Rightarrow n - mg \cos(\theta) = 0 && \text{(Remplacer } a_y = 0 \text{)} \\ &\Rightarrow n = mg \cos(\theta) && \text{(Isoler } n \text{)} \\ &\Rightarrow n = (2)(9,8)\cos(27^\circ) && \text{(Remplacer valeurs numériques)} \\ &\Rightarrow \boxed{n = 17,5 \text{ N}} && \text{(Évaluer } n \text{)} \end{aligned}$$

Développons notre 2<sup>e</sup> loi de Newton selon l'axe  $x$  afin d'obtenir le coefficient  $\mu_s$  lorsque le frottement statique est sollicité au maximum ( $f_s = f_{s \max} = \mu_s n$ ) :

$$\begin{aligned} \sum F_x = ma_x &\Rightarrow f_s - mg \sin(\theta) = ma_x && \text{(Remplacer } \sum F_x \text{)} \\ &\Rightarrow f_{s \max} - mg \sin(\theta) = 0 && \text{(Remplacer } a_x = 0 \text{ et } f_s = f_{s \max} \text{)} \\ &\Rightarrow \mu_s n = mg \sin(\theta) && \text{(Remplacer } f_s = \mu_s n \text{)} \\ &\Rightarrow \mu_s = \frac{mg \sin(\theta)}{n} && \text{(Isoler } \mu_s \text{)} \\ &\Rightarrow \mu_s = \frac{(2)(9,8)\sin(27^\circ)}{(17,5)} && \text{(Remplacer valeurs numériques)} \\ &\Rightarrow \boxed{\mu_s = 0,508} && \text{(Évaluer } \mu_s \text{)} \end{aligned}$$











# Chapitre 2.5b – Le frottement en mouvement

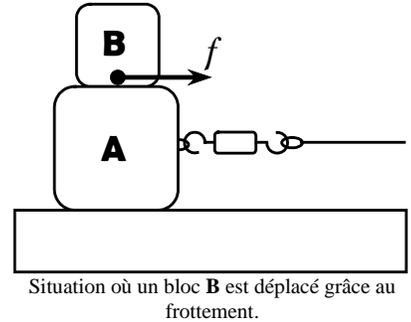
## Le frottement sur une surface non immobile

Lorsqu'une surface n'est pas immobile, un objet doit accélérer au même rythme que la surface pour demeurer immobile par rapport à elle. Voici un exemple où la force de frottement peut contribuer à garder un objet immobile par rapport à une surface en accélération :

La surface : **A**

L'objet étudié : **B**

Force qui permet à **B** d'accélérer : le frottement

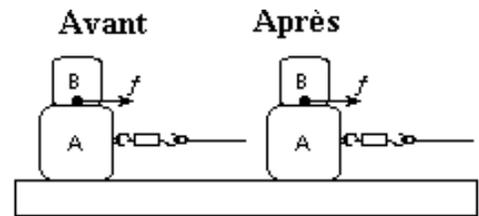


Dans cette situation, il y a deux scénarios possibles :

1) Le frottement statique :

L'objet **B** reste immobile par rapport à la surface **A**.

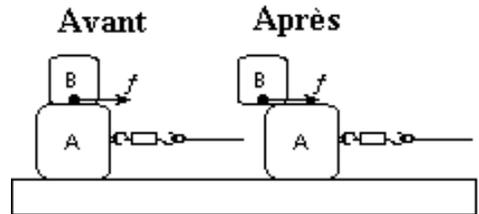
L'objet **B** accélère au même rythme que l'objet **A**.



2) Le frottement cinétique :

L'objet **B** est mobile par rapport à la surface **A**.

L'objet **B** accélère moins efficacement que l'objet **A**.



Pour choisir parmi ces deux scénarios, il faut calculer deux types d'accélération à l'aide de la 2<sup>e</sup> loi de Newton : ( $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ )

- Accélération statique maximale:  $f_{s(\max)} = \mu_s n = m_B a_{\text{statique max}}$  ( $a_{\text{statique max}} = \frac{\mu_s n}{m_B}$ )

- Accélération cinétique :  $f_c = \mu_c n = m_B a_{\text{cinétique}}$  ( $a_{\text{cinétique}} = \frac{\mu_c n}{m_B}$ )

1) Si  $a_A < a_{\text{statique max}}$  alors **accélération statique**  $\Rightarrow a_B = a_A$

2) Si  $a_A > a_{\text{statique max}}$  alors **accélération cinétique**  $\Rightarrow a_B = a_{\text{cinétique}} < a_A$

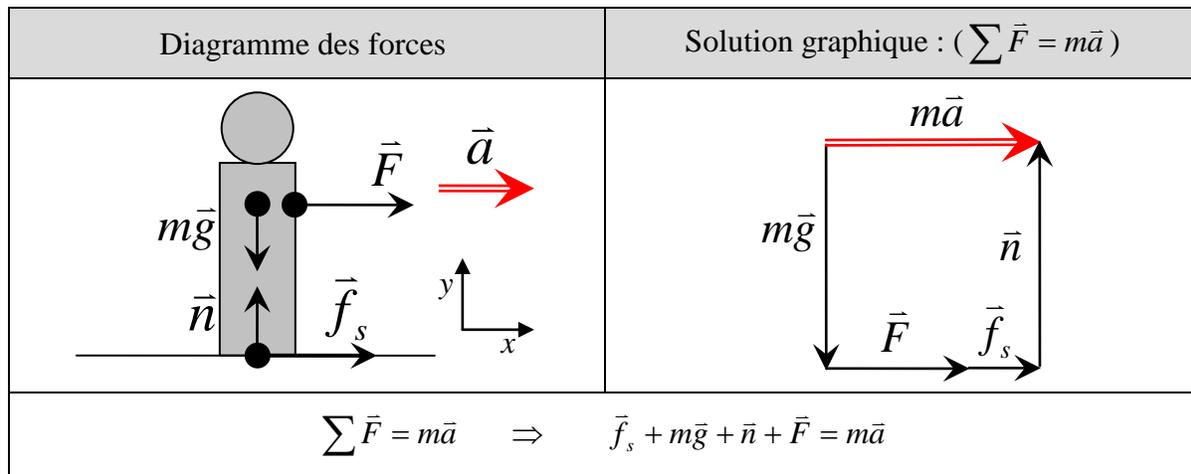
**N.B.** Cette règle est un **cas particulier**. Il faut l'adapter s'il y a plusieurs autres forces en jeu.

**Situation A : Albert dans le métro.** Albert (90 kg) est debout dans un métro (train souterrain) immobile. Celui-ci accélère à un rythme de  $1,25 \text{ m/s}^2$ . Albert tire horizontalement sur un poteau avec une force de 20 N. On désire évaluer le coefficient de frottement statique minimale entre les pieds d'Albert et le métro afin qu'Albert ne glisse pas lorsque le train accélère.

Voici la masse d'Albert étant le sujet sur lequel nous allons appliquer la 2<sup>e</sup> loi de Newton et les forces qu'il va subir :

$$m = 90 \text{ kg} \quad \vec{f}_s, m\vec{g}, \vec{n} \text{ et } \vec{F}$$

Réalisons le diagramme des forces avec une solution graphique qualitative à la 2<sup>e</sup> loi de Newton :



Évaluons la normale à la surface en décomposant la 2<sup>e</sup> loi de Newton selon l'axe  $y$  :

$$\begin{aligned} \sum F_y = ma_y &\Rightarrow n - mg = ma_y && \text{(Remplacer } \sum F_y \text{)} \\ &\Rightarrow n - mg = 0 && \text{(Remplacer } a_y = 0 \text{)} \\ &\Rightarrow n - (90)(9,8) = 0 && \text{(Remplacer valeurs numériques)} \\ &\Rightarrow \boxed{n = 882 \text{ N}} && \text{(Évaluer } n \text{)} \end{aligned}$$

Évaluons le coefficient de frottement en décomposant la 2<sup>e</sup> loi de Newton selon l'axe  $x$  :

$$\begin{aligned} \sum F_x = ma_x &\Rightarrow f_s + F = ma_x && \text{(Remplacer } \sum F_x \text{)} \\ &\Rightarrow (\mu_s n) + F = ma_x && \text{(} f_s = f_{s\text{max}} = \mu_s n \text{)} \\ &\Rightarrow \mu_s = \frac{ma_x - F}{n} && \text{(Isoler } \mu_s \text{)} \\ &\Rightarrow \mu_s = \frac{(90)(1,25) - (20)}{(882)} && \text{(Remplacer valeurs numériques)} \\ &\Rightarrow \boxed{\mu_s = 0,105} && \text{(Évaluer } \mu_s \text{)} \end{aligned}$$

## Le frottement de traction

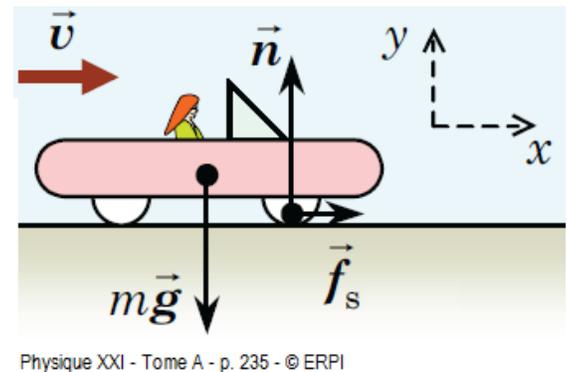
Pour modifier la vitesse de translation d'une voiture, il faut que le sol puisse appliquer une force sur les roues de la voiture. Autrement, le moteur et le système de freinage pourrait modifier la vitesse de rotation des roues sans influencer la translation de la voiture. Ainsi, le sens du frottement appliqué sur les roues de la voiture aura un effet sur la rotation des roues et sur la translation de la voiture. Le **chapitre 4.7 : Dynamique de rotation** vous permettra d'étudier plus en profondeur tout le processus.

Voici les trois types de frottement de traction applicable sur les roues d'un véhicule :

### La traction de propulsion :

La force de frottement appliquée sur les roues est de type statique et elle est orientée vers l'avant afin d'augmenter la vitesse de translation de la voiture. Ce frottement va nuire à la rotation vers l'avant de la roue, mais la force du moteur va compenser pour cette résistance.

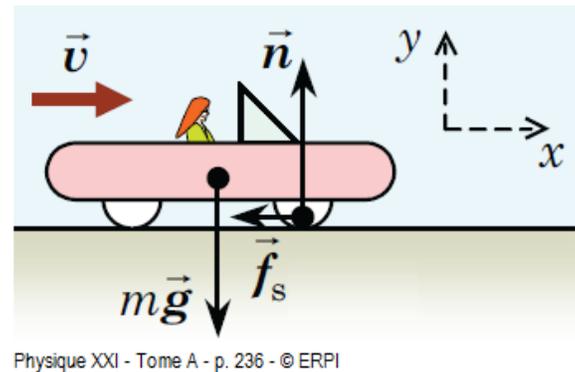
Puisque le frottement est statique, la roue roulera *sans glisser*, car la vitesse de rotation de la roue va augmenter au rythme de l'augmentation de la vitesse de translation de la voiture.



### La traction de freinage :

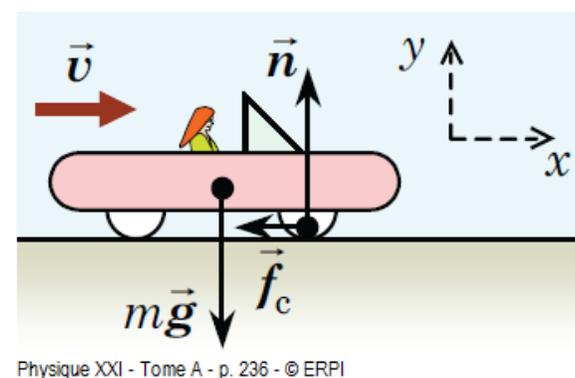
La force de frottement appliquée sur les roues est de type statique et elle est orientée vers l'arrière afin de diminuer la vitesse de translation de la voiture. Ce frottement va nuire à la diminution de la vitesse de rotation de la roue, mais la force du système de freinage va compenser pour cette stimulation.

Puisque le frottement est statique, la roue roulera *sans glisser*, car la vitesse de rotation de la roue va diminuer au rythme de la réduction de la vitesse de translation de la voiture.



### Le freinage en glissement :

La force de frottement appliquée sur les roues est de type cinétique et elle est orientée vers l'arrière afin de diminuer la vitesse de translation de la voiture. Puisque le système de freinage bloque la rotation de celles-ci, il n'y a plus de rotation. Ainsi, les roues ne font que glisser *sans rouler* sur la surface de contact. Ce type de frottement est à éviter, car il endommage les roues en provoquant une usure prématurée.



**Situation B : Est-ce que ça « spin » ?** Albert possède une voiture sport de 1300 kg munit de pneus dont le coefficient de frottement statique avec le sol est de 0,9. Sachant que la performance du moteur permettrait à la voiture d'atteindre une accélération de 9,30 m/s<sup>2</sup> au démarrage, est-ce que l'adhérence des pneus sera adéquate pour une telle accélération sur une surface horizontale ?

Évaluons la force de frottement statique requise pour obtenir l'accélération de 9,30 m/s<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned} \sum F_x = ma_x &\Rightarrow f_s = ma_x \\ &\Rightarrow f_s = (1300)(9,30) \\ &\Rightarrow \boxed{f_s = 12090 \text{ N}} \end{aligned}$$

Évaluons la force de frottement statique maximale  $f_{s(\max)}$  entre les pneus et le sol :

$$\begin{aligned} f_{s(\max)} = \mu_s n &\Rightarrow f_{s(\max)} = \mu_s (mg) \quad (n = mg \text{ car la surface est horizontale}) \\ &\Rightarrow f_{s(\max)} = (0,9)(1300)(9,8) \\ &\Rightarrow \boxed{f_{s(\max)} = 11466 \text{ N}} \end{aligned}$$

Puisque  $f_{s(\max)} < f_s$ , car

$$f_{s(\max)} = 11466 \text{ N} < 12090 \text{ N} = f_s ,$$

alors les pneus vont glisser ce qui ne permettra pas d'obtenir l'accélération désirée.

## Le frottement de roulement

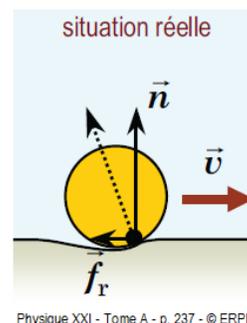
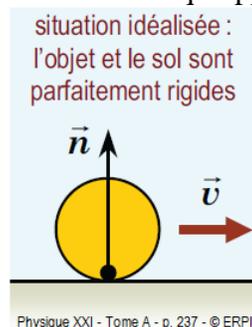
Le frottement de roulement correspond au frottement qu'une surface applique sur un objet non parfaitement rigide lorsque celui-ci est en mouvement translation et de rotation sur la surface. Le module de la force dépendra de plusieurs facteurs dont la rigidité de l'objet et mouvement et de la surface. Pour se doter d'un modèle simple, nous pouvons réduire l'expression du module de la force de frottement de roulement à l'équation suivante :

$$f_r = \mu_r n$$

où  $f_r$  : Module de la force de frottement de roulement (N).

$\mu_r$  : Coefficient de frottement de roulement.

$n$  : Module de la force normale qu'applique la surface sur l'objet en mouvement (N).











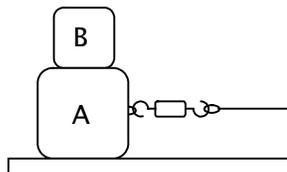
# Chapitre 2.6 – La dynamique des systèmes

## Système de masses

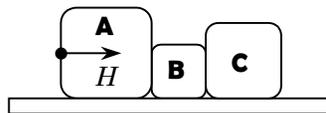
Un **système de masses** est composé de **plusieurs objets** possédant une masse et qui sont **reliés** par des **forces entre eux**. La 3<sup>e</sup> loi de Newton prendra de l'importance dans ce type de problème, car **deux forces** dans une **paire action-réaction** agissent sur **deux objets distincts**.

Exemple :

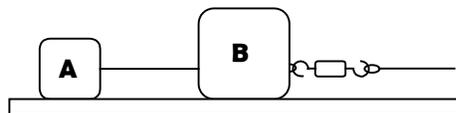
- Objets déposés l'un sur l'autre.



- Objets poussant l'un sur l'autre.



- Objets reliés par des cordes.



## La technique pour résoudre des problèmes à l'aide du concept de force

Voici un algorithme de résolution de problème utilisant la 2<sup>e</sup> loi de Newton :

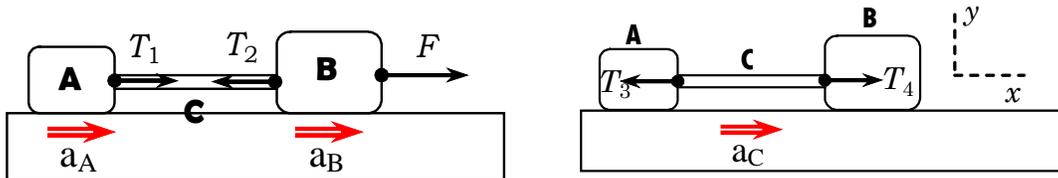
- 1) Identifier toutes les masses.
- 2) Identifier toutes les forces appliquées sur chaque masse.
- 3) Faire un diagramme des forces pour chaque masse avec un système d'axe  $xy$ .
- 4) Écrire la 2<sup>e</sup> loi de Newton ( $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ) pour chaque masse du système.
- 5) Décomposer la 2<sup>e</sup> loi de Newton (force et accélération) dans le système d'axe  $xy$  tel que

$$\sum F_x = ma_x \quad \text{et} \quad \sum F_y = ma_y \quad .$$

- 6) Résoudre le système d'équation.
- 7) Répondre à la question.

**Situation 1 : La tension dans une corde de masse négligeable.** Deux blocs **A** et **B** sont posés sur une surface sans frottement. Ils sont reliés ensemble par une mince corde dont la masse est négligeable par rapport à celle des blocs. Lorsqu'on tire sur le bloc **B**, on désire démontrer que la corde exerce des tensions de même module sur les deux blocs.

Voici le schéma des forces à 3 masses **A**, **B** et **C** où le frottement a été négligé :



$F$  : Force qui fera accélérer le système, en particulier le bloc **B**.

$T_1$  : Force qui permet au bloc **A** d'être accéléré via la corde **C**.

$T_2$  : Force qui représente le fardeau du Bloc **B** à traîner le bloc **A** via la corde **C**.

$T_3$  : Action-réaction appliquée sur la corde **C** venant de  $T_1$

$T_4$  : Action-réaction appliquée sur la corde **C** venant de  $T_2$

Appliquons la 2<sup>e</sup> loi de Newton sur la corde (masse  $C$ ) :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{T}_3 + \vec{T}_4 = m_c \vec{a} \quad (\text{Appliquer la 2<sup>ème</sup> loi de Newton à C})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{-T_3 + T_4 = m_c a_x} \quad (\text{Décomposer en } x)$$

Si l'on suppose que la masse de la corde est négligeable : ( $m_c = 0$ )

$$-T_3 + T_4 = m_c a_x \quad \Rightarrow \quad -T_3 + T_4 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T_4 = T_3}$$

Puisque :  $T_1 = T_3$  et  $T_2 = T_4$  par Action réaction

$$\boxed{T_1 = T_2}$$

La **tension appliquée** aux **deux extrémités** de la **corde** est de **même module** si la **masse** de la **corde** est **négligeable**. Cela s'applique uniquement lorsqu'il y a seulement deux forces en action sur la corde.

**Remarque :** S'il y a **trois forces et plus** d'appliquées sur la corde (ex : 3 objets touchent à la corde), la **tension** ne sera **pas uniforme** sur l'ensemble de la corde. La conclusion précédente ne peut donc pas être utilisée.

**Situation 3 : Trois blocs et une poulie.** Considérons la situation représentée sur le schéma ci-contre. Trois blocs de masse  $m_A$ ,  $m_B$  et  $m_C$  sont reliés ensemble par des cordes ; une des cordes passe sur une poulie sans frottement. Les masses de la poulie et des cordes sont négligeables. Le plan incliné fait un angle  $\theta$  par rapport à l'horizontale et il y a un coefficient de frottement  $\mu_c$  entre les surfaces en contact. Sachant que les blocs **B** et **C** se déplacent vers le bas, on désire déterminer l'accélération des blocs.

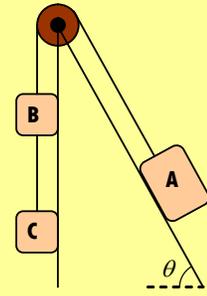
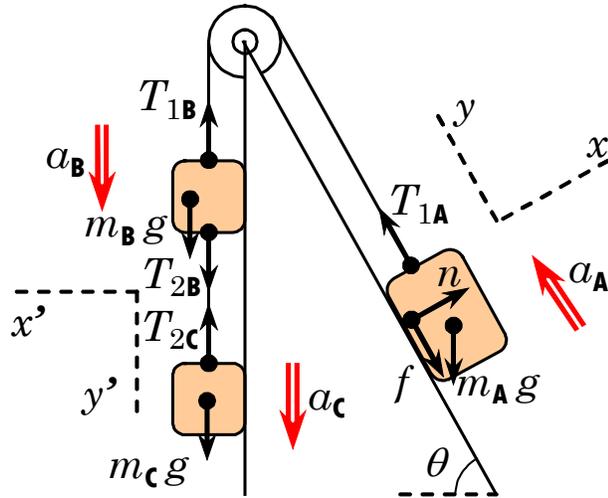
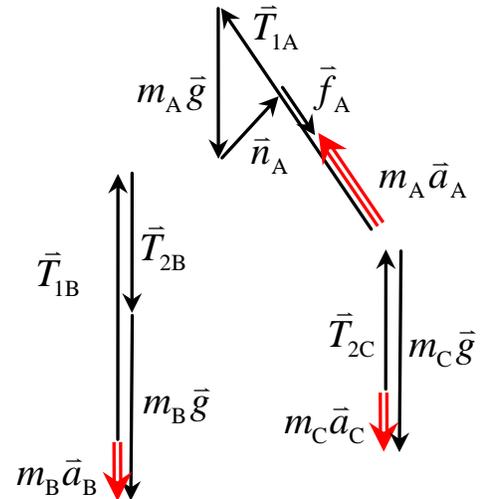


Schéma des forces :



Solution graphique : ( $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ )



Voici la 2<sup>e</sup> loi de Newton appliquée sur nos trois blocs **A**, **B** et **C** :

Pour A :  $\sum \vec{F} = m_A \vec{a}_A \quad \Rightarrow \quad \vec{T}_{1A} + m_A \vec{g} + \vec{n} + \vec{f}_c = m_A \vec{a}_A$

Pour B :  $\sum \vec{F} = m_B \vec{a}_B \quad \Rightarrow \quad \vec{T}_{1B} + m_B \vec{g} + \vec{T}_{2B} = m_B \vec{a}_B$

Pour C :  $\sum \vec{F} = m_C \vec{a}_C \quad \Rightarrow \quad \vec{T}_{2C} + m_C \vec{g} = m_C \vec{a}_C$

Selon nos systèmes d'axe  $xy$  et  $x'y'$ , on peut décomposer les forces et accélérations afin d'obtenir les équations suivantes :

Pour A :  $\sum F_x = n - m_A g \cos(\theta) = m_A a_{xA} \quad \Rightarrow \quad n - m_A g \cos(\theta) = 0 \quad (1)$

$\sum F_y = T_{1A} - m_A g \sin(\theta) - f_c = m_A a_{yA} \quad \Rightarrow \quad T_{1A} - m_A g \sin(\theta) - f_c = m_A a_{yA} \quad (2)$

Pour B :  $\sum F_{y'} = -T_{1B} + m_B g + T_{2B} = m_B a_{y'B} \quad \Rightarrow \quad -T_{1B} + m_B g + T_{2B} = m_B a_{y'B} \quad (3)$

Pour C :  $\sum F_{y'} = -T_{2C} + m_C g = m_C a_{y'C} \quad \Rightarrow \quad -T_{2C} + m_C g = m_C a_{y'C} \quad (4)$

Avec la 3<sup>e</sup> loi de Newton et l'approximation de la corde de masse nulle, nous avons

$$T_{1A} = T_{1B} = T_1 \quad \text{et} \quad T_{2C} = T_{2B} = T_2 .$$

Puisque nos blocs sont rattachés par des cordes, les modules des accélérations sont égaux. Ainsi, nous avons

$$|\vec{a}_A| = |\vec{a}_B| = |\vec{a}_C| = a \quad \text{et qui correspond à} \quad a_{yA} = a_{y'B} = a_{y'C} = a$$

Nous avons donc le système d'équations suivants :

$$n - m_A g \cos(\theta) = 0 \quad (1) \quad \text{(support du bloc A par le plan incliné)}$$

$$T_1 - m_A g \sin(\theta) - f_c = m_A a \quad (2) \quad \text{(mouvement vers le haut du bloc A)}$$

$$-T_1 + m_B g + T_2 = m_B a \quad (3) \quad \text{(mouvement vers le bas du bloc B)}$$

$$-T_2 + m_C g = m_C a \quad (4) \quad \text{(mouvement vers le bas du bloc C)}$$

À partir de (1), on peut évaluer la normale  $n$  :

$$n - m_A g \cos(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = m_A g \cos(\theta)}$$

Nous pouvons développer l'expression du frottement cinétique à partir de la normale  $n$  :

$$f_c = \mu_c n \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_c = \mu_c m_A g \cos(\theta)}$$

En additionnant les équations (2), (3) et (4), nous pouvons obtenir une nouvelle équation qui nous permettra d'isoler  $a$  correspondant à l'accélération de chacun des blocs (accélération du système) :

$$\Rightarrow \quad \underbrace{[T_1 - m_A g \sin(\theta) - f_c]}_{(2)} + \underbrace{[-T_1 + m_B g + T_2]}_{(3)} + \underbrace{[-T_2 + m_C g]}_{(4)} = \underbrace{[m_A a]}_{(2)} + \underbrace{[m_B a]}_{(3)} + \underbrace{[m_C a]}_{(4)}$$

$$\Rightarrow \quad -m_A g \sin(\theta) - f_c + m_B g + m_C g = (m_A + m_B + m_C) a \quad \text{(Factoriser } a)$$

$$\Rightarrow \quad -m_A g \sin(\theta) - (\mu_c m_A g \cos(\theta)) + m_B g + m_C g = (m_A + m_B + m_C) a \quad \text{(Remplacer } f_c)$$

$$\Rightarrow \quad (-m_A \sin(\theta) - \mu_c m_A \cos(\theta) + m_B + m_C) g = (m_A + m_B + m_C) a \quad \text{(Factoriser } g)$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{-m_A \sin(\theta) - \mu_c m_A \cos(\theta) + m_B + m_C}{m_A + m_B + m_C} g \quad \text{(Isoler } a)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{m_B + m_C - m_A (\sin(\theta) + \mu_c \cos(\theta))}{m_A + m_B + m_C} g} \quad \text{(Factoriser } m_A)$$

Attention :

Cette équation n'est **valide** que pour une **accélération positive**. Si la combinaison des masses donne une accélération négative, l'équation ne sera pas bonne, car le **frottement ne sera pas appliqué** dans la bonne direction.

**Situation 4 : Un bloc plaqué contre un autre.** Considérons la situation représentée sur le schéma ci-contre. En poussant sur le bloc **A** avec une force horizontale  $H$  suffisante, on réussit à faire en sorte que le bloc **B** ne glisse pas vers le bas. On donne  $m_A = 6 \text{ kg}$  et  $m_B = 2 \text{ kg}$ . Les blocs et la surface horizontale sont en bois : les coefficients de frottement sont  $\mu_s = 0,5$  et  $\mu_c = 0,3$ . On désire calculer le module minimal  $H$  de la force requise

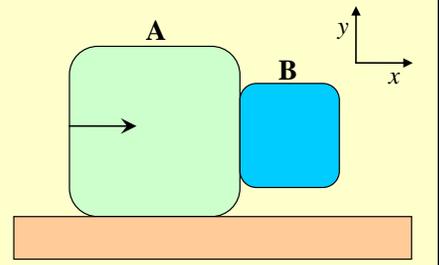
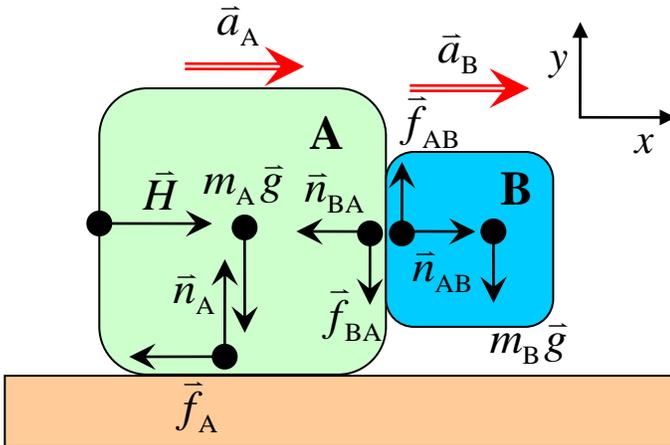
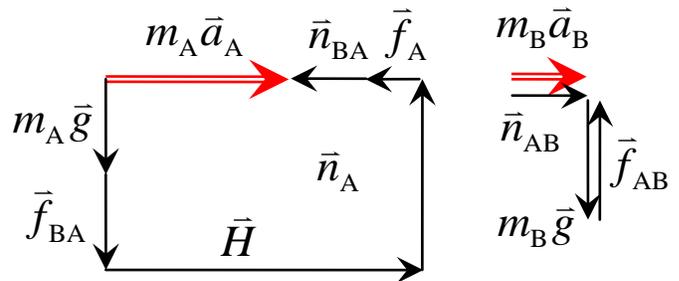


Schéma des forces :



Solution graphique : ( $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ )



Voici la 2<sup>e</sup> loi de Newton appliquée au bloc **A** et **B** :

Pour A :  $\sum \vec{F} = m_A \vec{a}_A \Rightarrow \vec{H} + m_A \vec{g} + \vec{n}_{BA} + \vec{f}_{BA} + \vec{n}_A + \vec{f}_A = m_A \vec{a}_A$

Pour B :  $\sum \vec{F} = m_B \vec{a}_B \Rightarrow m_B \vec{g} + \vec{n}_{AB} + \vec{f}_{AB} = m_B \vec{a}_B$

Selon notre système d'axe  $xy$ , on peut décomposer les forces et obtenir :

Pour A :  $\sum F_x = H - n_{BA} - f_A = m_A a_{xA} \Rightarrow H - n_{BA} - f_A = m_A a_{xA}$  (1)

$\sum F_y = -m_A g - f_{BA} + n_A = m_A a_{yA} = 0 \Rightarrow -m_A g - f_{BA} + n_A = 0$  (2)

Pour B :  $\sum F_x = n_{AB} = m_B a_{xB} \Rightarrow n_{AB} = m_B a_{xB}$  (3)

$\sum F_y = -m_B g + f_{AB} = m_B a_{yB} = 0 \Rightarrow -m_B g + f_{AB} = 0$  (4)

Avec la 3<sup>e</sup> loi de Newton, nous avons des paires d'action-réaction suivantes :

$$n_{AB} = n_{BA} \quad f_{AB} = f_{BA}$$

Puisque nos deux blocs sont toujours en contact, ils accélèrent au même rythme :

$$a_{xA} = a_{xB} = a$$

Ceci nous donne le système d'équations suivants :

$$\begin{aligned}
 H - n_{AB} - f_A &= m_A a & \text{(1)} & \quad \text{(propulsion du bloc A selon l'axe x)} \\
 -m_A g - f_{AB} + n_A &= 0 & \text{(2)} & \quad \text{(support du bloc A par le sol)} \\
 n_{AB} &= m_B a & \text{(3)} & \quad \text{(propulsion du bloc B selon l'axe x)} \\
 -m_B g + f_{AB} &= 0 & \text{(4)} & \quad \text{(support du bloc B par le frottement statique)}
 \end{aligned}$$

Puisqu'on désire évaluer  $H$ , utilisons (1) et remplaçons dans notre équation les termes connus :

$$\begin{aligned}
 H - n_{AB} - f_A &= m_A a & \Rightarrow & \quad H = m_A a + n_{AB} + f_A & \text{(Isoler } H) \\
 & & \Rightarrow & \quad H = m_A a + (m_B a) + f_A & \text{(Remplacer } n_{AB} \text{ avec (3))} \\
 & & \Rightarrow & \quad H = (m_A + m_B) a + f_A & \text{(Factoriser } a) \\
 & & \Rightarrow & \quad H = (m_A + m_B) a + (\mu_c n_A) & \text{(Remplacer } f_A = \mu_c n_A) \\
 & & \Rightarrow & \quad H = (m_A + m_B) a + \mu_c (m_A g + f_{AB}) & \text{(Remplacer } n_A \text{ avec (2))} \\
 & & \Rightarrow & \quad H = (m_A + m_B) a + \mu_c (m_A g + (m_B g)) & \text{(Remplacer } f_{AB} \text{ avec (4))} \\
 & & \Rightarrow & \quad \boxed{H = (m_A + m_B) a + \mu_c g (m_A + m_B)} & \text{(Factoriser } g)
 \end{aligned}$$

Pour évaluer l'accélération  $a$ , nous pouvons utiliser les équations (4) et (3) :

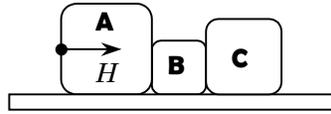
$$\begin{aligned}
 -m_B g + f_{AB} &= 0 & \Rightarrow & \quad -m_B g + (\mu_s n_{AB}) = 0 & \text{(Remplacer } f_1 = \mu_s n_1) \\
 & & \Rightarrow & \quad -m_B g + \mu_s (m_B a) = 0 & \text{(Remplacer } n_{AB} \text{ avec (3))} \\
 & & \Rightarrow & \quad a = \frac{m_B g}{\mu_s m_B} & \text{(Isoler } a) \\
 & & \Rightarrow & \quad \boxed{a = \frac{g}{\mu_s}} & \text{(Simplifier } m_B)
 \end{aligned}$$

Nous avons la solution générale suivante que l'on peut évaluer avec les deux expressions précédentes:

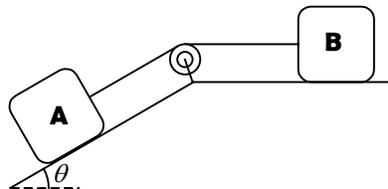
$$\begin{aligned}
 H = (m_A + m_B) a + \mu_c g (m_A + m_B) & \Rightarrow H = (m_A + m_B) \frac{g}{\mu_s} + \mu_c g (m_A + m_B) & \text{(Remplacer } a = g / \mu_s) \\
 & \Rightarrow \boxed{H = (m_A + m_B) g \left( \frac{1}{\mu_s} + \mu_c \right)} & \text{(Factoriser } (m_A + m_B) g) \\
 & \Rightarrow H = ((6) + (2))(9,8) \left( \left( \frac{1}{0,5} \right) + (0,3) \right) & \text{(Remplacer valeurs num.)} \\
 & \Rightarrow \boxed{H = 180,3 \text{ N}} & \text{(Calcul)}
 \end{aligned}$$

## Exercices

**2.6.4** *L'un pousse l'autre.* Sur une surface sans frottement, trois blocs de masse  $m_A = 0,4$  kg,  $m_B = 0,1$  kg et  $m_C = 0,3$  kg sont posés l'un à côté de l'autre. Si on pousse sur le bloc A avec une force horizontale de 2,4 N (schéma-ci dessous), déterminez les modules de l'accélération des blocs et des forces normales que les blocs exercent les uns sur les autres.



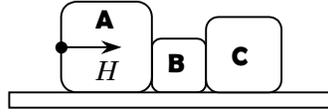
**2.6.10** *Frottement versus gravité, prise 2.* Deux blocs de même masse sont reliés ensemble par une corde qui passe sur une poulie (schéma ci-dessous).



Le bloc A est soutenu par un plan incliné à  $\theta = 30^\circ$  par rapport à l'horizontale. Les coefficients de frottement sont les mêmes pour toutes les surfaces en présence. Les blocs sont initialement immobiles et on les lâche. (a) Pour quelle valeur minimale de  $\mu_s$  les blocs demeurent-ils immobiles? (b) Que vaut le module de l'accélération des blocs si  $\mu_s = 0,25$  et  $\mu_c = 0,2$ .

## Solutions

**2.6.4** *L'un pousse l'autre.* Sur une surface sans frottement, trois blocs de masse  $m_A = 0,4$  kg,  $m_B = 0,1$  kg et  $m_C = 0,3$  kg sont posés l'un à côté de l'autre. Si on pousse sur le bloc A avec une force horizontale de 2,4 N (schéma-ci dessous), déterminez les modules de l'accélération des blocs et des forces normales que les blocs exercent les uns sur les autres.



### Solution :

Avec la 2<sup>e</sup> loi de Newton :

$$\text{Pour A : } \vec{H} + m_A \vec{g} + \vec{n}_A + \vec{n}_{BA} = m_A \vec{a}_A$$

$$\text{Pour B : } m_B \vec{g} + \vec{n}_B + \vec{n}_{AB} + \vec{n}_{CB} = m_B \vec{a}_B$$

$$\text{Pour C : } m_C \vec{g} + \vec{n}_C + \vec{n}_{BC} = m_C \vec{a}_C$$

Si l'on décompose nos forces dans le système d'axe  $xy$  :

$$\text{Pour A : } \sum F_x = H - n_{BA} = m_A a_{xA} \quad \Rightarrow \quad H - n_{BA} = m_A a_{xA} \quad (1)$$

$$\text{Pour B : } \sum F_x = n_{AB} - n_{CB} = m_B a_{xB} \quad \Rightarrow \quad n_{AB} - n_{CB} = m_B a_{xB} \quad (2)$$

$$\text{Pour C : } \sum F_x = n_{BC} = m_C a_{xC} \quad \Rightarrow \quad n_{BC} = m_C a_{xC} \quad (3)$$

**P.S.** Les équations en  $y$  ne sont pas utiles au problème, car il n'y a pas de frottement.

À l'aide de la 3<sup>e</sup> loi de Newton, nous avons les relations suivantes entre nos forces normales :

$$n_{AB} = n_{BA} \quad \text{et} \quad n_{BC} = n_{CB}$$

De plus, nous trois masses accélèrent dans la même direction avec le même module :

$$a_{xA} = a_{xB} = a_{xC} = a$$

Ceci nous donne le système d'équations suivantes :

$$H - n_{AB} = m_A a \quad (1)$$

$$n_{AB} - n_{BC} = m_B a \quad (2)$$

$$n_{BC} = m_C a \quad (3)$$

Pour évaluer l'accélération, il suffit d'additionner les trois équations et isoler  $a$  :

$$\Rightarrow \quad \underbrace{[H - n_{AB}]}_{(1)} + \underbrace{[n_{AB} - n_{BC}]}_{(2)} + \underbrace{[n_{BC}]}_{(3)} = \underbrace{[m_A a]}_{(1)} + \underbrace{[m_B a]}_{(2)} + \underbrace{[m_C a]}_{(3)} \quad (\text{Additionner (1), (2) et (3)})$$

$$\Rightarrow \quad H = (m_A + m_B + m_C)a \quad (\text{Factoriser } a)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{H}{(m_A + m_B + m_C)}} \quad (\text{Isoler } a)$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{(2,4)}{(0,4 + 0,1 + 0,3)}$$

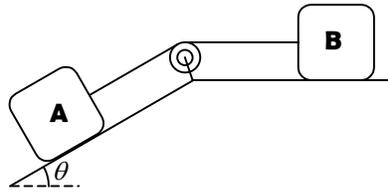
$$\Rightarrow \quad \boxed{a = 3 \text{ m/s}^2}$$

Avec l'accélération on peut évaluer les forces normales :

$$\text{De (1) :} \quad n_{AB} = H - m_A a = (2,4) - (0,4)(3) \quad \Rightarrow \quad \boxed{n_{AB} = 1,2 \text{ N}}$$

$$\text{De (3) :} \quad n_{BC} = m_C a = (0,3)(3) \quad \Rightarrow \quad \boxed{n_{BC} = 0,9 \text{ N}}$$

**2.6.10 Frottement versus gravité, prise 2.** Deux blocs de même masse sont reliés ensemble par une corde qui passe sur une poulie (schéma ci-dessous).



Le bloc **A** est soutenu par un plan incliné à  $\theta = 30^\circ$  par rapport à l'horizontale. Les coefficients de frottement sont les mêmes pour toutes les surfaces en présence. Les blocs sont initialement immobiles et on les lâche. (a) Pour quelle valeur minimale de  $\mu_s$  les blocs demeurent-ils immobiles? (b) Que vaut le module de l'accélération des blocs si  $\mu_s = 0,25$  et  $\mu_c = 0,2$ .

### Solution :

Avec la 2<sup>e</sup> loi de Newton :

$$\begin{aligned} \text{Pour A :} \quad \sum \vec{F} &= m_A \vec{g} + \vec{T}_A + \vec{f}_A + \vec{n}_A = m_A \vec{a}_A & x \rightarrow \text{droite} & \quad y \rightarrow \text{haut} \\ \text{Pour B :} \quad \sum \vec{F} &= m_B \vec{g} + \vec{T}_B + \vec{f}_B + \vec{n}_B = m_B \vec{a}_B & A : x'y' & \quad B : xy \end{aligned}$$

Si l'on décompose nos forces dans le système d'axe  $xy$  et  $x'y'$  :

Pour A :

$$\sum F_{x'} = -m_A g \sin(\theta) + T_A + f_A = m_A a_{x'A} \quad \Rightarrow \quad -m_A g \sin(\theta) + T_A + f_A = m_A a_{x'A} \quad (1)$$

$$\sum F_{y'} = -m_A g \cos(\theta) + n_A = m_A a_{y'A} = 0 \quad \Rightarrow \quad -m_A g \cos(\theta) + n_A = 0 \quad (2)$$

Pour B :

$$\sum F_x = -T_B + f_B = m_B a_{xB} \quad \Rightarrow \quad -T_B + f_B = m_B a_{xB} \quad (3)$$

$$\sum F_y = -m_B g + n_B = m_B a_{yB} = 0 \quad \Rightarrow \quad -m_B g + n_B = 0 \quad (4)$$

Puisque la tension a la même valeur partout sur la corde et que nos deux objets possèdent la même masse :

$$T_A = T_B = T \quad m_A = m_B = m$$

De plus, nos deux objets vont accélérer au même rythme :

$$a_{x'A} = a_{xB} = a$$

Nous avons ainsi les équations suivantes simplifiées :

$$-mg \sin(\theta) + T + f_A = ma \quad (1)$$

$$-mg \cos(\theta) + n_A = 0 \quad (2)$$

$$-T + f_B = ma \quad (3)$$

$$-mg + n_B = 0 \quad (4)$$

Évaluons de façon générale l'accélération en débutant avec l'équation (1) :

$$-mg \sin(\theta) + T + f_A = ma \quad (\text{Équation (1)})$$

$$\Rightarrow (-mg \sin(\theta) + T + f_A) + (-T + f_B) = (ma) + (ma) \quad (\text{Ajouter l'équation (3)})$$

$$\Rightarrow -mg \sin(\theta) + f_B + f_A = 2ma \quad (\text{Simplifier})$$

$$\Rightarrow a = \frac{-mg \sin(\theta) + f_B + f_A}{2m} \quad (\text{Isoler } a)$$

$$\Rightarrow a = \frac{-mg \sin(\theta) + (\mu n_B) + (\mu n_A)}{2m} \quad (\text{Remplacer } f = \mu n)$$

$$\Rightarrow a = \frac{-mg \sin(\theta) + \mu(n_B + n_A)}{2m} \quad (\text{Factoriser } \mu)$$

$$\Rightarrow a = \frac{-mg \sin(\theta) + \mu((mg) + (mg \cos(\theta)))}{2m} \quad (\text{Remplacer les normales avec (2) et (4)})$$

$$\Rightarrow a = \frac{-g \sin(\theta) + \mu g(1 + \cos(\theta))}{2} \quad (\text{Simplifier } m)$$

$$\Rightarrow \boxed{a = \frac{\mu(1 + \cos(\theta)) - \sin(\theta)}{2} g} \quad (\text{Si } a < 0, \text{ donc ça bouge !})$$

(a) La valeur minimal de  $\mu = \mu_s$  pour que les deux blocs soient immobiles implique  $a = 0$  :

$$0 = \frac{\mu_s(1 + \cos(\theta)) - \sin(\theta)}{2} g \Rightarrow 0 = \mu_s(1 + \cos(\theta)) - \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow \mu_s = \frac{\sin(\theta)}{1 + \cos(\theta)} \Rightarrow \mu_s = \frac{\sin(30^\circ)}{1 + \cos(30^\circ)} = 0,268$$

(b) Le module de l'accélération peut s'évaluer s'il n'y a pas de friction statique ( $\mu = \mu_c$ ) :

$$a = \frac{\mu_c(1 + \cos(\theta)) - \sin(\theta)}{2} g = \frac{(0,2)(1 + \cos(30^\circ)) - \sin(30^\circ)}{2} (9,8) = -0,621 \text{ m/s}^2$$

L'accélération possède un **module** de  $0,621 \text{ m/s}^2$  et est **orientée** selon notre système d'axe vers la gauche.









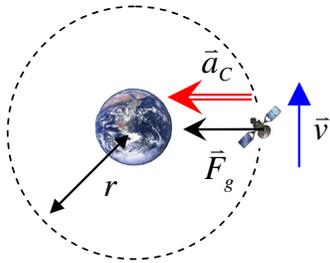
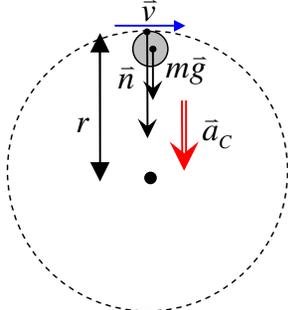
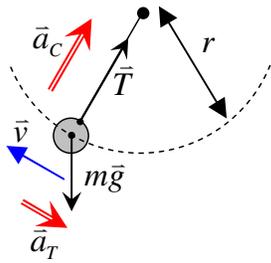


# Chapitre 2.7 – La dynamique du mouvement circulaire

## Les forces de rôle centripètes

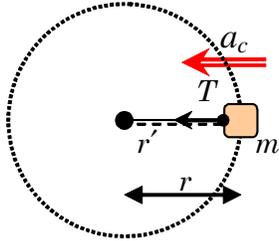
Une **force centripète** est le nom que porte une force ayant une composante **orientée** vers le **centre d'une trajectoire circulaire** contribuant ainsi à produire une **accélération centripète**. Puisqu'une force centripète n'est pas proprement une force mais plutôt un qualificatif/étiquette, on peut affirmer qu'une force peut jouer le rôle de force centripète dans un problème de dynamique si elle est correctement orientée.

Voici quelques exemples de forces qui jouent le rôle de force centripète :

Un satellite en orbite autour de la terre		
<p><u>Force centripète :</u> Force gravitationnelle (<math>\vec{F}_g = -G \frac{mM}{r^2} \hat{r}</math>)</p>		
Un looping tête renversée dans un rollercoaster		
<p><u>Force centripète :</u> Force gravitationnelle (<math>\vec{F}_g = m\vec{g}</math>) et force normale (<math>\vec{n}</math>)</p>		
Une balançoire (pendule)		
<p><u>Force centripète :</u> Tension (<math>\vec{T}</math>) et force gravitationnelle (<math>m\vec{g}</math>)</p> <p><u>Force tangentielle :</u> Force gravitationnelle (<math>m\vec{g}</math>)</p>		

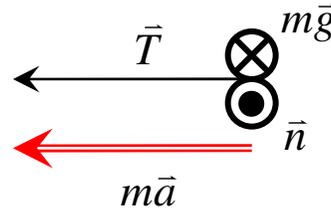
**Situation 1 : Un bloc tourne au bout d'une corde.** On attache un bloc de 2 kg avec une corde à un crochet fixé au centre d'une table à air (frottement négligeable). On fait tourner le bloc sur une trajectoire circulaire dont le rayon est égal à 0,5 m et on observe que le bloc prend 3 secondes pour faire un tour. On désire déterminer le module de la tension dans la corde.

Schéma des forces :



Vue du haut (normale annule le poids)

Solution graphique : ( $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ )



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{où} \quad \vec{T} + \vec{n} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Développons notre 2<sup>e</sup> loi de Newton selon l'axe  $r'$  afin d'obtenir une expression pour l'accélération  $a_{r'}$  sachant que le bloc demeure sur la trajectoire circulaire ( $a_{r'} = a_c$ ) :

$$\sum F_{r'} = ma_{r'} \quad \Rightarrow \quad T = ma_{r'} \quad (\text{Décomposition selon l'axe } r')$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T = m \frac{v^2}{r}} \quad (\text{Remplacer } a_{r'} = a_c = \frac{v^2}{r})$$

À partir de la définition de la vitesse, évaluons le module de la vitesse :

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad v = \frac{(2\pi r)}{(T)} \quad (\text{Remplacer } \Delta x = 2\pi r \text{ et } \Delta t = T)$$

$$\Rightarrow \quad v = \frac{2\pi(0,5)}{(3)} \quad (\text{Remplacer valeurs numériques})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v = 1,05 \text{ m/s}} \quad (\text{Simplifier})$$

Évaluons la tension dans la corde à partir de l'expression de la tension  $T$  et le module de la vitesse  $v$  :

$$T = m \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{(2)(1,05)^2}{(0,5)} \quad (\text{Remplacer valeurs numériques})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T = 4,41 \text{ N}} \quad (\text{Simplifier})$$

**Situation 2 : Un bloc entraîné par la rotation d'un disque.** Un disque de métal de 50 cm de rayon tourne autour d'un axe vertical à 40 tours par minutes. Un petit bloc est situé à mi-chemin entre le centre et le bord du disque et il tourne avec le disque sans glisser. On désire déterminer le coefficient de frottement statique minimal qui doit exister entre le bloc et le disque pour rendre ce mouvement possible.

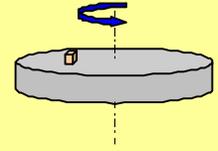
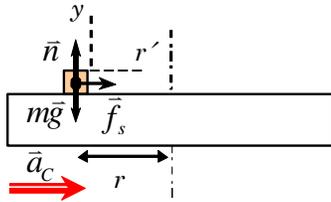
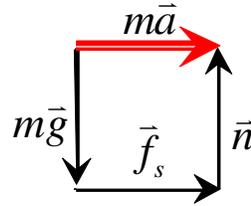


Schéma des forces :



Solution graphique : ( $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ )



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{où} \quad \vec{n} + m\vec{g} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Développons la 2<sup>e</sup> loi de Newton selon l'axe y afin d'évaluer une expression pour la force normale  $n$  :

$$\begin{aligned} \sum F_y = ma_y &\Rightarrow n - mg = 0 && (a_y = 0) \\ &\Rightarrow \boxed{n = mg} && (\text{Isoler la normale}) \end{aligned}$$

Développons la 2<sup>e</sup> loi de Newton selon l'axe x afin d'évaluer une expression pour le coefficient  $\mu_s$  sachant que le bloc demeure sur sa trajectoire circulaire ( $a_{r'} = a_c$ ) :

$$\begin{aligned} \sum F_{r'} = ma_{r'} &\Rightarrow f_s = m \frac{v^2}{r} && (\text{Remplacer } a_{r'} = a_c = \frac{v^2}{r}) \\ &\Rightarrow (\mu_s n) = \frac{mv^2}{r} && (\text{Remplacer } f_s = f_{s(\max)} = \mu_s n) \\ &\Rightarrow \mu_s (mg) = \frac{mv^2}{r} && (\text{Remplacer } n = mg) \\ &\Rightarrow \boxed{\mu_s = \frac{v^2}{gr}} && (\text{Simplifier } m \text{ et isoler } \mu_s) \end{aligned}$$

On peut évaluer la vitesse à l'aide de la période et de la définition de la vitesse :

$$f = \frac{40 \text{ tours}}{\text{min}} * \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = 0,666 \text{ s}^{-1} \quad (\text{Fréquence}) \quad \text{et} \quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{0,666} = 1,5 \text{ s} \quad (\text{Période})$$

$$\text{Évaluons la vitesse :} \quad v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(0,5/2)}{(1,5)} \Rightarrow \boxed{v = 1,05 \text{ m/s}}$$

$$\text{Évaluons le coefficient :} \quad \mu_s = \frac{v^2}{gr} \Rightarrow \mu_s = \frac{(1,05)^2}{(9,8)(0,5/2)} \Rightarrow \boxed{\mu_s = 0,45}$$

**Situation A : Un bloc entraîné par la rotation d'un disque en accélération.** Un disque de métal de rayon  $R = 1,5$  m initialement immobile tourne autour d'un axe vertical de plus en plus vite avec une accélération constante. Un bloc de 5 kg situé à une distance  $d = 0,2$  m du bord du disque tourne avec le disque sans glisser avec une accélération tangentielle de  $0,2 \text{ m/s}^2$ . On désire évaluer le module du frottement statique exercé par le disque sur le bloc après 4 secondes de rotation.

Évaluons la vitesse tangentielle du bloc après 4 secondes à l'aide des équations du MUA :

$$v_x = v_{x0} + a_x t \quad \Rightarrow \quad v_x = (0) + (0,2)(4) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_x = 0,8 \text{ m/s}}$$

Évaluons l'accélération radiale  $a_{r'}$  requise pour permettre au bloc de demeurer sur la trajectoire circulaire ( $a_{r'} = a_C$ ) :

$$\begin{aligned} a_{r'} = a_C &\Rightarrow a_{r'} = \left( \frac{v^2}{r} \right) && \text{(Remplacer } a_C = \frac{v^2}{r} \text{)} \\ &\Rightarrow a_{r'} = \frac{v^2}{(R-x)} && \text{(Remplacer } r = R-x \text{)} \\ &\Rightarrow a_{r'} = \frac{(0,8)^2}{(1,5)-(0,2)} && \text{(Remplacer les valeurs numériques)} \\ &\Rightarrow \boxed{a_{r'} = 0,4923 \text{ m/s}^2} && \text{(Évaluer l'accélération radiale)} \end{aligned}$$

Puisque c'est uniquement le frottement qui permet de générer l'accélération tangentielle, évaluons la partie tangentielle du frottement statique à partir de la 2<sup>e</sup> loi de Newton selon l'axe  $x$  :

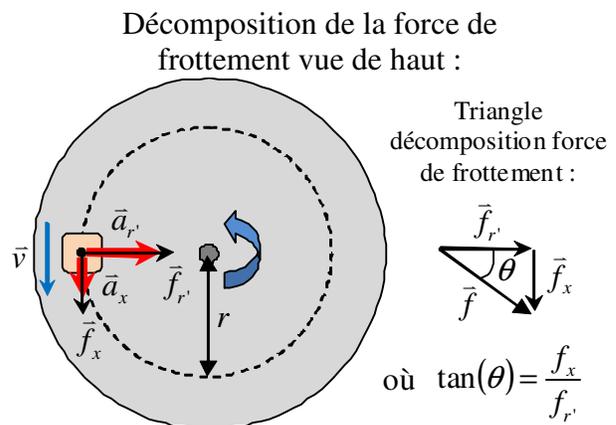
$$\sum F_x = ma_x \quad \Rightarrow \quad f_x = ma_x \quad \Rightarrow \quad f_x = (5)(0,2) \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_x = 1 \text{ N}}$$

Puisque c'est uniquement le frottement qui permet de générer l'accélération radiale, évaluons la partie radiale du frottement statique à partir de la 2<sup>e</sup> loi de Newton selon l'axe  $r'$  :

$$\sum F_{r'} = ma_{r'} \quad \Rightarrow \quad f_{r'} = ma_{r'} \quad \Rightarrow \quad f_{r'} = (5)(0,4923) \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_{r'} = 2,4615 \text{ N}}$$

Puisque les deux composantes du frottement tangentielle et radiale sont perpendiculaires, évaluons le module du frottement statique à l'aide du théorème de Pythagore :

$$\begin{aligned} f &= \sqrt{f_x^2 + f_{r'}^2} \\ \Rightarrow f &= \sqrt{(1)^2 + (2,4615)^2} \\ \Rightarrow \boxed{f = 2,657 \text{ N}} \end{aligned}$$



**Situation 3 : Un virage surélevé.** Dans un virage de 50 m de rayon, on a relevé le bord extérieur d'une piste de course afin que la chaussée fasse un angle de  $20^\circ$  avec l'horizontale. On désire calculer le module maximal de la vitesse à laquelle une voiture de 1200 kg peut négocier le virage sans déraper. Il y a un coefficient de frottement statique de 0,8 entre les pneus et la chaussée.

Schéma de la situation :

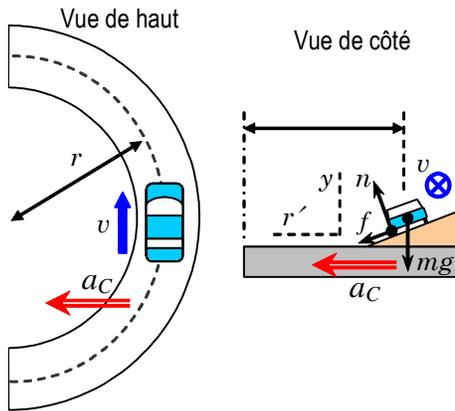
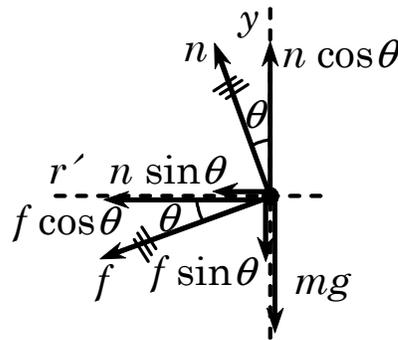
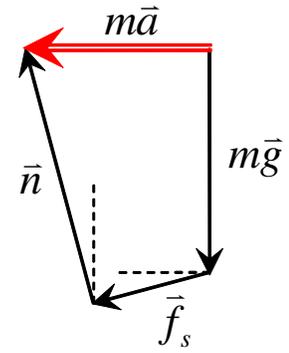


Schéma des forces :



Solution graphique :



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

où  $\vec{n} + m\vec{g} + \vec{f}_s = m\vec{a}$

Appliquons la 2<sup>e</sup> loi de Newton selon l'axe y afin d'évaluer la normale n :

$$\begin{aligned} \sum F_y = ma_y &\Rightarrow n \cos(\theta) - f \sin(\theta) - mg = ma_y && \text{(Remplacer } \sum F_y \text{)} \\ &\Rightarrow n \cos(\theta) - f \sin(\theta) - mg = 0 && \text{(Remplacer } a_y = 0 \text{)} \\ &\Rightarrow n \cos(\theta) - (\mu_s n) \sin(\theta) - mg = 0 && \text{(Remplacer } f_s = f_{s(\max)} = \mu_s n \text{)} \\ &\Rightarrow n [\cos(\theta) - \mu_s \sin(\theta)] = mg && \text{(Factoriser } n \text{)} \\ &\Rightarrow n = \frac{mg}{\cos(\theta) - \mu_s \sin(\theta)} && \text{(1) (Isoler } n \text{)} \\ &\Rightarrow n = \frac{(1200)(9,8)}{\cos(20^\circ) - (0,8)\sin(20^\circ)} && \text{(Remplacer valeurs numériques)} \\ &\Rightarrow n = 17656 \text{ N} && \text{(Calcul) (P.S. } n > mg = 11760 \text{ N)} \end{aligned}$$

Appliquons la 2<sup>e</sup> loi de Newton selon l'axe r' afin d'évaluer la vitesse sous la forme de  $v^2$  :

$$\begin{aligned} \sum F_{r'} = ma_{r'} &\Rightarrow f \cos(\theta) + n \sin(\theta) = ma_{r'} && \text{(Remplacer } \sum F_{r'} \text{)} \\ &\Rightarrow f \cos(\theta) + n \sin(\theta) = m \left( \frac{v^2}{r} \right) && \text{(Remplacer } a_{r'} = a_c = \frac{v^2}{r} \text{)} \\ &\Rightarrow v^2 = \frac{r}{m} (f \cos(\theta) + n \sin(\theta)) && \text{(2) (Isoler } v^2 \text{)} \end{aligned}$$

Remplaçons maintenant le frottement dans l'expression (2) lorsque le frottement est statique maximale et évaluons la vitesse maximale de la voiture sans déraper :

$$v^2 = \frac{r}{m} (f \cos(\theta) + n \sin(\theta))$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{r}{m} ((\mu_s n) \cos(\theta) + n \sin(\theta)) \quad (\text{Remplacer } f_s = f_{s(\max)} = \mu_s n)$$

$$\Rightarrow v^2 = n \frac{r}{m} (\mu_s \cos(\theta) + \sin(\theta)) \quad (3) \quad (\text{Factoriser } n)$$

$$\Rightarrow v^2 = (17656) \frac{(50)}{(1200)} ((0,8) \cos(20^\circ) + \sin(20^\circ)) \quad (\text{Remplacer valeurs numériques})$$

$$\Rightarrow v^2 = 804,7 \quad (\text{Calcul})$$

$$\Rightarrow v = 28,37 \text{ m/s} \quad (\text{Choisir la valeur positive})$$

$$\Rightarrow v = 102,1 \text{ km/h} \quad (\text{Expression en km/h})$$

Équation générale : 
$$v^2 = gr \frac{\mu_s \cos(\theta) + \sin(\theta)}{\cos(\theta) - \mu_s \sin(\theta)} \quad (\text{À partir de (3) et (1)})$$

## Exercices

**2.7.1** *Une trajectoire le long d'une table horizontale.* On attache un bloc de 2 kg avec une corde à un crochet fixé au centre d'une table à air (frottement négligeable). On fait tourner le bloc sur une trajectoire circulaire dont le rayon vaut 0,5 m. (a) Si le bloc fait 10 tours par minute, quelle est la tension dans la corde? (b) Si la corde peut supporter une tension maximale de 5 N avant de se rompre, quel est le nombre maximal de tours par minute que peut faire le bloc?

**2.7.3** *La tension au point le plus haut et au point le plus bas.* Une balle de 0,5 kg attachée à une corde de masse négligeable tourne sur un cercle vertical de 50 cm de rayon. Au point le plus haut du cercle, elle se déplace à 2,44 m/s; au point le plus bas du cercle, elle se déplace à 5,06 m/s. Calculez le module de la tension dans la corde à ces deux endroits.

**2.7.11** *Le rayon de l'orbite géostationnaire.* Un satellite de communication géostationnaire tourne autour de la Terre dans le plan de l'équateur avec une période de 24h : ainsi, il demeure toujours au-dessus du même point du globe. Quel est le rayon de son orbite? (La masse de la Terre est égale à  $m_{\text{Terre}} = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$ .)

## Solutions

**2.7.1** Une trajectoire le long d'une table horizontale. On attache un bloc de 2 kg avec une corde à un crochet fixé au centre d'une table à air (frottement négligeable). On fait tourner le bloc sur une trajectoire circulaire dont le rayon vaut 0,5 m. (a) Si le bloc fait 10 tours par minute, quelle est la tension dans la corde? (b) Si la corde peut supporter une tension maximale de 5 N avant de se rompre, quel est le nombre maximal de tours par minute que peut faire le bloc?

Circonférence de la trajectoire :

$$C = 2\pi r = 2\pi(0,5) = 3,14 \text{ m}$$

Période du mouvement :

$$f = \frac{nb_{\text{tour}}}{\text{min}} * \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = \frac{10}{60} = 0,167 \text{ s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{f} = \frac{1}{(0,167)} = 6 \text{ s}$$

Vitesse tangentielle :

$$v = \frac{C}{T} = \frac{(3,14)}{(6)} = 0,524 \text{ m/s}$$

Accélération centripète :

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(0,524)^2}{(0,5)} = 0,549 \text{ m/s}^2$$

(a) Tension dans la corde :

$$T = F_c = ma_c = (2)(0,549) \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 1,10 \text{ N}}$$

Vitesse maximale à 5 N de tension :

$$T = F_c = ma_c = m \frac{v^2}{r} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{Tr}{m}} = \sqrt{\frac{(5)(0,5)}{(2)}} = 1,118 \text{ m/s}$$

Évaluer la période :

$$v = \frac{C}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{C}{v} = \frac{(3,14)}{(1,118)} = 2,810 \text{ s}$$

(b) La fréquence :

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{(2,810)} = 0,356 \text{ s}^{-1} \quad \Rightarrow \quad f_{\text{min}} = \frac{0,356 \text{ tours}}{\text{s}} * \frac{60 \text{ s}}{\text{min}}$$
$$\Rightarrow \quad \boxed{f_{\text{min}} = 21,35 \text{ tours/min}}$$

**2.7.3 La tension au point le plus haut et au point le plus bas.** Une balle de 0,5 kg attachée à une corde de masse négligeable tourne sur un cercle vertical de 50 cm de rayon. Au point le plus haut du cercle, elle se déplace à 2,44 m/s; au point le plus bas du cercle, elle se déplace à 5,06 m/s. Calculez le module de la tension dans la corde à ces deux endroits.

Avec la 2<sup>ième</sup> loi de Newton :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Prenons le système d'axe en y orienté vers le haut pour  $y > 0$  :

Haut du cercle :

$$\begin{aligned} -T - mg &= -ma_c \\ \Rightarrow T + mg &= m\frac{v^2}{r} \\ \Rightarrow T = m\frac{v^2}{r} - mg &= m\left(\frac{v^2}{r} - g\right) = (0,5)\left[\frac{(2,44)^2}{(0,5)} - (9,8)\right] \\ \Rightarrow T &= 1,05 \text{ N} \end{aligned}$$

Bas du cercle :

$$\begin{aligned} T - mg &= ma_c \\ \Rightarrow T - mg &= m\frac{v^2}{r} \\ \Rightarrow T = m\frac{v^2}{r} + mg &= m\left(\frac{v^2}{r} + g\right) = (0,5)\left[\frac{(5,06)^2}{(0,5)} + (9,8)\right] \\ \Rightarrow T &= 30,50 \text{ N} \end{aligned}$$

**2.7.11** *Le rayon de l'orbite géostationnaire.* Un satellite de communication géostationnaire tourne autour de la Terre dans le plan de l'équateur avec une période de 24h : ainsi, il demeure toujours au-dessus du même point du globe. Quel est le rayon de son orbite? (La masse de la Terre est égale à  $m_{\text{Terre}} = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$ .)

La force permettant de corriger la direction du satellite lui permettant de demeurer sur l'orbite circulaire est la force gravitationnelle :

$$F_g = G \frac{mM}{r^2}$$

Cette force joue le rôle d'une force centripète : ( $\sum F_{r'} = ma_{r'}$ , selon l'axe  $r'$ )

$$F_g = ma_c \quad \Rightarrow \quad G \frac{mM}{r^2} = m \frac{v^2}{r} \quad (\text{Remplacer } F_g \text{ et } a_c = \frac{v^2}{r})$$

$$\Rightarrow \quad G \frac{M}{r^2} = \frac{v^2}{r} \quad (\text{Simplifier la masse } m)$$

$$\Rightarrow \quad r = \frac{GM}{v^2} \quad (\text{Isoler } r)$$

On peut évaluer la vitesse du satellite avec la définition d'une orbite géostationnaire :

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T}$$

On remplace cette expression de la vitesse dans notre équation précédente et nous pouvons évaluer le rayon de l'orbite :

$$r = \frac{GM}{v^2} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{GM}{\left(\frac{2\pi r}{T}\right)^2} = \frac{GMT^2}{4\pi^2 r^2} \quad (\text{Remplacer } v)$$

$$\Rightarrow \quad r^3 = \frac{GMT^2}{4\pi^2} \quad (\text{Isoler les termes } r)$$

$$\Rightarrow \quad r = \left(\frac{GMT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} \quad (\text{Isoler } r)$$

$$\Rightarrow \quad r = \left(\frac{(6,67 \times 10^{-11})(5,98 \times 10^{24})(24 * 60 * 60)^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow \quad r = 4,225 \times 10^7 \text{ m}$$















# Chapitre 2.8 – Le poids apparent et la gravité artificielle

## La balance et le poids apparent

La balance est un outil qui permet de **mesurer** la **force normale** appliquée sous un objet afin que celui-ci possède une accélération verticale nulle par rapport à la balance. Utilisée normalement, une balance mesure le poids d'un objet. Cependant, lorsque la balance possède une accélération, la force normale n'est pas égale au poids de l'objet. On utilisera alors l'expression « **poids apparent** » comme **synonyme** à la **force normale** lorsqu'une balance effectuera une mesure :



Une balance mesure le poids apparent.

$$\text{poids apparent} \equiv \text{force normale}$$

**Situation 1 : Le poids apparent d'Albert.** Albert a une masse de 90 kg. On désire déterminer son poids apparent dans les situations suivantes. **(a)** Il vient de sauter d'un plongeon et il n'a pas encore touché la surface de l'eau. **(b)** Il est debout sur le sol. **(c)** Il est dans un ascenseur qui se déplace vers le haut et qui freine au taux de  $2 \text{ m/s}^2$ . **(d)** Il est dans un ascenseur qui se déplace vers le bas et qui freine au taux de  $2 \text{ m/s}^2$ .

Schéma des forces	Appliquer la 2 <sup>e</sup> loi de Newton	Accélération $a_y > 0$	Accélération $a_y = 0$	Accélération $a_y < 0$
	$\sum \vec{F} = m\vec{a}$ <p>où</p> $\vec{n} + m\vec{g} = m\vec{a}$			

Appliquons la 2<sup>e</sup> loi de Newton selon l'axe  $y$  d'évaluer l'expression de la force normale tel que l'accélération  $a_y$  est positive lorsqu'elle est orientée vers le haut : (voir système d'axe)

$$\begin{aligned} \sum F_y = ma_y &\Rightarrow n - mg = ma_y && \text{(Évaluer } \sum F_y \text{)} \\ &\Rightarrow n = ma_y + mg && \text{(Isoler } n, \text{ le poids apparent)} \\ &\Rightarrow \boxed{n = m(a_y + g)} && \text{(Factoriser } m \text{)} \end{aligned}$$

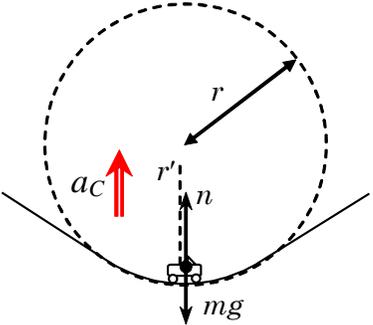
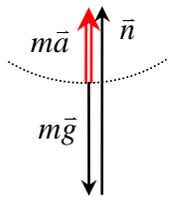
**(a)** Chute libre :  $a_y = -9,8 \text{ m/s}^2 \Rightarrow n = (90)((-9,8) + (9,8)) = 0 \text{ N} \quad (n = 0)$

**(b)** Immobile :  $a_y = 0 \text{ m/s}^2 \Rightarrow n = (90)((0) + (9,8)) = 882 \text{ N} \quad (n = mg)$

**(c)** Ascenseur acc. ↓ :  $a_y = -2 \text{ m/s}^2 \Rightarrow n = (90)((-2) + (9,8)) = 702 \text{ N} \quad (n < mg)$

**(d)** Ascenseur acc. ↑ :  $a_y = 2 \text{ m/s}^2 \Rightarrow n = (90)((2) + (9,8)) = 1062 \text{ N} \quad (n > mg)$

**Situation 3 : Le poids apparent au fond d'un ravin.** Albert ( $m = 90 \text{ kg}$ ) roule en voiture sur une route qui descend puis remonte les pentes d'un ravin. Au point le plus bas de la trajectoire, le rayon de courbure de la route est  $r = 150 \text{ m}$  et la voiture se déplace à  $v = 25 \text{ m/s}$  ( $90 \text{ km/h}$ ). On désire calculer le poids apparent d'Albert à cet endroit.

Voici le schéma des forces de la situation	Résolution de la 2 <sup>e</sup> loi de Newton graphiquement
	 $\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{où} \quad \vec{n} + m\vec{g} = m\vec{a}$

Appliquons la 2<sup>e</sup> loi de Newton selon l'axe  $r'$  afin d'évaluer une expression pour la force normale (le poids apparent) sachant que la voiture demeure sur sa trajectoire circulaire ( $a_{r'} = a_c$ )

$$\begin{aligned} \sum F_{r'} = ma_{r'} &\Rightarrow n - mg = ma_{r'} && \text{(Évaluer } \sum F_{r'} \text{)} \\ &\Rightarrow n - mg = m \frac{v^2}{r} && \text{(Remplacer } a_{r'} = a_c = \frac{v^2}{r} \text{)} \\ &\Rightarrow n = m \frac{v^2}{r} + mg && \text{(Isoler } n \text{)} \\ &\Rightarrow n = m \left( \frac{v^2}{r} + g \right) && \text{(Factoriser } m \text{)} \\ &\Rightarrow n = (90) \left( \frac{(25)^2}{(150)} + (9,8) \right) && \text{(Remplacer les valeurs numériques)} \\ &\Rightarrow \boxed{n = 1257 \text{ N}} && \text{(Évaluer la normale)} \end{aligned}$$

On constate que :

- La voiture possède un poids apparent supérieur à  $mg$  lorsque le virage est dans le bas ravin peu importe le module de la vitesse.
- On peut déduire que le poids apparent sera inférieur à  $mg$  lorsque le virage sera sur le haut d'une montagne, mais avec un module de vitesse inférieur à une vitesse limite.
- Sur le haut d'une montagne, le poids apparent sera égal à zéro ( $n = 0$ ) lorsque  $mg = mv^2 / r$ , car la voiture quittera la surface de la route. Il ne pourra plus effectuer son mouvement circulaire, mais fera plutôt un mouvement de projectile.

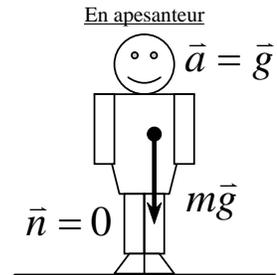
# L'apesanteur

La sensation de la gravité se fait par le biais de notre perception de notre poids apparent (force normale) ce qui dépend de notre environnement :

- On se sent « lourd » lorsqu'une surface nous applique une force normale  $n > mg$ .
- On se sent « léger » lorsqu'une surface nous applique une force normale  $n < mg$ .

Lorsqu'il n'y a pas de surface pour nous appliquer une force normale, cela ne signifie pas qu'il n'y a pas de gravité. Sans surface pour annuler la force gravitationnelle, un corps peut tomber en chute libre avec une accélération égale à  $\vec{g}$ .

Un objet qui effectue une telle chute est en **apesanteur**, car il croît « ne pas sentir » la force gravitationnelle. C'est ce qui se produit lorsqu'un objet est en orbite autour d'une planète. L'objet tombe sans arrêt vers la planète et la force gravitationnelle ne fait que réorienter le vecteur vitesse pour former une trajectoire circulaire.



En apesanteur, le corps humain tombe au rythme du sol occasionnant une force normale nulle.



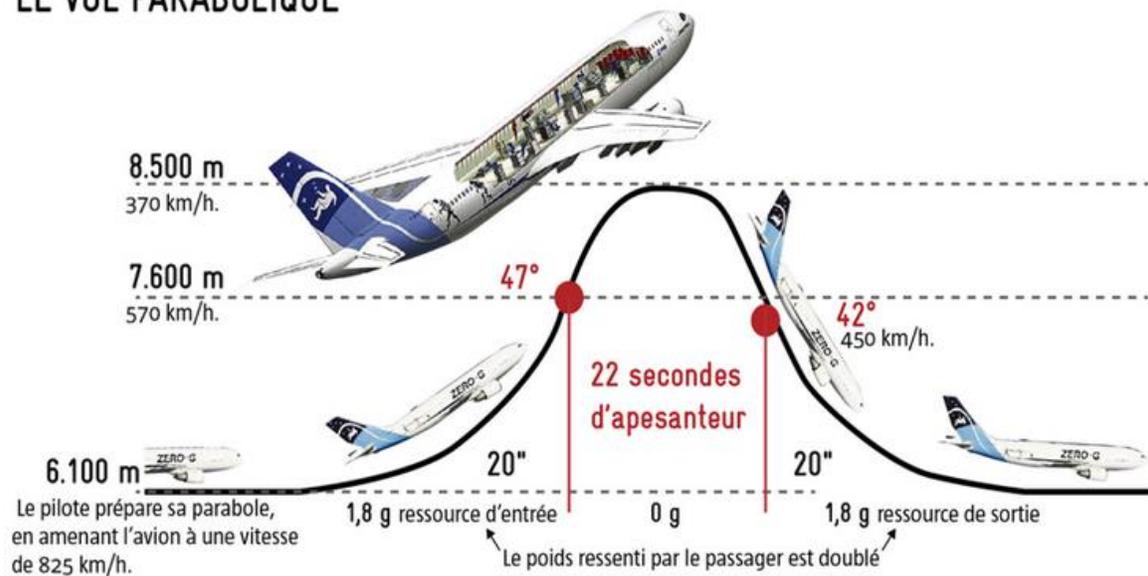
Astronaute en orbite



Un avion en chute libre à très haute altitude

## LE VOL PARABOLIQUE

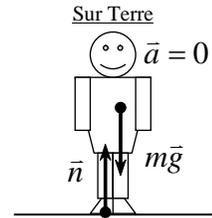
Infographie le JDD - Sources : CNES et Novespace



<http://infoaeroquebec.net/derniere-campagne-de-vols-paraboliques-de-la300-zero-g/>

# La gravité artificielle

Le corps humain a évolué sur la Terre depuis plus de 200 000 ans et dépend de ses paramètres. Puisque la Terre produit une force gravitationnelle proportionnelle à  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$  et que l'homme a évolué à la surface de cette planète subissant une force normale annulant l'effet de la force gravitationnelle, il faut réaliser que le **corps humain a besoin** du **stress** engendré par la **force normale**  $n = mg$  pour bien fonctionner.



Sur Terre, le corps humain a la sensation d'être « comme dans un étau ».

Exemple : Les astronautes qui voyagent dans l'espace doivent être suivis en physiothérapie en revenant de leur voyage, car leurs os ont « grandis ». Cela occasionne beaucoup de souffrance lorsqu'ils reviennent sur Terre. De plus ils doivent suivre des programmes d'entraînement physique dans l'espace s'ils veulent éviter de perdre trop de masse musculaire.

Si l'on veut un jour peupler une autre planète, il faudra trouver un moyen de transport produisant une « **gravité artificielle** » égale à  $9,8 \text{ m/s}^2$ . Plusieurs films de science fiction ont déjà exploré le sujet :

*2001 Odyssée de l'espace* (1968)

*Mission vers Mars* (2000)

*Le vaisseau spatial et l'habitable en rotation*<sup>1</sup> :



La stratégie utilisée est de **faire tourner un habitacle cylindrique** du vaisseau à une vitesse précise afin **d'utiliser la force normale** (rôle d'une force centripète) pour donner **l'illusion** de la **présence** d'une **force gravitationnelle**. Ainsi, la force normale ne lutte pas contre la force gravitationnelle, mais sert à produire l'accélération centripète.

Dans le jeu de science fiction Halo<sup>2</sup>, on imagine la création d'une pseudo planète en forme d'anneau (*ring world*) qui maximiserait la surface habitable d'une planète conventionnelle. Pour produire une « gravité artificielle », l'anneau aurait une vitesse de rotation relativement faible, car le rayon de l'anneau serait très grand.



*Ring world vu de l'espace*



*Ring world vu de l'intérieur*

<sup>1</sup> Les images ont été tirées du film *Mission to Mars*.

<sup>2</sup> Les images ont été tirées du jeu *Halo*, Xbox

**Situation A : L'habitable des astronautes.** Une fusée spatiale possède un habitacle pour astronaute en forme de cylindre de 8 m de rayon. Quelle est la période de rotation de l'habitable pour générer une « gravité artificielle » semble à celle de la Terre.

**Sur Terre**, la présence de la force gravitationnelle nous permet d'évaluer la force normale de la façon suivante selon l'axe verticale  $y$  (axe parallèle au champ gravitationnel  $\vec{g}$ ) :

$$\begin{aligned} \sum F_y = ma_y &\Rightarrow n - mg = ma_y && \text{(Appliquer la 2<sup>e</sup> loi de Newton en } y) \\ &\Rightarrow n - mg = 0 && \text{(En équilibre, donc } a_y = 0) \\ &\Rightarrow \boxed{n = mg} && \text{(Isoler la normale, sur } \mathbf{Terre}) \end{aligned}$$

**Dans l'habitable**, l'astronaute est en apesanteur (la gravité explique le mouvement de la fusée, mais n'explique pas le mouvement circulaire de l'astronaute dans l'habitable). Pour maintenir l'astronaute dans son habitacle en rotation, seule la force normale est disponible.

Pour cette raison, appliquons la 2<sup>e</sup> loi de Newton selon l'axe  $r'$  pour évaluer l'expression de la normale  $n$  :

$$\begin{aligned} \sum F_{r'} = ma_{r'} &\Rightarrow n = ma_{r'} && \text{(Évaluer } \sum F_{r'} \text{ sans gravité } \vec{g}) \\ &\Rightarrow \boxed{n = m \frac{v^2}{r}} && \text{(Remplacer } a_{r'} = a_C = v^2 / r, \text{ en A)} \end{aligned}$$

Afin d'évaluer la vitesse  $v$  de rotation de l'habitable pour obtenir une gravité apparente équivalente à celle sur Terre, remplaçons  $n = mg$  dans l'expression précédente

$$\begin{aligned} n = m \frac{v^2}{r} &\Rightarrow (mg) = m \frac{v^2}{r} && \text{(Remplacer la valeur de } n \text{ par } mg) \\ &\Rightarrow \boxed{v = \sqrt{gr}} && \text{(Simplifier } m \text{ et isoler } v) \end{aligned}$$

On peut évaluer la période de rotation grâce à l'équation suivante :

$$\begin{aligned} v = \frac{\Delta x}{\Delta t} &\Rightarrow v = \frac{2\pi r}{T} && \text{(Remplacer } \Delta x = 2\pi r \text{ et } \Delta t = T) \\ &\Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} && \text{(Isoler la période } T) \\ &\Rightarrow T = \frac{2\pi r}{(\sqrt{gr})} && \text{(Remplacer } v = \sqrt{gr}) \\ &\Rightarrow \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}} && \text{(Simplifier } \sqrt{r}) \\ &\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{(8)}{(9,8)}} && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ &\Rightarrow \boxed{T = 5,68 \text{ s}} && \text{(Évaluer } T) \end{aligned}$$

## Exercices

**2.8.5** *Presque envolé.* Une voiture franchit le sommet d'une colline. Au sommet, le rayon de courbure de la route est égal à 200 m. Quelle est la vitesse maximale de la voiture pour qu'elle reste en contact avec la route ?

## Solutions

**2.8.5** *Presque envolé.*

Avec la 2<sup>e</sup> loi de Newton :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad m\vec{g} + \vec{n} = m\vec{a}$$

Prenons le système d'axe en  $y$  orienté vers le haut pour les  $y > 0$ . Puisque nous voulons la vitesse maximale pour que la voiture reste en contacte sur la trajectoire circulaire, nous posons :

- $\vec{n} = 0$  : Pas de contact avec le sol.
- $\vec{a} = \vec{a}_c$  : L'accélération de la voiture est de type centripète.

Ainsi :

$$\begin{aligned} m\vec{g} + \vec{n} = m\vec{a} &\quad \Rightarrow \quad -mg = -ma_c \\ &\quad \Rightarrow \quad g = \frac{v^2}{r} \\ &\quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{gr} = \sqrt{(9,8)(200)} \\ &\quad \Rightarrow \quad v = 44,27 \text{ m/s} \\ &\quad \Rightarrow \quad \boxed{v = 159,4 \text{ km/h}} \end{aligned}$$





# Chapitre 2.10 – Les forces exercées par les fluides

## Force d'Archimède

Au 3<sup>ème</sup> siècle avant J-C, le grec Archimède de Syracuse réalise que tout objet plongé dans un fluide (liquide ou gazeux) soumis à un champ gravitationnel subit une force dans le sens opposé au champ gravitationnel. Le module de la force d'Archimède dépend du volume  $V$  de fluide déplacé, de la masse volumique  $\rho$  du fluide et du champ gravitationnelle  $\vec{g}$  où le fluide est situé :

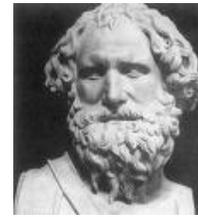
$$\vec{F}_A = -\rho V \vec{g}$$

où  $\vec{F}_A$  : Force d'Archimède, orientée dans le sens contraire de  $\vec{g}$  (N)

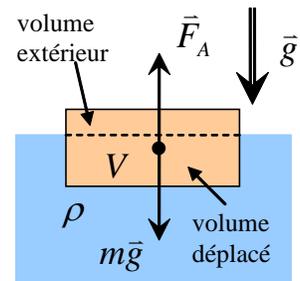
$\rho$  : Masse volumique du fluide déplacé ( $\text{kg/m}^3$ )

$V$  : Volume du fluide déplacé (volume de l'objet dans le fluide) ( $\text{m}^3$ )

$\vec{g}$  : Le champ gravitationnel où le fluide est situé (N/kg)



Archimède  
(287-212 av. J.C.)



N.B. Lorsqu'un objet possède une **masse volumique inférieure** à la **masse volumique du fluide**, l'objet subit une **force d'Archimède supérieure** à la **force gravitationnelle** :

### Exemple :

- Du cèdre ( $490 \text{ kg/m}^3$ ) flotte sur l'eau ( $998,2 \text{ kg/m}^3$ ). Une barre d'acier ( $7800 \text{ kg/m}^3$ ) tombe au fond d'un bassin d'eau ( $998,2 \text{ kg/m}^3$ ).



- Un bateau (même en acier) flotte, car il pousse une masse d'eau supérieure à la masse totale du bateau.



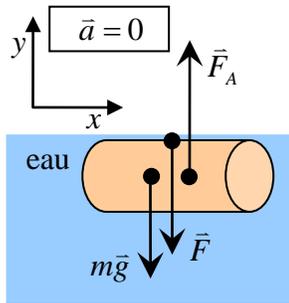
- Une montgolfière peut prendre de l'altitude, car le pilote contrôle la température de l'air à l'intérieur du ballon ce qui permet à l'air d'avoir une masse volumique inférieure à la masse volumique à l'extérieur du ballon.



**Situation A : Bouchon de liège.** Albert pousse verticalement sur le dessus d'un bouchon de liège ( $\rho_{\text{liège}} = 240 \text{ kg/m}^3$ ) de forme cylindrique (1 cm de rayon et 4 cm de hauteur) flottant sur l'eau ( $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg/m}^3$ ). On désire déterminer la force qu'Albert doit appliquer sur le bouchon afin que celui-ci soit en équilibre et complètement dans l'eau.



Voici le schéma des forces de la situation : Résolution de la 2<sup>e</sup> loi de Newton graphiquement :



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{où} \quad \vec{F} + m\vec{g} + \vec{F}_A = 0$$

Évaluons le volume du bouchon à partir du volume d'un cylindre :

$$\begin{aligned} V = \pi R^2 h &\Rightarrow V = \pi(0,01)^2(0,04) && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ &\Rightarrow V = 1,257 \times 10^{-5} \text{ m}^3 && \text{(Évaluer le volume)} \end{aligned}$$

Évaluons la masse totale du bouchon :

$$\begin{aligned} m = \rho_{\text{liège}} V &\Rightarrow m = (240)(1,257 \times 10^{-5}) && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ &\Rightarrow m = 3,017 \times 10^{-3} \text{ kg} && \text{(Évaluer la masse)} \end{aligned}$$

Évaluons la force appliquée par Albert lorsque le bouchon est en équilibre sous la surface de l'eau à partir de la 2<sup>ième</sup> loi de Newton selon l'axe y :

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow F_A - mg - F = 0 && \text{(Remplacer } \sum F_y \text{)} \\ &\Rightarrow F = F_A - mg && \text{(Isoler } F \text{)} \\ &\Rightarrow F = \rho_{\text{eau}} Vg - mg && \text{(Remplacer } F_A = \rho_{\text{eau}} Vg \text{)} \\ &\Rightarrow F = (1000)(1,257 \times 10^{-5})(9,8) - (3,017 \times 10^{-3})(9,8) && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ &\Rightarrow F = 9,362 \times 10^{-2} \text{ N} && \text{(Évaluer } F \text{)} \end{aligned}$$

## Frottement de viscosité

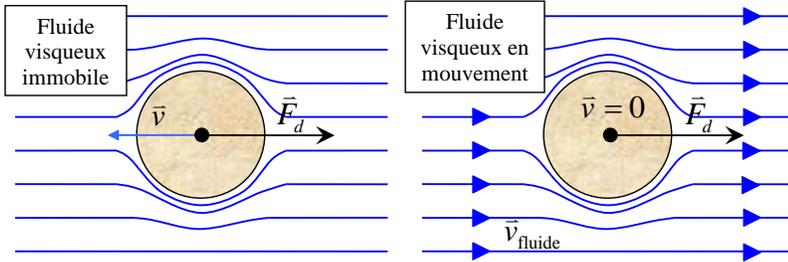
Lorsqu'un objet se déplace dans un fluide visqueux, le fluide applique une force de résistance sur l'objet<sup>1</sup> dans le sens contraire de la vitesse de l'objet en raison de sa difficulté à contourner l'objet. Cette force très difficile à évaluer théoriquement est causée par le frottement du fluide contre la paroi de l'objet et par le vide partiel créé derrière l'objet. Les paramètres à considérer sont les suivants :



- La vitesse  $v$  de l'objet.
- La forme de l'objet
- La section de surface  $A$  face à l'écoulement du fluide.
- La texture des parois de l'objet.
- La viscosité  $\eta$  du fluide.
- La masse volumique  $\rho$  du fluide.
- Zone de turbulence (écoulement chaotique du fluide) derrière l'objet.

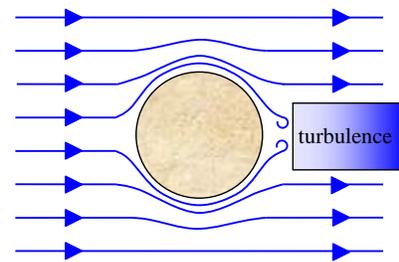
Frottement de viscosité à faible vitesse<sup>2</sup> :  
(écoulement du fluide laminaire)

$$\vec{F}_d = -b \vec{v}$$



Frottement de viscosité :  
(écoulement du fluide turbulent)

$$\vec{F}_d = -\frac{1}{2} C_d \rho A v^2 \hat{v}$$



- où
- $\vec{F}_d$  : Frottement de viscosité appliquée par le fluide (N)
  - $\vec{v}$  : Vitesse de l'objet subissant la résistance (m/s)
  - $\hat{v}$  : Vecteur orientation de la vitesse
  - $b$  : Constante de résistance (incluant la viscosité et la forme de l'objet) (kg/s)
  - $C_d$  : Coefficient de résistance (sans unité)
  - $\rho$  : Masse volumique du fluide (kg/m<sup>3</sup>)
  - $A$  : Section efficace de surface perpendiculaire à l'écoulement du fluide (m<sup>2</sup>)

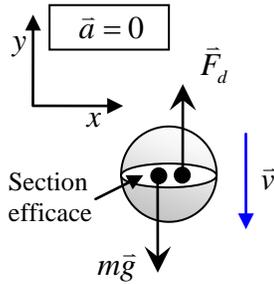
**P.S.** Dans la représentation précédente, nous pouvons concevoir l'objet immobile et le fluide en mouvement. Le **fluide** se déplace à **grande vitesse** lorsque les **lignes de vitesse** sont **rapprochées** les une des autres.

<sup>1</sup> Ce frottement porte le nom de « drag » en anglais.

<sup>2</sup> Ce type de frottement porte également le nom de loi de Stokes.

**Situation B : La vitesse limite.** Une bille d'acier de 5 cm de rayon et de 4,2 kg est lancée depuis un avion à très haute altitude. La masse volumique de l'air au niveau du sol est de  $1,19 \text{ kg/m}^3$  et le coefficient de résistance de la bille lorsqu'elle atteint sa vitesse maximale est de 0,1. On désire évaluer la vitesse limite atteinte par la bille d'acier avant qu'elle touche le sol. (On néglige la force d'Archimède et la déformation de la bille.)

Voici le schéma des forces de la situation : Résolution de la 2<sup>e</sup> loi de Newton graphiquement :



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{où} \quad m\vec{g} + \vec{F}_d = 0$$

Évaluons la section efficace de la bille qui représente un disque :

$$A = \pi R^2 \quad \Rightarrow \quad A = \pi(0,05)^2 \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A = 7,854 \times 10^{-3} \text{ m}^2} \quad (\text{Évaluer } A)$$

À partir de la 2<sup>ième</sup> loi de Newton selon l'axe y, évaluons la vitesse limite :

$$\sum F_y = 0 \quad \Rightarrow \quad F_d - mg = 0 \quad (\text{Remplacer } \sum F_y)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} C_d \rho A v^2 - mg = 0 \quad (\text{Remplacer } F_d = \frac{1}{2} C_d \rho A v^2)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{2mg}{C_d \rho A}}} \quad (\text{Isoler } v)$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2(4,2)(9,8)}{(0,1)(1,19)(7,854 \times 10^{-3})}} \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v = 296,8 \text{ m/s}} \quad (\text{Évaluer } v)$$

La bille n'atteint pas la vitesse du son qui est de 340 m/s.









# Chapitre 2.X1 – La dynamique différentielle

## L'équation différentielle

Une équation différentielle est une relation entre plusieurs fonctions et leurs dérivées. À partir de cette équation, on peut parfois déduire par des techniques mathématiques ou par intuition les fonctions qui vérifient l'équation différentielle en question. Autrement, il faut procéder de façon numérique à l'aide d'algorithmes comme ceux présentés dans le **Chapitre 1.X1 : Intégrale numérique en cinématique**.

Voici quelques équations différentielles connues en physique :

La chute libre :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + g = 0$$

La chute avec résistance au mouvement du 1<sup>er</sup> degré :

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{b}{m} \frac{dy}{dt} + g = 0$$

L'oscillateur harmonique simple :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

L'oscillateur harmonique simple amorti :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

L'oscillateur harmonique simple amorti-entretenu :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \eta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A \cos(\omega t)$$

L'équation d'onde :

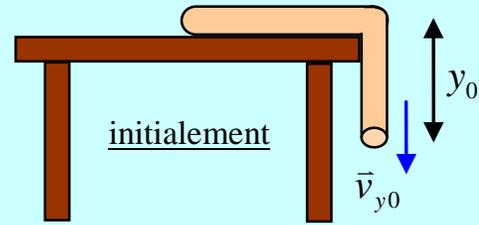
$$\frac{d^2 y}{dt^2} - v^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

Toutes ces équations ressemblent quelque peu à l'équation quadratique

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ,$$

mais les résoudre est beaucoup plus difficile. Leurs solutions ne sont pas des nombres réels  $x$  mais plutôt des fonctions du temps  $x(t)$  qui peuvent prendre différentes formes équivalentes.

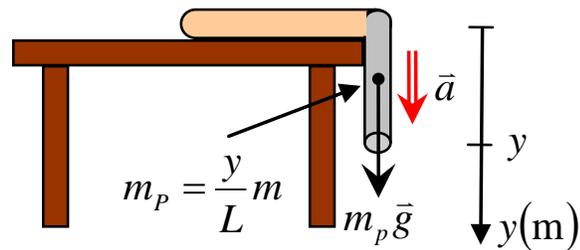
**Situation 1 : La corde sur le bord de la table.** Une corde de longueur  $L$  et de masse  $m$  glisse sans frottement sur le bord d'une table horizontale. Initialement, l'extrémité pendante de la corde est située à une hauteur  $y_0$  sous la table et se déplace à une vitesse  $v_{y0}$  (voir schéma ci-contre).



On désire **(a)** faire un schéma des forces et définir la 2<sup>ième</sup> loi de Newton pour cette situation, **(b)** écrire l'équation différentielle associée à la situation et **(c)** évaluer l'équation de la vitesse  $v_y(y)$  de l'extrémité de la corde en résolvant l'équation différentielle dans le domaine compris entre  $y = y_0$  et  $y = L$ .

Effectuons le schéma des forces et écrivons l'expression de la 2<sup>ième</sup> loi de Newton selon l'axe y positif vers le bas. Il est important de noter que seulement la portion de corde qui est à la verticale  $m_p$  va appliquer une force gravitationnelle pour pousser l'ensemble de la corde :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= m\vec{a} \\ \Rightarrow m_p \vec{g} &= m\vec{a} \\ \Rightarrow m_p g &= ma_y \\ \Rightarrow \boxed{\frac{y}{L} mg = ma_y} & \quad \text{(a)} \end{aligned}$$



(sans les forces sur la partie de corde horizontale)

À partir de la 2<sup>ième</sup> loi de Newton et de la définition de l'accélération, écrivons l'équation différentielle de la situation :

$$\begin{aligned} \frac{y}{L} mg = ma_y & \Rightarrow \frac{y}{L} g = a_y && \text{(Simplifier } m) \\ \Rightarrow a_y - \frac{y}{L} g &= 0 && \text{(Mettre l'équation égale à zéro)} \\ \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{g}{L} y = 0} & \quad \text{(b)} && \text{(Remplacer } a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} \right) = \frac{d^2 y}{dt^2} ) \end{aligned}$$

Résolvons l'équation différentielle en évaluant la fonction de la vitesse  $v_y(y)$  :

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{g}{L} y = 0 && \text{(Équation différentielle)} \\ \Rightarrow & \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{g}{L} y && \text{(Isoler terme en } y) \\ \Rightarrow & \frac{dv_y}{dt} = \frac{g}{L} y && \text{(Remplacer } \frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{dv_y}{dt} \text{)} \\ \Rightarrow & \frac{dv_y}{dt} \frac{dy}{dy} = \frac{g}{L} y && \text{(Multiplier par 1, } \frac{dy}{dy} = 1) \\ \Rightarrow & dv_y \frac{v_y}{dy} = \frac{g}{L} y && \text{(Remplacer } v_y = \frac{dy}{dt} \text{)} \\ \Rightarrow & v_y dv_y = \frac{g}{L} y dy && \text{(Regrouper terme en } y \text{ et } v_y) \\ \Rightarrow & \int_{v_y=v_{y0}}^{v_y} v_y dv_y = \int_{y=y_0}^y \frac{g}{L} y dy && \text{(Poser l'intégrale)} \\ \Rightarrow & \int_{v_y=v_{y0}}^{v_y} v_y dv_y = \frac{g}{L} \int_{y=y_0}^y y dy && \text{(Factoriser les constantes)} \\ \Rightarrow & \left[ \frac{v_y^2}{2} \right]_{v_{y0}}^{v_y} = \frac{g}{L} \left[ \frac{y^2}{2} \right]_{y_0}^y && \text{(Résoudre l'intégrale : } \int x dx = x^2 / 2 + C) \\ \Rightarrow & \left( \frac{(v_y)^2}{2} - \frac{(v_{y0})^2}{2} \right) = \frac{g}{L} \left( \frac{(y)^2}{2} - \frac{(y_0)^2}{2} \right) && \text{(Évaluer l'intégrale)} \\ \Rightarrow & v_y^2 - v_{y0}^2 = \frac{g}{L} (y^2 - y_0^2) && \text{(Simplifier le facteur 2)} \\ \Rightarrow & \boxed{v_y = \sqrt{\frac{g}{L} (y^2 - y_0^2) + v_{y0}^2}} \quad \text{(c)} && \text{(Isoler } v_y) \end{aligned}$$

Condition limite :

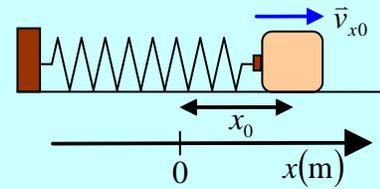
- $y \leq L$ , car la position ne peut pas dépasser  $L$ , sinon la corde est complètement tombée.)
- Si  $y \geq L$ , l'équation différentielle change de forme et la solution de l'équation du mouvement change également. Il y a donc changement de palier vers une chute libre tel que

$$\frac{d^2 y}{dt^2} - g = 0 \quad \text{et} \quad v_y = v_{y0} + g t$$

Équation différentielle de la chute libre  
où est  $y$  positif vers le bas.

Équation du mouvement de type  
MUA où  $y$  positif vers le bas.

**Situation 2 : Le système masse-ressort.** Un bloc de masse  $m$  fixé à un ressort de constante de rappel  $k$  oscille horizontalement. Le bloc est situé initialement à la coordonnée  $x_0$  par rapport au point d'équilibre et qu'il se déplace à la vitesse initiale  $v_{x0}$ .



On désire **(a)** faire un schéma des forces et définir la 2<sup>ième</sup> loi de Newton pour cette situation, **(b)** écrire l'équation différentielle associée à la situation et **(c)** évaluer l'équation de la position  $x(t)$  du bloc en résolvant l'équation différentielle.

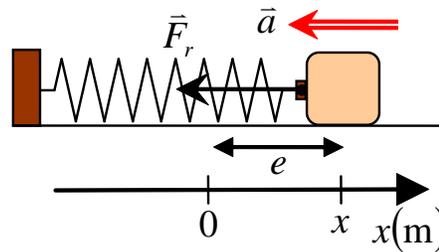
Effectuons le schéma des forces et écrivons l'expression de la 2<sup>ième</sup> loi de Newton selon l'axe  $x$  positif vers la droite. Puisque le système masse-ressort à l'horizontale est à l'équilibre lorsque le ressort n'est pas déformé ( $e = 0$ ), nous pouvons affirmer que la déformation du ressort  $e$  est égale à la position  $x$  du bloc ( $x = 0$ ) :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow \vec{F}_r = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow -ke = ma_x \quad (F_r = -ke)$$

$$\Rightarrow \boxed{-kx = ma_x} \quad \text{(a)}$$



(sans les forces verticales)

À partir de la 2<sup>ième</sup> loi de Newton et de la définition de l'accélération, écrivons l'équation différentielle de la situation :

$$-kx = ma_x \quad \Rightarrow \quad -\frac{k}{m}x = a_x \quad \text{(Diviser par } m)$$

$$\Rightarrow \quad a_x + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{(Mettre l'équation égale à zéro)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0} \quad \text{(b)} \quad \text{(Remplacer } a_x = \frac{d^2x}{dt^2})$$

Résolvons l'équation différentielle en évaluant la fonction de la position  $x(t)$  :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{(Équation différentielle)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2x = 0 \quad \text{(Remplacer } \omega^2 = k/m, \text{ fréquence angulaire)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x \quad \text{(Séparer les termes)}$$

Exprimons la dérivée seconde de la position en fonction de la dérivée première de la vitesse :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \quad (\text{Équation précédente})$$

$$\Rightarrow \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 x \quad (\text{Remplacer } \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv_x}{dt})$$

$$\Rightarrow dv_x = -\omega^2 x dt \quad (\text{Isoler } dv_x)$$

$$\Rightarrow dv_x = -\omega^2 x dt \frac{dx}{dx} \quad (\text{Multiplier par } 1 = \frac{dx}{dx})$$

$$\Rightarrow dv_x = -\omega^2 x dx \frac{dt}{dx} \quad (\text{Manipulation})$$

$$\Rightarrow dv_x = -\omega^2 x dx \frac{1}{v_x} \quad (\text{Remplacer } v_x = \frac{dx}{dt} \text{ donc } \frac{1}{v_x} = \frac{dt}{dx})$$

$$\Rightarrow v_x dv_x = -\omega^2 x dx \quad (\text{Multiplier par } v_x)$$

$$\Rightarrow \int_{v_x=v_{x0}}^{v_x} v_x dv_x = \int_{x=x_0}^x -\omega^2 x dx \quad (\text{Effectuer l'intégrale entre } t=0 \text{ et } t)$$

$$\Rightarrow \int_{v_x=v_{x0}}^{v_x} v_x dv_x = -\omega^2 \int_{x=x_0}^x x dx \quad (\text{Factoriser les constantes})$$

$$\Rightarrow \left[ \frac{v_x^2}{2} \right]_{v_{x0}}^{v_x} = -\omega^2 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_{x_0}^x \quad (\text{Résoudre l'intégrale : } \int x dx = x^2/2 + C)$$

$$\Rightarrow \left( \frac{(v_x)^2}{2} - \frac{(v_{x0})^2}{2} \right) = -\omega^2 \left( \frac{(x)^2}{2} - \frac{(x_0)^2}{2} \right) \quad (\text{Évaluer l'intégrale})$$

$$\Rightarrow v_x^2 - v_{x0}^2 = -\omega^2 (x^2 - x_0^2) \quad (\text{Simplifier } 1/2)$$

$$\Rightarrow v_x^2 = -\omega^2 (x^2 - x_0^2) + v_{x0}^2 \quad (\text{Isoler } v_x^2)$$

$$\Rightarrow v_x^2 = -\omega^2 \left( x^2 - x_0^2 - \frac{v_{x0}^2}{\omega^2} \right) \quad (\text{Mettre } v_{x0}^2 \text{ dans la parenthèse})$$

$$\Rightarrow v_x^2 = -\omega^2 \left( x^2 - \left( x_0^2 + \frac{v_{x0}^2}{\omega^2} \right) \right) \quad (\text{Factoriser signe négatif})$$

$$\Rightarrow v_x^2 = -\omega^2 (x^2 - A^2) \quad (\text{Remplacer } A^2 = x_0^2 + \frac{v_{x0}^2}{\omega^2}, \text{ amplitude})$$

Afin d'éviter les nombres complexes ( $i = \sqrt{-1}$ ) lorsqu'on appliquera la racine carré pour isoler  $v_x$ , il faudra entrer le signe négatif devant l'expression de droite dans la parenthèse :

$$\begin{aligned}
v_x^2 &= -\omega^2(x^2 - A^2) && \text{(Expression précédente)} \\
\Rightarrow v_x^2 &= \omega^2(A^2 - x^2) && \text{(Distribuer négatif afin d'éviter } i = \sqrt{-1} \text{)} \\
\Rightarrow \boxed{v_x = \omega\sqrt{A^2 - x^2}} &&& \text{(Effectuer la racine carrée, on obtient } v_x(x) \text{)} \\
\Rightarrow \frac{dx}{dt} &= \omega\sqrt{A^2 - x^2} && \text{(Remplacer } v_x = \frac{dx}{dt} \text{)} \\
\Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} &= \omega dt && \text{(Mettre les termes en } x \text{ ensemble)} \\
\Rightarrow \int_{x=x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} &= \int_{t=0}^t \omega dt && \text{(Effectuer l'intégrale entre } t = 0 \text{ et } t \text{)} \\
\Rightarrow [\arcsin(x/A)]_{x_0}^x &= \omega[t]_0^t && \text{(Résoudre l'intégrale : } \int \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}} = \arcsin(x/A) \text{)} \\
\Rightarrow \arcsin(x/A) - \arcsin(x_0/A) &= \omega t && \text{(Évaluer l'intégrale)} \\
\Rightarrow \arcsin(x/A) &= \omega t + \arcsin(x_0/A) && \text{(Isoler le terme } \arcsin(x/A) \text{)} \\
\Rightarrow \arcsin(x/A) &= \omega t + \phi && \text{(Remplacer } \phi = \arcsin(x_0/A) \text{, phase)} \\
\Rightarrow x/A &= \sin(\omega t + \phi) && \text{(Appliquer le sinus : } \sin(\arcsin(x)) = x \text{)} \\
\Rightarrow \boxed{x = A \sin(\omega t + \phi)} & \text{ (c)} && \text{(Isoler } x \text{)}
\end{aligned}$$

Rappel :

- $\omega = \sqrt{k/m}$  (Fréquence angulaire des oscillations)
- $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_{x0}^2}{\omega^2}}$  (Amplitude des oscillations)
- $\phi = \arcsin(x_0/A)$  (Constante de phase)

Condition limite :

- $A^2 - x^2 > 0$  (La position  $x$  ne peut pas être supérieure à l'amplitude  $A$ .)

**Situation 3 : Une bille tombe à l'eau.** Une bille de masse  $m$  tombe verticalement à l'eau et se déplace à une vitesse initiale  $v_{v0}$  lorsqu'elle est complètement submergée dans l'eau. Durant sa chute, la résistance de l'eau exerce sur la bille une force  $\vec{f}_{\text{eau}} = -b\vec{v}$  qui dépend de la vitesse de la bille. On désire **(a)** faire un schéma des forces et définir la 2<sup>ème</sup> loi de Newton pour cette situation, **(b)** écrire l'équation différentielle associée à la situation, **(c)** évaluer l'équation de la vitesse  $v_y(t)$  en résolvant l'équation différentielle et **(d)** évaluer l'équation de la position  $y(t)$ . On néglige la force d'Archimède qu'applique l'eau sur la bille.

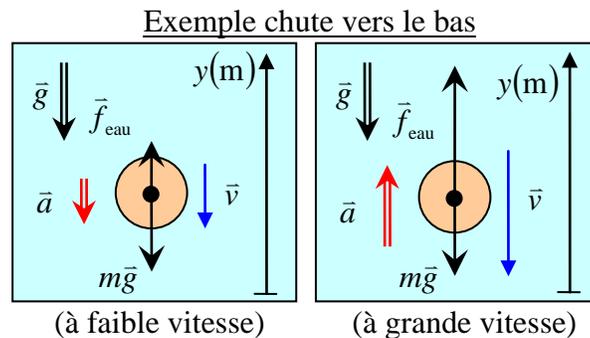
Effectuons le schéma des forces et écrivons l'expression de la 2<sup>ème</sup> loi de Newton selon l'axe  $y$  positif vers le haut :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow m\vec{g} + \vec{f}_{\text{eau}} = m\vec{a}$$

$$\Rightarrow m\vec{g} - b\vec{v} = m\vec{a} \quad (\vec{f}_{\text{eau}} = -b\vec{v})$$

$$\Rightarrow \boxed{-mg - bv_y = ma_y} \quad \text{(a)}$$



À partir de la 2<sup>ème</sup> loi de Newton et de la définition de l'accélération, écrivons l'équation différentielle de la situation :

$$-mg - bv_y = ma_y \quad \Rightarrow \quad -g - \frac{b}{m}v_y = a_y \quad (\text{Simplifier } m)$$

$$\Rightarrow a_y + \frac{b}{m}v_y + g = 0 \quad (\text{Écrire termes du même côté})$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dv_y}{dt} + \frac{b}{m}v_y + g = 0} \quad \text{(b)} \quad (\text{Remplacer } a_y = \frac{dv_y}{dt})$$

Résolvons l'équation différentielle en évaluant la fonction de la vitesse  $v_y(t)$  :

$$\frac{dv_y}{dt} + \frac{b}{m}v_y + g = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv_y}{dt} = -g - \frac{b}{m}v_y \quad (\text{Isoler le terme } \frac{dv_y}{dt})$$

$$\Rightarrow \frac{dv_y}{dt} = -g \left( 1 + \frac{b}{mg}v_y \right) \quad (\text{Factoriser } g)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dv_y}{dt} = -g \left( 1 + \frac{v_y}{v_L} \right)} \quad (\text{Remplacer}^1 v_L = mg/b)$$

<sup>1</sup> Le changement de variable  $v_L = mg/b$  correspond à la vitesse limite car  $[v_L] = \text{m/s}$ .

Continuons à développer notre expression en isolant les deux composantes infinitésimales :

$$\begin{aligned} \frac{dv_y}{dt} &= -g \left( 1 + \frac{v_y}{v_L} \right) \Rightarrow dv_y = -g \left( 1 + \frac{v_y}{v_L} \right) dt && \text{(Isoler } dv_y \text{)} \\ \Rightarrow g dt &= - \frac{dv_y}{1 + v_y / v_L} && \text{(Regrouper terme en } v_y \text{)} \\ \Rightarrow \int_{t=0}^t g dt &= - \int_{v_y=v_{y0}}^{v_y} \frac{dv_y}{1 + v_y / v_L} && \text{(Poser l'intégrale avec les bornes)} \\ \Rightarrow g \int_{t=0}^t dt &= - \int_{v_y=v_{y0}}^{v_y} \frac{dv_y}{1 + v_y / v_L} && \text{(Factoriser la constante } g \text{)} \\ \Rightarrow \boxed{g t = - \int_{v_y=v_{y0}}^{v_y} \frac{dv_y}{1 + v_y / v_L}} &&& \text{(Résoudre l'intégrale sur } t \text{)} \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable

$$u = 1 + v_y / v_L$$

afin de résoudre notre intégrale sur  $v_y$ . Ce changement nous donne les relations différentielles

$$du = dv_y / v_L \quad \text{et} \quad dv_y = v_L du .$$

Les bornes de l'intégrale prennent les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} v_y \rightarrow v_{y0} &\Rightarrow u \rightarrow u_0 = 1 + v_{y0} / v_L \\ v_y \rightarrow v_y &\Rightarrow u \rightarrow u = 1 + v_y / v_L \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} g t = - \int_{v_y=v_{y0}}^{v_y} \frac{dv_y}{1 + v_y / v_L} &\Rightarrow g t = - \int_{u=u_0}^u \frac{v_L du}{u} && \text{(Remplacer } v_y \text{ et } dv_y \text{)} \\ \Rightarrow g t = -v_L \int_{u=u_0}^u \frac{du}{u} &&& \text{(Factoriser constante } -v_L \text{)} \\ \Rightarrow g t = -v_L [\ln|u|]_{u_0}^u &&& \text{(Résoudre l'intégrale : } \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C \text{)} \\ \Rightarrow g t = -v_L (\ln|u| - \ln|u_0|) &&& \text{(Évaluer l'intégrale)} \\ \Rightarrow g t = -v_L \ln \left| \frac{u}{u_0} \right| &&& \text{(Identité : } \ln(A) - \ln(B) = \ln(A/B) \text{)} \\ \Rightarrow \boxed{- \frac{g t}{v_L} = \ln \left| \frac{u}{u_0} \right|} &&& \text{(Isoler terme ln)} \end{aligned}$$

Appliquons la fonction exponentielle de chaque côté afin d'isoler  $u$  qui contient une référence à la vitesse  $v_y$  recherchée :

$$\begin{aligned}
 -\frac{gt}{v_L} &= \ln \left| \frac{u}{u_0} \right| & \Rightarrow & e^{-\frac{gt}{v_L}} = \frac{u}{u_0} & & \text{(Appliquer l'exponentiel : } e^{\ln x} = x \text{)} \\
 & & \Rightarrow & u_0 e^{-\frac{gt}{v_L}} = u & & \text{(Isoler } u \text{)} \\
 & & \Rightarrow & \left(1 + v_{y0}/v_L\right) e^{-\frac{gt}{v_L}} = 1 + v_y/v_L & & \text{(Remplacer } u \text{ et } u_0 \text{)} \\
 & & \Rightarrow & \left(1 + v_{y0}/v_L\right) e^{-\frac{gt}{v_L}} = \frac{v_L + v_y}{v_L} & & \text{(Dénominateur commun)} \\
 & & \Rightarrow & v_L \left(1 + v_{y0}/v_L\right) e^{-\frac{gt}{v_L}} = v_L + v_y & & \text{(Multiplier par } v_L \text{)} \\
 & & \Rightarrow & v_y = v_L \left(1 + v_{y0}/v_L\right) e^{-\frac{gt}{v_L}} - v_L & & \text{(Isoler } v_y \text{)} \\
 & & \Rightarrow & \boxed{v_y = \left(v_L + v_{y0}\right) e^{-\frac{gt}{v_L}} - v_L} & \text{(c)} & \text{(Distribuer } v_L \text{)}
 \end{aligned}$$

On réalise que l'équation de la vitesse  $v_y$  tend vers la valeur  $-v_L$  lorsque  $t \rightarrow \infty$  ce qui représente la vitesse limite de la chute avec la résistance de l'eau :

$$\begin{aligned}
 -v_L &= \lim_{t \rightarrow \infty} v_y(t) & \Rightarrow & -v_L = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \left(v_L + v_{y0}\right) e^{-\frac{gt}{v_L}} - v_L \right) & & \text{(Remplacer } v_y \text{)} \\
 & & \Rightarrow & -v_L = -v_L + \lim_{t \rightarrow \infty} \left(v_L + v_{y0}\right) e^{-\frac{gt}{v_L}} & & \text{(Sortir constante de la limite)} \\
 & & \Rightarrow & -v_L = -v_L + \left(v_L + v_{y0}\right) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{gt}{v_L}} & & \text{(Factoriser constante de la limite)} \\
 & & \Rightarrow & -v_L = -v_L + \lim_{t \rightarrow \infty} \left(v_L + v_{y0}\right) e^{-\infty} & & \\
 & & \Rightarrow & -v_L = -v_L & & \blacksquare
 \end{aligned}$$

Rappel :

- $v_L = mg/b$  (Vitesse limite de la chute)

Évaluons l'équation de la position  $y(t)$  de la bille à partir de son équation  $v_y(t)$  :

$$v_y = (v_L + v_{y0})e^{-\frac{gt}{v_L}} - v_L \quad (\text{Expression de } v_y)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = (v_L + v_{y0})e^{-\frac{gt}{v_L}} - v_L \quad (\text{Remplacer } v_y = \frac{dy}{dt})$$

$$\Rightarrow dy = \left[ (v_L + v_{y0})e^{-\frac{gt}{v_L}} - v_L \right] dt \quad (\text{Isoler } dy)$$

$$\Rightarrow \int_{y=y_0}^y dy = \int_{t=0}^t \left[ (v_L + v_{y0})e^{-\frac{gt}{v_L}} - v_L \right] dt \quad (\text{Poser l'intégrale avec les bornes})$$

$$\Rightarrow \int_{y=y_0}^y dy = \int_{t=0}^t (v_L + v_{y0})e^{-\frac{gt}{v_L}} dt + \int_{t=0}^t -v_L dt \quad (\text{Distribuer l'intégrale})$$

$$\Rightarrow \int_{y=y_0}^y dy = (v_L + v_{y0}) \int_{t=0}^t e^{-\frac{gt}{v_L}} dt - v_L \int_{t=0}^t dt \quad (\text{Factoriser constante})$$

$$\Rightarrow [y]_{y_0}^y = (v_L + v_{y0}) \int_{t=0}^t e^{-\frac{gt}{v_L}} dt - v_L [t]_0^t \quad (\text{Résoudre l'intégrale : } \int dy = y, \int dt = t)$$

$$\Rightarrow (y - y_0) = (v_L + v_{y0}) \int_{t=0}^t e^{-\frac{gt}{v_L}} dt - v_L (t - 0) \quad (\text{Évaluer les intégrales})$$

$$\Rightarrow \boxed{y = y_0 - v_L t + (v_L + v_{y0}) \int_{t=0}^t e^{-\frac{gt}{v_L}} dt} \quad (\text{Isoler } y)$$

Résolvons l'intégrale restante avec le changement de variable  $u$  :

$$I = \int e^{-\frac{gt}{v_L}} dt \quad \text{avec} \quad u = -\frac{gt}{v_L} \quad \text{et} \quad du = -\frac{g}{v_L} dt$$

$$\quad \quad \quad \text{tel que} \quad dt = -\frac{v_L}{g} du$$

$$I = \int e^{-\frac{gt}{v_L}} dt \quad \Rightarrow \quad I = \int -\frac{v_L}{g} e^u du \quad (\text{Changement de variable})$$

$$\quad \quad \quad \Rightarrow \quad I = -\frac{v_L}{g} \int e^u du \quad (\text{Factoriser constante})$$

$$\quad \quad \quad \Rightarrow \quad I = -\frac{v_L}{g} e^u \quad (\text{Résoudre l'intégrale : } \int e^u du = e^u)$$

$$\quad \quad \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = -\frac{v_L}{g} e^{-\frac{gt}{v_L}}} \quad (\text{Remplacer } u = -\frac{gt}{v_L})$$

Évaluons les bornes de l'intégrale entre  $t = 0 \rightarrow t$  :

$$I_{\text{évalué}} = \int_{t=0}^t e^{-\frac{gt}{v_L}} dt \quad \Rightarrow \quad I_{\text{évalué}} = \left[ -\frac{v_L}{g} e^{-\frac{gt}{v_L}} \right]_0^t \quad (\text{Résoudre l'intégrale})$$

$$\Rightarrow \quad I_{\text{évalué}} = \left( -\frac{v_L}{g} e^{-\frac{gt}{v_L}} \right) - \left( -\frac{v_L}{g} e^{-\frac{g(0)}{v_L}} \right) \quad (\text{Évaluer l'intégrale})$$

$$\Rightarrow \quad I_{\text{évalué}} = -\frac{v_L}{g} e^{-\frac{gt}{v_L}} + \frac{v_L}{g} \quad (\text{Simplifier et } e^0 = 1)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_{\text{évalué}} = \frac{v_L}{g} \left( 1 - e^{-\frac{gt}{v_L}} \right)} \quad (\text{Factoriser } \frac{v_L}{g})$$

Évaluons la position  $y(t)$  à partir des calculs précédents :

$$y = y_0 - v_L t + (v_L + v_{y0}) \int_{t=0}^t e^{-\frac{gt}{v_L}} dt \quad (\text{Équation précédente})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y = y_0 + v_L t + (v_L + v_{y0}) \frac{v_L}{g} \left( 1 - e^{-\frac{gt}{v_L}} \right)} \quad (\mathbf{d}) \quad (\text{Remplacer } \int_{t=0}^t e^{-\frac{gt}{v_L}} dt)$$











# Chapitre 3.1a – Le travail et l'énergie cinétique

## La 2<sup>e</sup> loi de Newton exploitée temporellement et spatialement

La 2<sup>e</sup> loi de Newton est une loi ayant pour but de décrire d'évolution de la vitesse. On peut décrire cette évolution dans le **temps** ou dans l'**espace** :

Dans le temps	Dans l'espace
$F_x = ma_x$ $\Rightarrow F_x = m \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$ $\Rightarrow \boxed{F_x \Delta t = m \Delta v_x}$	$F_x = ma_x$ $\Rightarrow F_x = m \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$ $\Rightarrow F_x = m \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \frac{\Delta x}{\Delta x}$ $\Rightarrow F_x \Delta x = m \frac{\Delta x}{\Delta t} \Delta v_x$ $\Rightarrow \boxed{F_x \Delta x = m \bar{v}_x \Delta v_x}$
Plus la force $F_x$ est appliquée sur un grand intervalle de temps $\Delta t$ , plus la variation de vitesse $\Delta v_x$ sera prononcée.	La variation de la vitesse $\Delta v_x$ dépend à la fois de l'ampleur du déplacement $\Delta x$ , mais également de la vitesse moyenne $\bar{v}_x$ acquise avant l'application de la force $F_x$ .

La résolution temporelle de la 2<sup>ième</sup> loi de Newton mènera au **théorème de la quantité de mouvement**, car l'application d'une force durant un intervalle de temps correspond à un **transfert de quantité de mouvement**  $\vec{p}$  portant le nom d'**impulsion**  $\vec{J}$  :

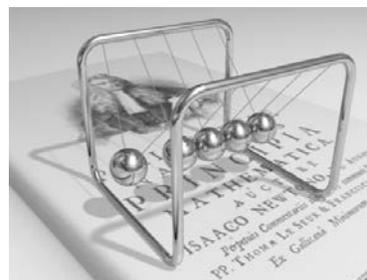
$$p_{xf} = p_{xi} + J_x \quad \text{où} \quad p_x = mv_x \quad \text{et} \quad J_x = F_x \Delta t \quad (\text{force constante})$$

La résolution spatiale de la 2<sup>ième</sup> loi de Newton mènera au **théorème de l'énergie cinétique**, car l'application d'une force sur une distance correspond à un **transfert d'énergie cinétique**  $K$  portant le nom de **travail**  $W$  :

$$K_f = K_i + W \quad \text{où} \quad K = \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{et} \quad W = F_x \Delta x \quad (\text{force constante})$$

Le pendule de Newton est un très bon montage pour illustrer la pertinence de ces deux théorèmes :

- Le théorème de la quantité de mouvement permet d'expliquer le nombre de bille en mouvement après une collision entre les billes.
- Le théorème de l'énergie cinétique permet d'expliquer l'évolution de la vitesse des billes en fonction de leur hauteur.



[http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Newton's\\_cradle\\_animation\\_book.gif](http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Newton's_cradle_animation_book.gif)

Pendule de Newton

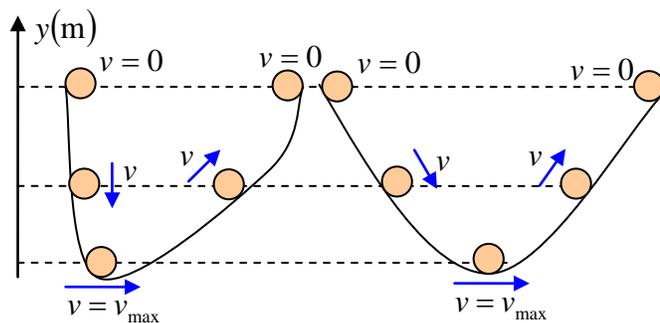
## La conservation

À l'époque de la Renaissance, l'astronome et physicien italien Galileo Galilei (Galilée) réalise que certains mouvements en absence de frottement conservent certaines grandeurs physiques dans le temps (valeurs indépendantes du temps). Une bille qui descend une rampe avec une vitesse initiale nulle remonte toujours à la hauteur d'origine (situation 1). La hauteur maximale d'un pendule est conservée tout au long des oscillations (situation 2). Il constate également que la conservation de ces grandeurs physique ne dépend pas du chemin emprunté par l'objet en mouvement.

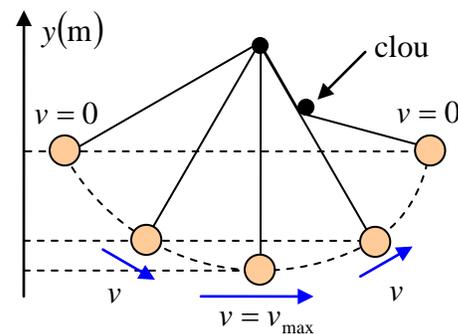


Galileo Galilei  
(1564-1642)

Situation 1 : Bille sur une rampe



Situation 2 : Pendule oscillant dans la gravité



Les deux situations précédentes proposent la conservation suivante indépendante du temps et indépendante du chemin emprunté par l'objet en mouvement :

« **Conservation du module de la vitesse pour une hauteur donnée** »

Malheureusement, Galilée ne fut pas en mesure de définir une grandeur physique constante indépendante du temps et du chemin valide pour l'ensemble des positions occupées par un objet en mouvement.

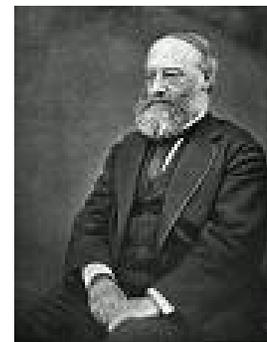
## L'énergie

L'énergie est introduite en 1845 par le physicien britannique James Prescott Joule et représente une grandeur physique constante en tout temps pour un système donné. Selon Joule, l'énergie est présente dans un système sous plusieurs formes et elle se transforme sans perte.

L'énergie permet de généraliser les observations de Galilée :

Une bille qui descend une rampe perd de « l'énergie de hauteur », mais gagne autant « d'énergie de mouvement ».

L'énergie totale du système est conservée.



James Joule  
(1784-1858)

L'énergie représente une « **action potentielle** » visant à **augmenter** le **module** de la **vitesse** d'un **objet**. Pour ce faire, l'énergie doit être **transformée** et **transférée** d'une source à une autre. L'énergie ne peut pas être créée ni être détruite, car elle ne fait que **changer de nature**. L'énergie totale d'un système est **constante** (conservée) en **tout temps**.

Notation mathématique :  $Energie = E$

Unité SI (joule) :  $[E] = J$

Exemple : Transformation de l'énergie d'une pile AA dans une voiture téléguidée

Une pile AA transforme son énergie chimique en énergie électrique. Cette énergie est alors transportée par le circuit électrique vers le moteur où celle-ci est transformée par le moteur de la voiture téléguidée en énergie mécanique permettant à la voiture d'augmenter le module de sa vitesse.



La pile est une source d'énergie chimique.



Les appareils électriques transforment l'énergie électrique.

## Les catégories d'énergies

On peut séparer les différentes sortes d'énergies en trois grandes catégories :

### 1) Énergie de mouvement

Énergie cinétique : Énergie associée à un objet en mouvement. Plus l'objet se rapidement, plus il y a d'énergie emmagasinée sous cette forme. Plus l'objet est plus il y a d'énergie emmagasinée sous cette forme

Ex : Voiture en mouvement



Énergie thermique : Énergie associée au mouvement désordonné des atomes et des molécules. Plus les éléments se déplacent rapidement, plus ils sont énergétiques. La **température** est une mesure de l'énergie thermique moyenne des atomes ou des molécules d'un système.

Ex : une montgolfière, eau chaude, etc.



### 2) Énergie potentielle

Énergie potentielle gravitationnelle : Énergie des liaisons gravitationnelles e masses. Lorsque les masses s'éloignent, l'énergie de liaison augmente et lors masses s'approchent, l'énergie de liaison diminue.

Ex : L'énergie gravitationnelle Terre-Lune



Énergie potentielle d'un ressort : Énergie emmagasinée dans la déformation du ressort. Lorsque le ressort se fait comprimer/étirer, il acquiert de l'énergie. Lorsque le ressort reprend sa forme naturelle, il perd de l'énergie.

Ex : Ressort dans un amortisseur



Énergie électrochimique : Énergie des liaisons électriques entre les atomes et les molécules. Lorsqu'il y a reconfiguration (réorganisation) des atomes ou des molécules, il y a dégagement d'énergie (exothermique) ou absorption d'énergie (endothermique).

Ex : combustion, explosion, réaction chimique, etc.



Énergie nucléaire : Énergie associée à la masse des atomes ( $E = mc^2$ ). Lorsqu'il y a transformation d'un atome vers un atome plus massif, il y a absorption d'énergie. Lorsqu'il y a transformation d'un atome vers un atome moins massif, il y a dégagement d'énergie.

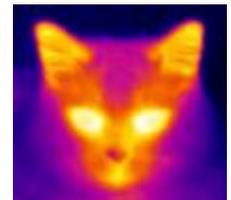
Ex : Combustion du Soleil ( $4H \rightarrow He + \text{énergie}$  : perte en masse de 0,702%)



### 3) Énergie de radiation

Énergie électromagnétique : Énergie associée aux photons (transporteur de l'énergie électromagnétique) présents dans le système. Cette énergie voyage dans le vide. Toute substance dont la température est supérieure à 0 K (-273 C) émet des radiations électromagnétiques. De plus, les réactions chimiques et les réactions nucléaires produisent également des radiations électromagnétiques.

Ex : corps humain (infrarouge), radiation du Soleil

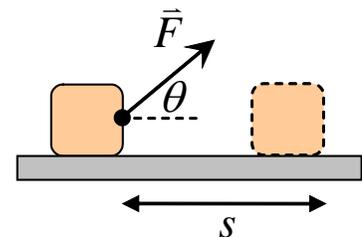


## Le travail

Le **travail**  $W$  est le processus de **transformation de l'énergie** causé par l'application d'une **force**  $F$  sur un objet effectuant un **déplacement**  $s$ . Seule la composante de la **force** qui est **parallèle** au déplacement ( $F \cos \theta$ ) effectue un travail. La composante de la force perpendiculaire au déplacement ( $F \sin \theta$ ) n'effectue pas de travail :

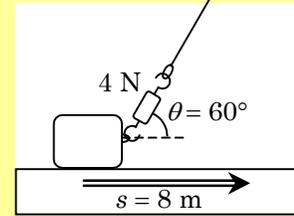
$$W = F s \cos(\theta) \quad \text{et} \quad W = \Delta E$$

- où
- $W$  : Le travail effectué par la force  $F$  (J)
  - $\Delta E$  : Variation d'énergie causée par le travail (J)
  - $F$  : Module de la force qui effectue le travail (N)
  - $s$  : Déplacement sur laquelle la force est appliquée (m)
  - $\theta$  : Angle entre l'orientation de la force et le déplacement



Unité (Joule) :  $J = [W] = [F][s] = \text{N m} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \text{m} = \text{kg m}^2/\text{s}^2$

**Situation 2 : Le travail sur un bloc, prise 2.** Béatrice tire sur le bloc de la **situation 1** avec une force de module  $F = 4 \text{ N}$  faisant un angle  $\theta = 60^\circ$  avec l'horizontale. Entre l'instant initial et l'instant final, le bloc se déplace encore une fois de  $s = 8 \text{ m}$ . On désire déterminer le travail effectué par la force  $\vec{F}$  sur le bloc.



Identifions nos variables :

$$F = 4 \text{ N}$$

$$s = 8 \text{ m}$$

$$\theta = 60^\circ$$

Évaluons le travail de la force :

$$W = F s \cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad W = (4)(8)\cos(60^\circ)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W = 16 \text{ J}}$$

## Énergie cinétique

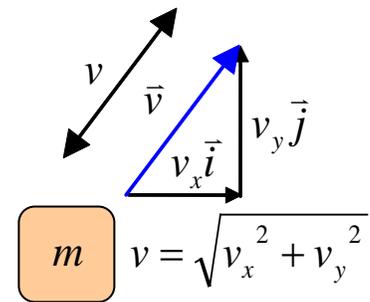
L'**énergie cinétique** est l'énergie associée à l'état de mouvement d'un objet. Elle dépend du module de la vitesse  $v$  de l'objet et de la masse  $m$  de l'objet :

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

où  $K$  : Énergie cinétique de la masse en mouvement (J).

$m$  : Masse de l'objet en mouvement (kg).

$v$  : Module de la vitesse de l'objet (m/s).



## Théorème de l'énergie cinétique

Le **théorème de l'énergie cinétique** nous permet d'affirmer que le **travail** est l'**agent** qui fait **varier** l'**énergie cinétique** dans l'espace :

$$K_f = K_i + W_{tot} \quad \text{tel que} \quad K = \frac{1}{2}mv^2$$

où  $K_f$  : Énergie cinétique finale de l'objet (J).

$K_i$  : Énergie cinétique initiale de l'objet (J).

$m$  : Masse de l'objet en mouvement (kg).

$v$  : Module de la vitesse de l'objet (m/s).

$W_{tot}$  : Travail total effectué sur l'objet par plusieurs forces (J).

Preuve : (une dimension, sans intégrale)

Considérons un objet de masse  $m$  qui subit une force résultante constante  $F_x$  et qu'il se déplace selon l'axe  $x$  avec un déplacement  $\Delta x$ . Évaluons l'évolution de la vitesse de l'objet en construisant à partir de la 2<sup>ème</sup> loi de Newton le théorème de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} F_x = ma_x &\Rightarrow F_x = m \frac{dv_x}{dt} && \text{(Remplacer } a_x = \frac{dv_x}{dt} \text{)} \\ &\Rightarrow F_x = m \frac{\Delta v_x}{\Delta t} && \text{(Relaxer notation } d \rightarrow \Delta \text{)} \\ &\Rightarrow F_x \Delta x = m \frac{\Delta v_x}{\Delta t} \Delta x && \text{(Multiplier par } \Delta x \text{)} \\ &\Rightarrow F_x \Delta x = m \frac{\Delta x}{\Delta t} \Delta v_x && \text{(Réécriture pour former } \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{)} \\ &\Rightarrow F_x \Delta x = m \bar{v}_x \Delta v_x && \text{(Remplacer } \bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} \text{)} \\ &\Rightarrow W = m \bar{v}_x \Delta v_x && \text{(Travail : } W = F_x \Delta x \text{)} \\ &\Rightarrow W = m \left( \frac{v_{xf} + v_{xi}}{2} \right) (v_{xf} - v_{xi}) && \left( \bar{v}_x = \frac{v_{xf} + v_{xi}}{2} \text{ et } \Delta v_x = v_{xf} - v_{xi} \right) \\ &\Rightarrow W = \frac{1}{2} m v_{xf}^2 - \frac{1}{2} m v_{xi}^2 && \text{(Distribution)} \\ &\Rightarrow W = K_f - K_i && \text{(Énergie cinétique : } K = \frac{1}{2} m v_x^2 \text{)} \\ &\Rightarrow K_f = K_i + W \quad \blacksquare && \text{(Isoler } K_f \text{)} \end{aligned}$$

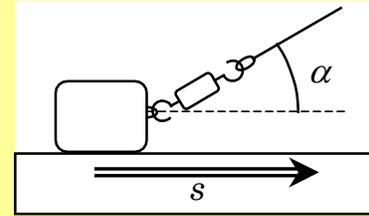
**Situation 3 : La vitesse finale du bloc.** On désire utiliser le théorème de l'énergie cinétique pour calculer le module de la vitesse finale du bloc dans la **situation 2**.

Rappel :  $m = 2 \text{ kg}$ ,  $v_i = 0$  et  $W = 16 \text{ J}$

Évaluons la vitesse finale à l'aide du travail appliquée sur le bloc :

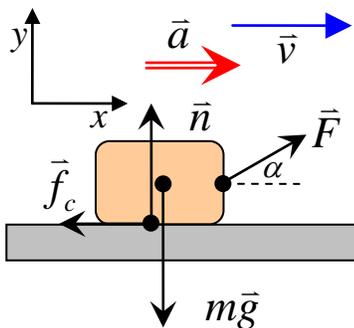
$$\begin{aligned} K_f = K_i + W &\Rightarrow \left( \frac{1}{2} m v_f^2 \right) = \left( \frac{1}{2} m v_i^2 \right) + W && \text{(Remplacer } K = \frac{1}{2} m v_x^2 \text{)} \\ &\Rightarrow \left( \frac{1}{2} (2) v_f^2 \right) = \left( \frac{1}{2} (2) (0)^2 \right) + (16) && \text{(Remplacer valeurs numériques)} \\ &\Rightarrow v_f^2 = 16 && \text{(Calcul)} \\ &\Rightarrow v_f = \pm 4 && \text{(Isoler } v_f \text{)} \\ &\Rightarrow \boxed{v_f = 4 \text{ m/s}} && \text{(Prendre module)} \end{aligned}$$

**Situation 4 : Albert fait du travail.** Albert traîne un bloc de ciment de 10 kg sur une surface horizontale en asphalte à l'aide d'une corde faisant un angle  $\alpha = 30^\circ$  avec l'horizontale. Il y a un coefficient de frottement cinétique  $\mu_c = 0,8$  entre le bloc et la surface. À l'instant initial, le bloc se déplace déjà à 2 m/s ; 5 m plus loin, le bloc se déplace à 3 m/s.

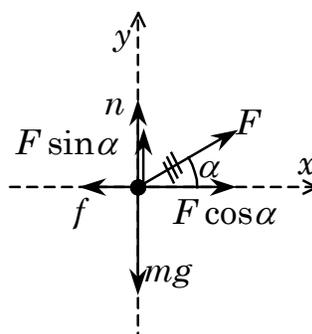


En analysant la situation à l'aide de du théorème de l'énergie cinétique, on désire déterminer ce qu'indique le dynamomètre placé entre la corde et le bloc. (On suppose que la corde exerce une force constante sur le bloc.)

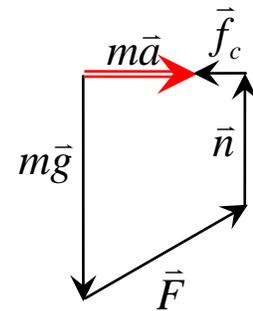
Voici le schéma des forces de la situation :



Décomposition des forces selon l'axe x et y :



Résolution de la 2<sup>e</sup> loi de Newton graphiquement :



$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$$\text{où } \vec{F} + \vec{f}_c + \vec{n} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

Développons notre 2<sup>e</sup> loi de Newton selon l'axe y afin l'expression de la normale  $n$  appliquée par le sol sur le bloc :

$$\sum F_y = ma_y \quad \Rightarrow \quad n + F \sin(\alpha) - mg = ma_y \quad (\text{Remplacer } \sum F_y)$$

$$\Rightarrow \quad n + F \sin(\alpha) - mg = 0 \quad (\text{Remplacer } a_y = 0)$$

$$\Rightarrow \quad n = mg - F \sin(\alpha) \quad (\text{Isoler } n)$$

Avec l'expression de la force normale  $n$ , on peut évaluer la force de frottement cinétique pour ainsi évaluer l'expression du travail effectué par la force de frottement cinétique :

- Force  $f_c$  :  $f_c = \mu_c n \quad \Rightarrow \quad \boxed{f = \mu_c (mg - F \sin(\alpha))}$  ( $F$  toujours inconnue)

- Travail  $f_c$  :  $W_f = F s \cos \theta \quad \Rightarrow \quad W_f = (f)(5) \cos(180^\circ)$

$$\Rightarrow \quad W_f = -5f$$

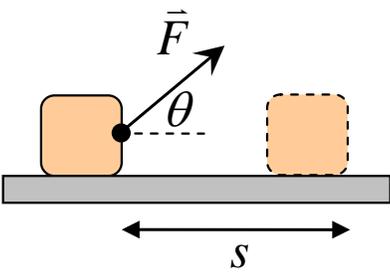
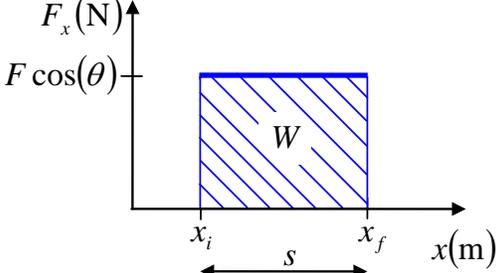
$$\Rightarrow \quad \boxed{W_f = -5\mu_c (mg - F \sin(\alpha))} \quad (F \text{ toujours inconnue})$$



# Chapitre 3.1b – Le travail d’une force non-constante

## Travail et aire sous la courbe

Le travail  $W$  est le résultat du produit d’une force  $F$  avec un déplacement  $s$ . Puisque la force peut ne pas être constante tout au long du déplacement, elle doit se doit d’être une fonction de la position ( $F = F(x)$ ). Ainsi, le **travail** correspond à **l’aire sous la courbe** de la **force en fonction de la position**.

Situation	Graphique
<p>Force <math>\vec{F}</math> constante sur le déplacement <math>\vec{s}</math>.</p> 	

Travail d’une force constante :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F s \cos(\theta)$$

- où
- $W$  : Le travail effectué par la force  $\vec{F}$  (J)
  - $F$  : Module de la force qui effectue le travail (N)
  - $s$  : Déplacement sur laquelle la force est appliquée (m) ( $s = x_f - x_i$ )
  - $\theta$  : Angle entre l’orientation de la force et le déplacement ( $F_x = F \cos(\theta)$ )

Lorsque la force n’est pas constante, l’équation précédente n’est plus valide et le calcul de l’aire sous la courbe devient nécessaire. Pour ce faire, il suffit de couper la surface  $W$  en petits rectangles de travail  $dW$  et additionner le tout à l’aide d’une intégrale. Le travail infinitésimal  $dW$  correspond au travail de la force  $\vec{F}$  effectué sur un déplacement infinitésimal  $d\vec{s}$ .

Équation de base :

$$W = \int dW$$

Équation vectorielle :

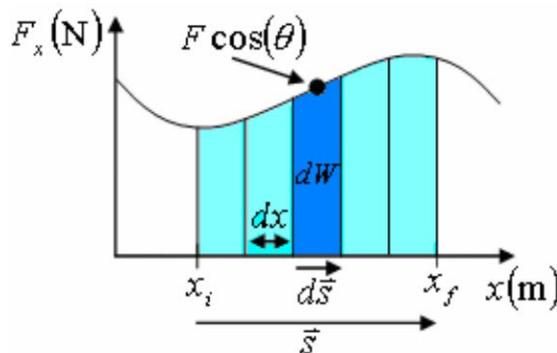
$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

$$(dW = \vec{F} \cdot d\vec{s})$$

Équation selon l’axe  $x$  :

$$(dW = F_x dx)$$

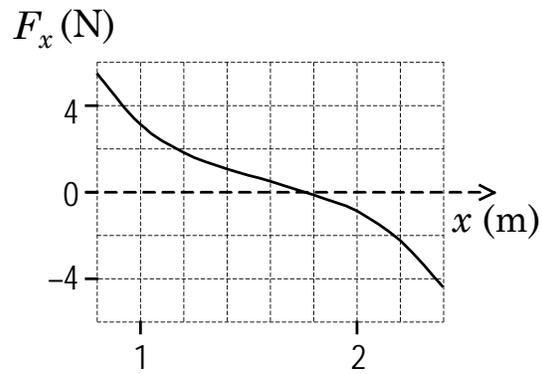
$$W = \int_{x=x_i}^{x_f} F_x dx$$



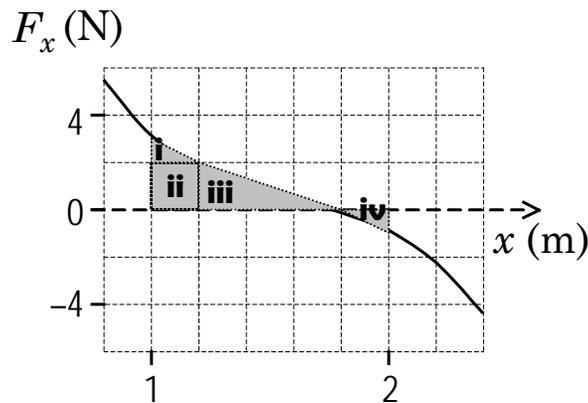
**Situation 1 : Le signe du travail.** Une particule peut se déplacer sur une surface horizontale sans frottement orientée le long d'un axe  $x$ . Elle est soumise à une force horizontale qui varie en fonction de la position selon ce qui est indiqué sur le graphique ci-contre. On désire déterminer le travail effectué par la force sur la particule lorsqu'elle se déplace :

(a) de  $x_i = 1$  m à  $x_f = 2$  m ;

(b) de  $x_i = 2$  m à  $x_f = 1$  m .



Aire sous la courbe à évaluer :



Aire d'un carreau :  $2 \text{ N} \times 0,2 \text{ m} = 0,4 \text{ J}$

Aire **i** :  $\frac{1}{4}$  de carreau =  $0,1 \text{ J}$

$$\Rightarrow \boxed{W_i = 0,1 \text{ J}}$$

Aire **ii** : 1 carreau =  $0,4 \text{ J}$

$$\Rightarrow \boxed{W_{ii} = 0,4 \text{ J}}$$

Aire **iii** :  $\frac{1}{2}$  de 3 carreaux =  $0,6 \text{ J}$

$$\Rightarrow \boxed{W_{iii} = 0,6 \text{ J}}$$

Aire **iv** :  $\frac{1}{4}$  carreau =  $0,1 \text{ J}$

$$\Rightarrow \boxed{W_{iv} = -0,1 \text{ J}} \text{ (Aire sous la courbe négative)}$$

(a) Travail de  $x_i = 1$  m à  $x_f = 2$  m

$$W_{1 \rightarrow 2} = \sum W = W_i + W_{ii} + W_{iii} + W_{iv} = (0,1) + (0,4) + (0,6) + (-0,1) \Rightarrow \boxed{W_{1 \rightarrow 2} = 1 \text{ J}}$$

(b) Travail de  $x_i = 2$  m à  $x_f = 1$  m

$$W_{2 \rightarrow 1} = -\sum W = -(W_i + W_{ii} + W_{iii} + W_{iv}) = -(0,1) - (0,4) - (0,6) - (-0,1) \Rightarrow \boxed{W_{2 \rightarrow 1} = -1 \text{ J}}$$

## Le théorème de l'énergie cinétique par l'intégrale

À l'aide du calcul différentiel, nous pouvons définir le théorème de l'énergie cinétique de la façon suivante lorsqu'une force  $F$  est appliquée sur un déplacement le long de l'axe  $x$  selon un angle  $\theta$  par rapport à l'axe  $x$  :

$$W = \Delta K$$

où  $W$  : Travail effectué sur l'objet par la force  $F$  (J).

$\Delta K$  : Variation de l'énergie cinétique de l'objet (J).

### Preuve :

Appliquons le calcul du travail effectué par une force  $\vec{F}$  long de l'axe  $x$  entre la position  $x_i$  et  $x_f$  à partir de la 2<sup>ième</sup> loi de Newton :

$$\sum F = ma$$

$\Rightarrow F \cos(\theta) = ma \cos(\theta)$  (Multiplier par  $\cos(\theta)$ ,  $\theta$  : Angle entre  $\vec{F}$  et l'axe  $x$ )

$\Rightarrow F \cos(\theta) = ma_x$  (Projection sur l'axe  $x$ ,  $a_x = a \cos(\theta)$ )

$\Rightarrow F \cos(\theta) = m \frac{dv_x}{dt}$  (Reformulation de l'accélération,  $a_x = dv_x / dt$ )

$\Rightarrow F \cos(\theta) = m \frac{dv_x}{dt} \frac{dx}{dx}$  (Multiplie par 1,  $1 = dx / dx$ )

$\Rightarrow F \cos(\theta) = m \frac{dv_x}{dx} v_x$  (Remplace  $v_x = dx / dt$ )

$\Rightarrow F \cos(\theta) dx = m v_x dv_x$  (Multiplier par  $dx$ )

$\Rightarrow \int_{x=x_i}^{x_f} F \cos(\theta) dx = \int_{v=v_{xi}}^{v_{xf}} m v_x dv_x$  (Intégrale avec borne :  $x_i$  à  $x_f$  et  $v_{xi}$  à  $v_{xf}$ )

$\Rightarrow W = \int_{v=v_{xi}}^{v_{xf}} m v_x dv_x$  (Remplacer  $W = \int_{x=x_i}^{x_f} F \cos(\theta) dx$ )

$\Rightarrow W = m \int_{v=v_{xi}}^{v_{xf}} v_x dv_x$  (Factoriser la constante  $m$  l'intégrale)

$\Rightarrow W = m \left[ \frac{v_x^2}{2} \right]_{v_{xi}}^{v_{xf}}$  (Résoudre l'intégrale :  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ )

$\Rightarrow W = \frac{1}{2} m v_{xf}^2 - \frac{1}{2} m v_{xi}^2$  (Évaluer l'intégrale)

$\Rightarrow W = \Delta K$  ■ (Remplacer  $K = \frac{1}{2} m v^2$  et  $\Delta K = K_f - K_i$ )

**Situation A : Le freinage de la locomotive.** Une locomotive de 40 tonnes (1 tonne = 1000 kg) roulant à 15 m/s (54 km/h) doit s'immobiliser à une gare. La locomotive est munie de deux systèmes de freinage : l'un efficace à faible vitesse et l'autre efficace à grande vitesse. Mathématiquement, la force du freinage est exprimée de la façon suivante en newtons en fonction de la position en mètres :  $F_x = -200x - 5x^3$ . On désire évaluer la distance de freinage de la locomotive.



Évaluons la variation de l'énergie cinétique de la locomotive :

$$\begin{aligned} \Delta K = K_f - K_i &\Rightarrow \Delta K = \left(\frac{1}{2}mv_f^2\right) - \left(\frac{1}{2}mv_i^2\right) && \text{(Remplacer } K = \frac{1}{2}mv^2\text{)} \\ &\Rightarrow \Delta K = -\frac{1}{2}mv_i^2 && \text{(Remplacer } v_f = 0\text{)} \\ &\Rightarrow \Delta K = -\frac{1}{2}(40 \times 10^3)(15)^2 && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ &\Rightarrow \boxed{\Delta K = -4,5 \times 10^6 \text{ J}} && \text{(Calcul)} \end{aligned}$$

Évaluons l'expression du travail effectué par le système de freinage sur une distance  $s$  indéterminée. Utilisons l'expression du travail  $W$  à l'aide de l'intégrale selon l'axe  $x$  :

$$\begin{aligned} W = \int_{x=x_i}^{x_f} F_x dx &\Rightarrow W = \int_{x=x_i}^{x_f} (-200x - 5x^3) dx && \text{(Remplacer } F_x = -200x - 5x^3\text{)} \\ &\Rightarrow W = \int_{x=0}^s (-200x - 5x^3) dx && \text{(Borne : } x_i = 0 \rightarrow x_f = s\text{)} \\ &\Rightarrow W = -200 \int_{x=0}^s x dx - 5 \int_{x=0}^s x^3 dx && \text{(Distribuer intégrale, factoriser const.)} \\ &\Rightarrow W = -200 \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^s - 5 \left[ \frac{x^4}{4} \right]_0^s && \text{(Résoudre l'intégrale)} \\ &\Rightarrow W = -200 \left( \frac{s^2}{2} - 0 \right) - 5 \left( \frac{s^4}{4} - 0 \right) && \text{(Évaluer l'intégrale)} \\ &\Rightarrow \boxed{W = -100s^2 - 1,25s^4} && \text{(Simplifier)} \end{aligned}$$

À partir du théorème de l'énergie cinétique, évaluons le déplacement  $s$  requis pour immobiliser la locomotive :

$$\begin{aligned} W = \Delta K &\Rightarrow (-100s^2 - 1,25s^4) = (-4,5 \times 10^6) && \text{(Remplacer } W \text{ et } \Delta K\text{)} \\ &\Rightarrow 1,25s^4 + 100s^2 - 4,5 \times 10^6 = 0 && \text{(Réécriture)} \\ &\Rightarrow 1,25Y^2 + 100Y - 4,5 \times 10^6 = 0 && \text{(Remplacer } Y = s^2\text{)} \end{aligned}$$

Évaluons la solution au polynôme du 2<sup>e</sup> degré :

$$Y = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow Y = \frac{-(100) \pm \sqrt{(100)^2 - 4(1,25)(-4,5 \times 10^6)}}{2(1,25)} \quad (\text{Remplacer } a, b \text{ et } c)$$

$$\Rightarrow Y = \frac{-100 \pm \sqrt{2,251 \times 10^7}}{2,5} \quad (\text{Simplifier})$$

$$\Rightarrow Y = \{-1938, 1858\} \quad (\text{Solutions de } Y)$$

Évaluons la distance  $s$  à partir de la relation entre  $Y$  et  $s$  :

$$Y = s^2 \Rightarrow s = \sqrt{Y} \quad (\text{Isoler } s)$$

$$\Rightarrow s = \sqrt{\{-1938, 1858\}} \quad (\text{Remplacer } Y)$$

$$\Rightarrow s = \{-44,02i, 44,02i, -43,10, 43,10\} \quad (\text{Solutions de } s, i = \sqrt{-1})$$

$$\Rightarrow \boxed{s = 43,10 \text{ m}} \quad (\text{Solution réelle et positive})$$

## Exercice

**3.1.X Forcer au cube.** Un mobile contraint de se déplacer le long d'un axe  $x$  subit une force donnée par  $F_x = -5x^3$ , où  $F_x$  est en newtons et  $x$  est en mètres. (a) Déterminez la formule qui permet de calculer le travail effectué par la force sur le mobile lorsque ce dernier se déplace de la position initiale  $x_i$  à la position  $x_f$ . (b) Que vaut ce travail si le mobile se déplace de  $x_i = 2$  m à  $x_f = -1,5$  m.

## Solution

### 3.1.X Forcer au cube.

a) Avec la définition du travail

$$\text{Force : } \vec{F} = -5x^3 \vec{i} \text{ N}$$

$$\text{Déplacement : } d\vec{s} = dx \vec{i} \text{ m}$$

$$\text{Borne de l'intégrale : } x = x_i \text{ à } x = x_f$$

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} \Rightarrow W = \int_{x=x_i}^{x_f} \vec{F} \cdot d\vec{x} \quad (\text{Déplacement selon l'axe } x \text{ de } x_i \text{ à } x_f)$$

$$\Rightarrow W = \int_{x=x_i}^{x_f} (-5x^3 \vec{i}) \cdot (dx \vec{i}) \quad (\text{Remplacer } \vec{F} = -5x^3 \vec{i} \text{ et } d\vec{x} = dx \vec{i} )$$

$$\Rightarrow W = \int_{x=x_i}^{x_f} -5x^3 dx (\vec{i} \cdot \vec{i}) \quad (\text{Isoler le produit scalaire})$$

$$\Rightarrow W = \int_{x=x_i}^{x_f} -5x^3 dx \quad (\text{Calculer } i \cdot i = 1)$$

$$\Rightarrow \boxed{W = -5 \int_{x=x_i}^{x_f} x^3 dx} \quad (\text{Sortir la constante de l'intégrale})$$

(b) Travail de  $x_i = 2 \text{ m}$  à  $x_f = -1,5 \text{ m}$

$$W = -5 \int_{x=2}^{-1,5} x^3 dx \Rightarrow W = -5 \left[ \frac{x^4}{4} \right]_2^{-1,5}$$

$$\Rightarrow W = -5 \left( \frac{(-1,5)^4}{4} - \frac{(2)^4}{4} \right)$$

$$\Rightarrow W = -5(-2,73)$$

$$\Rightarrow \boxed{W = 13,67 \text{ J}}$$

N.B. Le travail est positif, car la force (direction  $-x$ ) est dans le même sens que le déplacement (direction  $-x$ )





# Chapitre 3.2 – L'énergie potentielle élastique d'un ressort idéal

## Le travail fait par un ressort

Le travail  $W_r$  effectué par un ressort idéal dépend de l'évolution de la déformation  $e$  de celui-ci entre un état initial  $e_i$  et un état final  $e_f$ . Il est proportionnel à la variation du carré de la déformation tel que :

$$W_r = \frac{1}{2}ke_i^2 - \frac{1}{2}ke_f^2$$

où  $W_r$  : Travail effectué par la force du ressort (J).

$k$  : Constante du ressort (N/m).

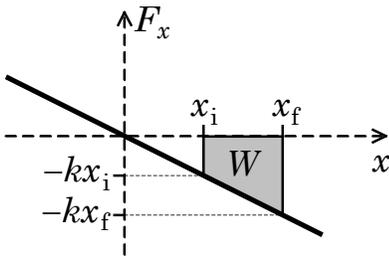
$e_i$  : Déformation initiale du ressort (m).

$e_f$  : Déformation finale du ressort (m).

### Preuve :

Rappelons l'expression de la force d'un ressort  $F_x$  en fonction de son étirement  $x$  :

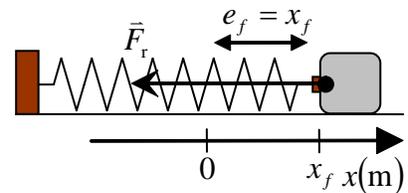
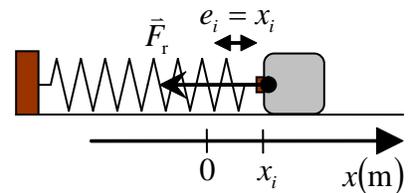
$$F_x = -kx$$



Aire d'un trapèze :

$$A = \frac{(h+H)}{2}L$$

Rappel :  $\vec{F}_r = -k\vec{e}$



Évaluons le travail effectué par le ressort qui correspond à l'aire sous la courbe du graphique de force en fonction du déplacement ayant la forme d'un trapèze :

$$W_r = \text{aire sous la courbe} \Rightarrow W_r = \frac{(-kx_i - kx_f)}{2}(x_f - x_i) \quad (\text{Aire du trapèze})$$

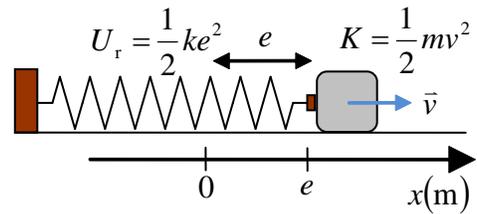
$$\Rightarrow W_r = -\frac{k}{2}(x_i + x_f)(x_f - x_i) \quad (\text{Factoriser } -k/2)$$

$$\Rightarrow W_r = -\frac{k}{2}(x_i x_f - x_i^2 + x_f^2 - x_i x_f) \quad (\text{Effectuer le produit})$$

$$\Rightarrow W_r = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2 \quad \blacksquare \quad (\text{Simplification})$$

## Théorème de l'énergie cinétique avec énergie potentielle du ressort

À partir du travail de la force d'un ressort idéal  $W_r$ , nous pouvons modifier le **théorème de l'énergie cinétique** en y incluant un terme d'énergie potentielle  $U_r$  associé à la déformation  $e$  du ressort. Ce nouveau terme correspond à une énergie emmagasinée dans la déformation du ressort. Elle est libérée lorsque le ressort reprend sa forme naturelle :



$$K_f + U_{rf} = K_i + U_{ri} + W_{\text{autre}} \quad \text{tel que} \quad U_r = \frac{1}{2}ke^2$$

où  $K_i$  et  $K_f$  : Énergie cinétique initiale et finale de l'objet (J).

$U_{ri}$  et  $U_{rf}$  : Énergie potentielle du ressort initiale et finale (J).

$k$  : Constante du ressort (N/m).

$e$  : Déformation du ressort (m).

$W_{\text{autre}}$  : Travail total effectué sur l'objet par les autres forces (J).

### Preuve :

À partir du théorème de l'énergie cinétique, séparons le travail effectué par le ressort et le travail effectué par les autres forces afin d'y inclure un terme d'énergie potentielle du ressort :

$$K_f = K_i + W_{\text{tot}}$$

$$\Rightarrow K_f = K_i + W_r + W_{\text{autre}}$$

$$\Rightarrow K_f = K_i + \left( \frac{1}{2}ke_i^2 - \frac{1}{2}ke_f^2 \right) + W_{\text{autre}} \quad (\text{Remplacer } W_r = \frac{1}{2}ke_i^2 - \frac{1}{2}ke_f^2)$$

$$\Rightarrow K_f + \frac{1}{2}ke_f^2 = K_i + \frac{1}{2}ke_i^2 + W_{\text{autre}} \quad (\text{Isoler termes finaux et initiaux ensemble})$$

$$\Rightarrow K_f + U_{rf} = K_i + U_{ri} + W_{\text{autre}} \quad \blacksquare \quad (\text{Remplacer } U_r = \frac{1}{2}ke^2)$$

## Le travail de la force conservative du ressort

La force du ressort est une force conservative, car elle établit le lien suivant entre le travail  $W_r$  qu'elle effectue et la variation d'une énergie potentielle  $\Delta U_r$  :

$$W_r = -\Delta U_r$$

où  $W_r$  : Travail effectué par la force du ressort (J).

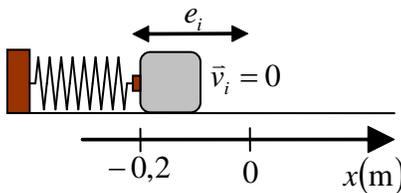
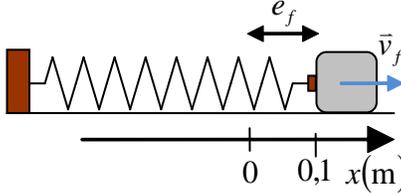
$\Delta U_r$  : Variation de l'énergie potentielle du ressort (J).  $(\Delta U_r = U_{rf} - U_{ri})$

Preuve :

À partir du calcul du travail  $W_r$  du ressort et de la définition de l'énergie potentielle du ressort, établissons un lien entre le travail et la variation de l'énergie potentielle :

$$\begin{aligned}W_r &= \frac{1}{2}ke_i^2 - \frac{1}{2}ke_f^2 \Rightarrow W_r = U_{ri} - U_{rf} && \text{(Remplacer } U_r = \frac{1}{2}ke^2\text{)} \\ &\Rightarrow W_r = -(U_{rf} - U_{ri}) && \text{(Factoriser signe négatif)} \\ &\Rightarrow W_r = -\Delta U_r \quad \blacksquare\end{aligned}$$

**Situation 2 : Bloc et ressort.** On suppose un bloc de 0,3 kg et que sa vitesse initiale est nulle lorsque le ressort est comprimé de 20 cm (le bloc est attaché au ressort). On désire déterminer le module de la vitesse du bloc lorsque le ressort est étiré de 10 cm. La constante de rappel du ressort est de 40 N/m.

Situation initiale	Situation finale
	
Mesures : $v_i = 0$ et $e_i = -0,2$ m	Mesures : $v_f = ?$ et $e_f = 0,1$ m

Évaluons nos termes d'énergies :

- $K_i = 0$
- $U_{ri} = \frac{1}{2}ke_i^2 = \frac{1}{2}(40)(-0,2)^2 = 0,8$  J
- $W_{\text{autre}} = 0$
- $K_f = ?$
- $U_{rf} = \frac{1}{2}ke_f^2 = \frac{1}{2}(40)(0,1)^2 = 0,2$  J

Avec le théorème de l'énergie cinétique, évaluons la vitesse finale :

$$\begin{aligned}K_f + U_{rf} &= K_i + U_{ri} + W_{\text{autre}} \Rightarrow K_f + (0,2) = (0) + (0,8) && \text{(Remplacer val. num.)} \\ &\Rightarrow \boxed{K_f = 0,6 \text{ J}} && \text{(Évaluer } K_f\text{)} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 = 0,6 && \text{(} K_f = \frac{1}{2}mv_f^2\text{)} \\ &\Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2 \times 0,6}{m}} = \sqrt{\frac{2(0,6)}{0,3}} = \sqrt{4} && \text{(Isoler } v_f\text{)} \\ &\Rightarrow \boxed{v_f = \pm 2 \text{ m/s}} && \text{(Évaluer } v_f\text{)}\end{aligned}$$

**Remarque :** La vitesse calculée n'est pas vectorielle. Il y a deux possibilités de direction.











# Chapitre 3.3 – L'énergie potentielle gravitationnelle

## Le travail fait par une force gravitationnelle constante

Le travail  $W_g$  effectué par une force gravitationnelle constante dépend du déplacement vertical d'un objet. On peut exprimer le déplacement à partir d'une hauteur initiale  $y_i$  et d'une hauteur finale  $y_f$  :

$$W_g = mgy_i - mgy_f$$

où  $W_g$  : Travail effectué par la force gravitationnelle (J).

$m$  : Masse de l'objet qui subit le travail de la gravité (kg).

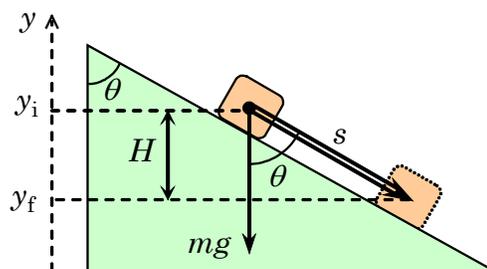
$g$  : Champ gravitationnelle (N/kg).

$y_i$  : Hauteur initiale de l'objet (m).

$y_f$  : Hauteur finale de l'objet (m).

### Preuve :

Considérons un bloc qui effectue un déplacement  $s$  le long d'un plan incliné sous la présence d'une force gravitationnelle  $mg$  constante. Évaluons l'expression du travail  $W_g$  effectué par la gravité sur le bloc en considérant que le travail calculé sera positif, car le déplacement sera vers le bas du plan incliné du plan et que la force gravitationnelle est orienté vers le bas (travail positif lorsque le déplacement et la force sont dans le même sens) :



$$W_g = F s \cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad W_g = F H \quad (\text{Remplacer } H = s \cos(\theta))$$

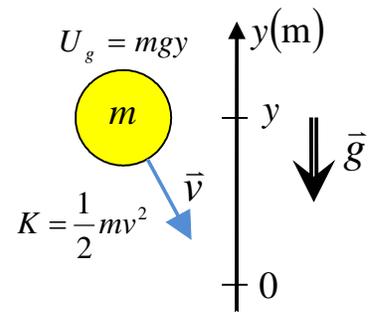
$$\Rightarrow \quad W_g = F (y_i - y_f) \quad (\text{Remplacer } H = y_i - y_f, \text{ car } W_g > 0)$$

$$\Rightarrow \quad W_g = mg (y_i - y_f) \quad (\text{Remplacer } F = mg)$$

$$\Rightarrow \quad W_g = mgy_i - mgy_f \quad \blacksquare \quad (\text{Distribution de } mg)$$

# Théorème de l'énergie cinétique avec énergie potentielle gravitationnelle

À partir du travail de la force gravitationnelle  $W_g$ , nous pouvons modifier le **théorème de l'énergie cinétique** en y incluant un terme d'énergie potentielle  $U_g$  associé à la hauteur d'un objet par rapport à un point de référence  $y = 0$ . Ce nouveau terme correspond à une énergie emmagasinée dans « la gravité ». Elle est libérée lorsque que l'objet réduit sa hauteur :



$$K_f + U_{gf} = K_i + U_{gi} + W_{\text{autre}} \quad \text{tel que} \quad U_g = mgy$$

où  $K_i$  et  $K_f$  : Énergie cinétique initiale et finale de l'objet (J).

$U_{gi}$  et  $U_{gf}$  : Énergie potentielle gravitationnelle initiale et finale (J).

$m$  : Masse de l'objet qui subit le travail de la gravité (kg).

$g$  : Champ gravitationnelle (N/kg).

$y$  : Position verticale de l'objet selon l'axe  $y$  où l'axe est positif vers le haut (m).

$W_{\text{autre}}$  : Travail total effectué sur l'objet par les autres forces (J).

## Remarque :

- 1) L'expression  $U_g = mgy$  est valide seulement si l'axe  $y$  est dans le **sens contraire** de la **force gravitationnelle**. Ex : Axe  $y$  vers le haut, champ gravitationnel vers le bas.
- 2) L'énergie potentielle gravitationnelle **dépend** du **système d'axe** (où est situé  $y = 0$ ).
- 3) La **physique** de la gravité se manifeste uniquement lorsqu'il y a une **variation** de l'énergie potentielle gravitationnelle.

## Preuve :

À partir du théorème de l'énergie cinétique, séparons le travail effectué par la gravité et le travail effectué par les autres forces afin d'y inclure un terme d'énergie potentielle gravitationnelle :

$$K_f = K_i + W_{\text{tot}}$$

$$\Rightarrow K_f = K_i + W_g + W_{\text{autre}} \quad (\text{Séparer les travaux})$$

$$\Rightarrow K_f = K_i + (mgy_i - mgy_f) + W_{\text{autre}} \quad (\text{Remplacer } W_g = mgy_i - mgy_f)$$

$$\Rightarrow K_f + mgy_f = K_i + mgy_i + W_{\text{autre}} \quad (\text{Isoler termes finaux et initiaux ensemble})$$

$$\Rightarrow K_f + U_{gf} = K_i + U_{gi} + W_{\text{autre}} \quad \blacksquare \quad (\text{Remplacer } U_g = mgy)$$

## Le travail de la force gravitationnelle conservative

La force gravitationnelle est une force conservative, car elle établit le lien suivant entre le travail  $W_g$  qu'elle effectue et la variation d'une énergie potentielle  $\Delta U_g$  :

$$W_g = -\Delta U_g$$

où  $W_g$  : Travail effectué par la force gravitationnelle (J).

$\Delta U_g$  : Variation de l'énergie potentielle gravitationnelle (J). ( $\Delta U_g = U_{gf} - U_{gi}$ )

Preuve :

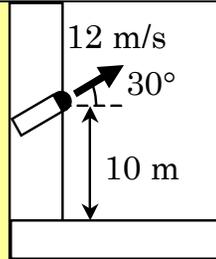
À partir du calcul du travail  $W_r$  du ressort et de la définition de l'énergie potentielle du ressort, établissons un lien entre le travail et la variation de l'énergie potentielle :

$$W_g = mgy_i - mgy_f \Rightarrow W_g = U_{gi} - U_{gf} \quad (\text{Remplacer } U_g = mgy)$$

$$\Rightarrow W_g = -(U_{gf} - U_{gi}) \quad (\text{Factoriser signe négatif})$$

$$\Rightarrow W_g = -\Delta U_g \quad \blacksquare$$

**Situation 4 : Un angle sans importance.** Un lance-balles dont l'embouchure est située à 10 m au-dessus du sol projette une balle avec une vitesse de 12 m/s orientée à 30° vers le haut par rapport à l'horizontale. On désire déterminer le module de la vitesse de la balle lorsqu'elle frappe le sol. On néglige la résistance de l'air.

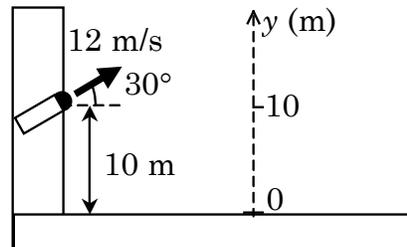


Selon le système d'axe que nous avons choisi ( $y = 0$  au sol), évaluons nos données de base :

Nos données de base :

- $y_i = 10 \text{ m}$
- $v_i = 12 \text{ m/s}$
- $y_f = 0$
- $v_f = ?$

Système d'axe :



Énergie cinétique  $K$  et énergie potentielle  $U$  :

- $K_i = \frac{1}{2}mv_i^2 = \frac{1}{2}m(12)^2 \Rightarrow \boxed{K_i = 72m}$
- $U_{gi} = mgy_i = m(9,8)(10) \Rightarrow \boxed{U_{gi} = 98m}$
- $K_f = \frac{1}{2}mv_f^2 \Rightarrow \boxed{K_f = \frac{1}{2}mv_f^2}$
- $U_{gf} = mgy_f = m(9,8)(0) \Rightarrow \boxed{U_{gf} = 0 \text{ J}}$

Avec la conservation de l'énergie : ( $W_{\text{autre}} = 0 \text{ J}$ )

$$\begin{aligned}
 K_f + U_{gf} &= K_i + U_{gi} + W_{\text{autre}} \Rightarrow K_f = K_i + U_{gi} - U_{gf} && \text{(Isoler } K_f \text{)} \\
 &\Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 = 72m + 98m - (0) && \text{(Remplacer les expressions)} \\
 &\Rightarrow \frac{1}{2}v_f^2 = 72 + 98 - (0) && \text{(Diviser par } m \text{)} \\
 &\Rightarrow v_f^2 = 340 && \text{(Isoler } v_f^2 \text{)} \\
 &\Rightarrow v_f = \pm 18,4 \text{ m/s} && \text{(Évaluer la vitesse)}
 \end{aligned}$$

Nous allons prendre la **vitesse positive**, car nous voulons évaluer le **module** de la vitesse :

$$\boxed{v_f = 18,4 \text{ m/s}}$$

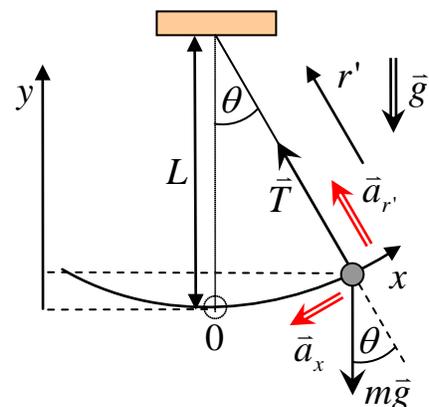
**Remarque :** Cette vitesse n'est pas décomposée en  $x$  ni en  $y$ . C'est le **module** de la **vitesse** qui a été évalué.

## La géométrie du pendule

Le pendule est un problème de physique ayant une géométrie particulière, car la masse du pendule effectue une trajectoire circulaire avec une accélération non constante. Puisque la gravité est responsable du changement du module de la vitesse, on peut évaluer la hauteur du pendule

$$y = L(1 - \cos \theta)$$

tel que  $x = y = 0$  lorsque  $\theta = 0$  (le point le plus bas du pendule) pour évaluer l'énergie potentielle gravitationnelle  $U_g = mgy$  dans le théorème de l'énergie cinétique.

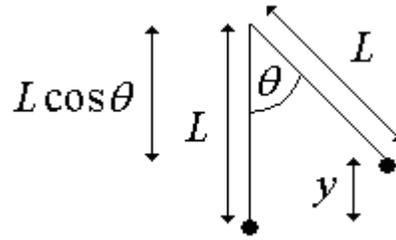


Preuve :

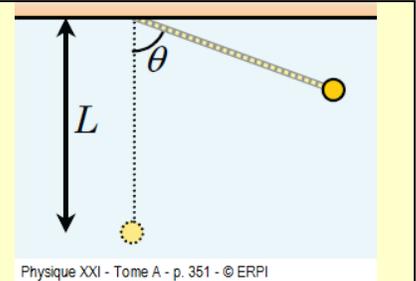
Évaluer l'expression de la hauteur  $y$  d'un pendule en considérant  $y = 0$  comme étant le point le plus bas correspondant à  $\theta = 0$  :

$$y = L - L \cos(\theta)$$

$$\Rightarrow y = L(1 - \cos(\theta)) \quad \blacksquare$$



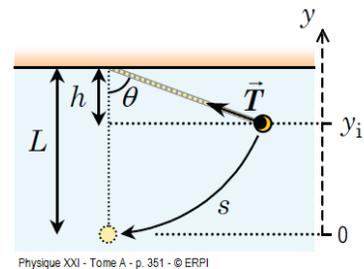
**Situation 5 (Chapitre 3.4) : Un pendule.** Une balle dont la masse est de 0,2 kg est accrochée au bout d'une corde dont la longueur  $L$  est de 40 cm. On accroche la corde au plafond et on lâche la balle (vitesse initiale nulle) alors que la corde tendue fait un angle  $\theta = 70^\circ$  avec la verticale (schéma ci-contre). On désire déterminer les modules (a) de la vitesse de la balle lorsque la corde passe à la verticale et (b) de la tension à cet instant.



Évaluons la hauteur initiale de la balle par rapport à son point le plus bas étant lorsque la corde sera à la verticale afin d'utiliser la relation  $y = L(1 - \cos(\theta))$  :

$$y_i = L(1 - \cos(\theta_i)) \quad \Rightarrow \quad y_i = (0,40)(1 - \cos(70^\circ))$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_i = 0,2632 \text{ m}}$$



Évaluons le module de la vitesse finale de la balle à l'aide du théorème de l'énergie cinétique :

$$K_f + U_{gf} = K_i + U_{gi} + W_a \quad (\text{Théorème de l'énergie cinétique})$$

$$\Rightarrow K_f + U_{gf} = K_i + U_{gi} + (0) \quad (W_a = W_T = 0, \text{ car } \vec{T} \perp \vec{s})$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}mv_f^2\right) + (mgy_f) = \left(\frac{1}{2}mv_i^2\right) + (mgy_i) \quad (K = \frac{1}{2}mv^2, U_g = mgy)$$

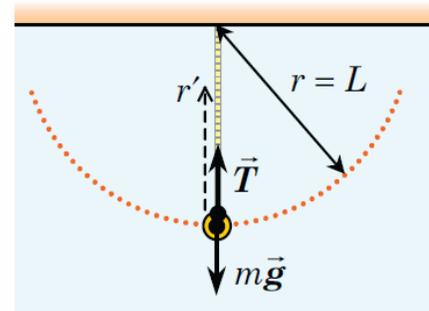
$$\Rightarrow \frac{1}{2}v_f^2 = gy_i \quad (\text{Simplifier } m, v_i = 0, y_f = 0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v_f^2 = (9,8)(0,2632) \quad (\text{Remplacer valeurs numériques})$$

$$\Rightarrow \boxed{v_f = 2,271 \text{ m/s}} \quad (\text{Évaluer } v_f)$$

Évaluons la tension dans la corde à l'aide de la 2<sup>e</sup> loi de Newton et de l'accélération centripète étant donné que la balle du pendule se déplace sur une trajectoire circulaire :

$$\begin{aligned} \sum F_r &= ma_r && (2^{\text{e}} \text{ loi de Newton}) \\ \Rightarrow T - mg &= ma_c && (\text{Remplacer}) \\ \Rightarrow T &= m(a_c + g) && (\text{Isoler } T) \\ \Rightarrow T &= m\left(\frac{v^2}{r} + g\right) && (a_c = v^2 / r) \\ \Rightarrow T &= (0,2)\left(\frac{(2,271)^2}{(0,40)} + (9,8)\right) && (\text{Remplacer val. num.}) \\ \Rightarrow T &= 4,539 \text{ N} && (\text{Évaluer } T) \end{aligned}$$



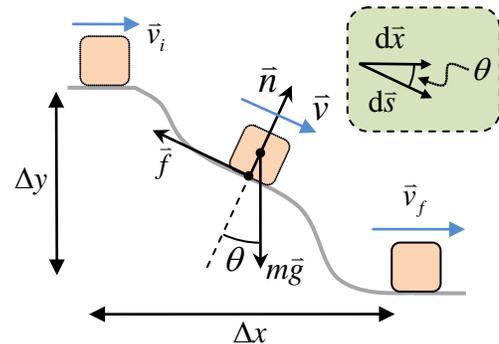
Physique XXI - Tome A - p. 352 - © ERPI

## Le travail du frottement cinétique lors d'un glissement le long d'une pente à inclinaison non constante

Lorsqu'un bloc glisse le long d'une pente dont l'inclinaison  $\theta$  n'est pas constante, la force de frottement cinétique  $\vec{f}_c$  varie en raison d'une force normale  $n = mg \cos(\theta)$  qui dépend de l'inclinaison de la pente. Cependant, le travail  $W_f$  évalué le long de la pente peut être évalué grâce à l'équation :

$$W_f = -\mu_c mg \Delta x$$

- Où
- $W_f$  : Travail du frottement cinétique (J).
  - $\mu_c$  : Coefficient de frottement cinétique.
  - $m$  : Masse de l'objet qui glisse (kg).
  - $g$  : Accélération gravitationnelle,  $9,8 \text{ m/s}^2$ .
  - $x$  : Déplacement horizontal le long de la pente (m).



### Preuve :

Effectuons le calcul du travail de la force de frottement en considérant que la force normale  $n$  n'est pas constante tout au long des déplacements  $d\vec{s}$  :

$$\begin{aligned} W_f &= \int \vec{f}_c \cdot d\vec{s} \Rightarrow W_f = \int (-\mu_c n \hat{s}) \cdot d\vec{s} && (\text{Frottement cinétique } f_c = -\mu_c n \hat{s}) \\ &\Rightarrow W_f = -\mu_c \int mg \cos(\theta) ds && (ds = \hat{s} \cdot d\vec{s} \text{ et } n = mg \cos(\theta)) \\ &\Rightarrow W_f = -\mu_c mg \int dx && (dx = ds \cos(\theta)) \\ &\Rightarrow W_f = -\mu_c mg \Delta x \quad \blacksquare && (\int dx = x) \end{aligned}$$

## Exercice

**3.4.12** *L'angle maximal d'un pendule.* Avec une balle de 0,4 kg et une corde de 0,5 m, on crée un pendule que l'on accroche au plafond. On fait osciller le pendule et on observe que le module de la vitesse de la balle est égal à 1,5 m/s au point le plus bas de sa trajectoire. Aux deux extrémités de l'oscillation, quel est l'angle que fait la corde avec la verticale?

## Solution

**3.4.6** *L'angle maximal d'un pendule.*

Système d'axe : Prenons l'axe y vertical vers le haut avec  $y = 0$  à la position où la balle est le plus bas dans sa trajectoire circulaire.

Moment initial : Balle dans la trajectoire où sa position est la plus basse.

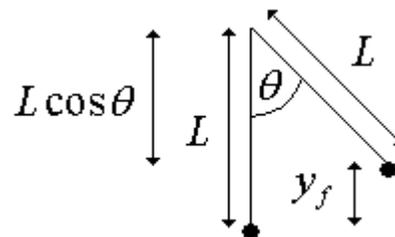
Moment final : Balle dans la trajectoire où sa position est la plus haute.

Avec la conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} E_f &= E_i + W_{nc} &\Rightarrow & K_f + U_f = K_i + U_i + W_{nc} \\ & &\Rightarrow & \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i + W_{nc} \\ & &\Rightarrow & mgy_f = \frac{1}{2}mv_i^2 && (v_f = 0, y_i = 0, W_{nc} = 0) \\ & &\Rightarrow & y_f = \frac{1}{2} \frac{v_i^2}{g} \\ & &\Rightarrow & y_f = \frac{1}{2} \frac{(1,5)^2}{(9,8)} \\ & &\Rightarrow & \boxed{y_f = 0,115 \text{ m}} \end{aligned}$$

Puisque la corde possède une longueur de 0,5 m, nous pouvons évaluer l'angle de la corde par rapport à la verticale à l'aide de la position  $y_f = 0,115 \text{ m}$  :

$$\begin{aligned} y_f &= L(1 - \cos(\theta_f)) &\Rightarrow & 1 - \cos(\theta_f) = \frac{y_f}{L} \\ & &\Rightarrow & \cos(\theta_f) = 1 - \frac{y_f}{L} \\ & &\Rightarrow & \boxed{\theta_f = 39,65^\circ} \end{aligned}$$





# Chapitre 3.4 – Le principe de conservation de l'énergie

## Le théorème de l'énergie cinétique avec énergie mécanique

Lorsque l'on désire analyser un système composé de plusieurs masses et ressorts avec une approche énergétique, on peut appliquer le théorème de l'énergie cinétique avec un terme d'énergie mécanique  $E$  qui comptabilise les énergies cinétiques des masses en mouvement, les énergies potentielles gravitationnelles des masses ainsi que les énergies potentielles des ressorts :

$$E_f = E_i + W_{nc}$$

$$\text{tel que } E = K + U_g + U_r \text{ et } W_{nc} = \int \vec{F} \cdot d\vec{s}$$

où  $E_f$  : Énergie mécanique du système finale (J)

$E_i$  : Énergie mécanique du système initiale (J)

$W_{nc}$  : Travail des forces non conservatives (autre que gravitationnelle et de ressort) (J)

$K$  : Énergie cinétique finale du système (incluant toutes les masses) (J)

$U_g$  : Énergie potentielle gravitationnelle totale du système (incluant toutes les masses) (J)

$U_r$  : Énergie potentielle des ressorts totale du système (incluant tous les ressorts) (J)

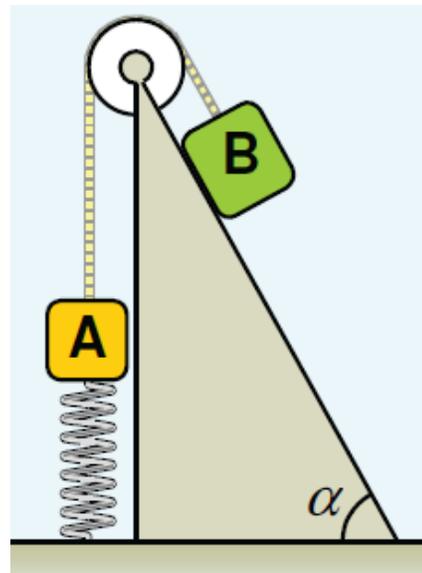
Rappel :  $K = \frac{1}{2}mv^2$ ,  $U_g = mgy$  et  $U_r = \frac{1}{2}ke^2$

### Exemple :

Un système composé de deux blocs **A** et **B** oscille sous l'action de la déformation d'un ressort tel qu'illustré sur le schéma ci-contre. On considère que qu'il y a du frottement de contact entre le bloc **B** et le plan incliné.

Pour appliquer le théorème de l'énergie cinétique avec énergie mécanique, nous allons devoir évaluer **11 termes d'énergie différents** tel que

$$E_f = E_i + W_{nc}$$

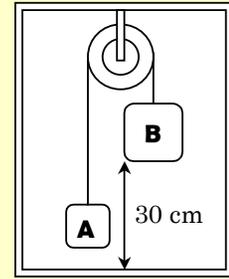


Physique XXI - Tome A - p. 356 - © ERPI

ce qui donne l'expression développée suivante :

$$K_{Af} + K_{Bf} + U_{rf} + U_{gAf} + U_{gBf} = K_{Ai} + K_{Bi} + U_{ri} + U_{gAi} + U_{gBi} + W_{\text{frottement}}$$

**Situation 1 : Un bloc monte, l'autre descend.** Deux blocs ( $m_A = 0,5 \text{ kg}$ ,  $m_B = 2,0 \text{ kg}$ ) sont reliés ensemble par une corde qui passe sur une poulie fixée au plafond. Les blocs sont initialement immobiles et le dessous du bloc B est à 30 cm au-dessus du plancher. On désire calculer le module de la vitesse du bloc B quand il touche le plancher. (La poulie est sans frottement; la masse de la poulie et des cordes sont négligeable.)



Voici les données de notre situation en lien avec le choix de notre système d'axe pour le bloc **A** et **B** :

Données générales			
$m_A = 0,5 \text{ kg}$	$m_B = 2,0 \text{ kg}$	$W_a = 0$	
Configuration initiale		Configuration finale	
$y_{iA} = 0$	$y_{iB} = 0,3 \text{ m}$	$y_{fA} = 0,3 \text{ m}$	$y_{fB} = 0$
$v_{iA} = 0$	$v_{iB} = 0$	$v_{fA} = v$	$v_{fB} = v$

Évaluons nos termes d'énergies :

- $K_i = 0$ , car  $v_{iA} = 0$  et  $v_{iB} = 0$ .
- $K_f = \frac{1}{2}m_A v_{fA}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{fB}^2 = \frac{1}{2}(m_A + m_B)v^2 = \frac{1}{2}(0,5 + 2)v^2 \Rightarrow K_f = 1,25v^2$
- $U_{gi} = m_A g y_{iA} + m_B g y_{iB} = (0) + (2)(9,8)(0,3) \Rightarrow U_{gi} = 5,88 \text{ J}$
- $U_{gf} = m_A g y_{fA} + m_B g y_{fB} = (0,5)(9,8)(0,3) + (0) \Rightarrow U_{gf} = 1,47 \text{ J}$

Évaluons la vitesse de nos deux blocs **A** et **B** par conservation de l'énergie :

$$K_f + U_{rf} + U_{gf} = K_i + U_{ri} + U_{gi} + W_a$$

$$\Rightarrow K_f + U_{gf} = K_i + U_{gi} \quad (U_{rf} = U_{ri} = W_a = 0)$$

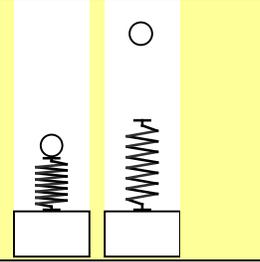
$$\Rightarrow (1,25v^2) + (1,47) = (0) + (5,88) \quad (\text{Remplacer les valeurs numériques})$$

$$\Rightarrow v^2 = 3,53 \quad (\text{Isoler } v^2)$$

$$\Rightarrow v = \pm 1,88 \quad (\text{Calculer } v)$$

$$\Rightarrow v = 1,88 \text{ m/s} \quad (\text{Choisir la vitesse positive})$$

**Situation 2 : Un lance-balles à ressort.** Un ressort idéal vertical ( $k = 800 \text{ N/m}$ ) est fixé au sol. Sa longueur naturelle est égale à 25 cm. On le comprime de 5 cm, on place une balle de 500 g contre son extrémité supérieur (la balle n'est pas fixée au ressort) et on lâche le tout (vitesse initiale nulle). On désire déterminer la hauteur maximale atteinte par la balle par rapport au sol. (La résistance de l'air est négligeable.)

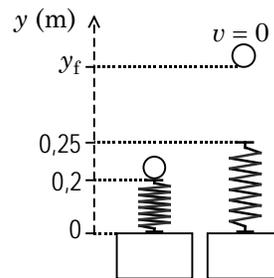


Selon le système d'axe que nous avons choisi ( $y = 0$  au sol), évaluons nos données de base :

Nos données de base : ( $y = L_0 + e$ )

Système d'axe :

$$\begin{aligned} y_i &= 0,2 \text{ m} & y_f &= ? \\ v_i &= 0 & v_f &= 0 \\ e_i &= -0,05 \text{ m} & e_f &= 0 \end{aligned}$$



avec  $m = 0,5 \text{ kg}$  et  $k = 800 \text{ N/m}$

Évaluons nos termes d'énergie :

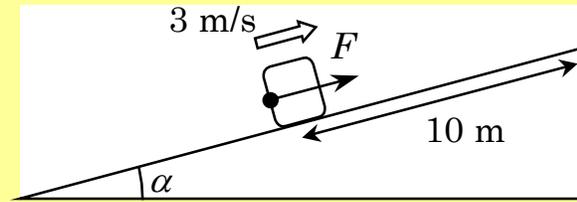
- $W_a = 0$
- $K_i = 0$
- $K_f = 0$
- $U_{gi} = mgy_i = (0,5)(9,8)(0,2) \Rightarrow U_{gi} = 0,98 \text{ J}$
- $U_{gf} = mgy_f = (0,5)(9,8)y_f \Rightarrow U_{gf} = 4,9y_f$
- $U_{ri} = \frac{1}{2}ke_i^2 = \frac{1}{2}(800)(-0,05)^2 \Rightarrow U_{ri} = 1 \text{ J}$
- $U_{rf} = 0$

Appliquons la conservation de l'énergie afin d'évaluer la hauteur  $y_f$  finale :

$$\begin{aligned} K_f + U_{rf} + U_{gf} &= K_i + U_{ri} + U_{gi} + W_a && \text{(Conservation de l'énergie)} \\ \Rightarrow U_{gf} &= U_{ri} + U_{gi} && \text{(Retirer termes nuls)} \\ \Rightarrow 4,9y_f &= (1) + (0,98) && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ \Rightarrow 4,9y_f &= 1,98 && \text{(Calcul)} \\ \Rightarrow \boxed{y_f = 0,404 \text{ m}} &&& \text{(Isoler } y_f \text{)} \end{aligned}$$

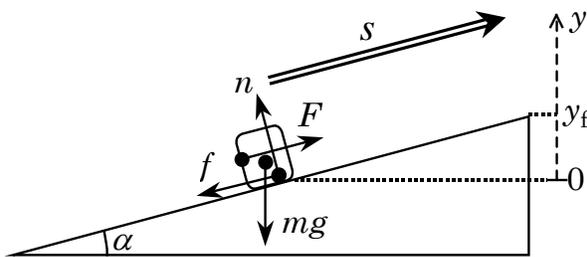
**Situation 6 : Une pente à remonter.**

Albert et Béatrice poussent sur une caisse de 100 kg afin de la hisser en haut d'un plan de 20 m de longueur inclinée à  $\alpha = 15^\circ$  par rapport à l'horizontale. Il y a un coefficient de frottement cinétique de 0,3 entre le plan et la caisse.

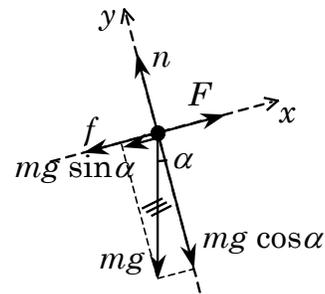


À mi-chemin, alors que la caisse se déplace à 3 m/s, Albert tombe essoufflé et Béatrice demeure seule pour pousser sur la caisse : elle maintient une force constante  $F = 500$  N parallèle au plan. On désire déterminer le module de la vitesse de la caisse en haut de la pente.

Schéma des forces :



Décomposition des forces :



Voici les données disponibles :

$$m = 100 \text{ kg}$$

$$\text{et } W_a = W_F + W_f$$

(Normale fait un travail nul,  $W_n = 0$ )

$$\alpha = 15^\circ$$

$$F = 500 \text{ N}$$

$$s = 10 \text{ m}$$

$$f = \mu_c n$$

(Frottement cinétique)

Avec la 2<sup>e</sup> loi de Newton, évaluons la force normale  $n$  :

$$\sum F_y = ma_y \quad \Rightarrow \quad n - mg \cos(\alpha) = ma_y \quad (\text{Remplacer } \sum F_y)$$

$$\Rightarrow n - mg \cos(\alpha) = 0 \quad (a_y = 0)$$

$$\Rightarrow n = mg \cos(\alpha) \quad (\text{Isoler } n)$$

$$\Rightarrow n = (100)(9,8)\cos(15^\circ) \quad (\text{Remplacer valeurs numérique})$$

$$\Rightarrow \boxed{n = 946,6 \text{ N}} \quad (\text{Évaluer } n)$$

Évaluons le frottement cinétique :

$$f = \mu_c n \quad \Rightarrow \quad f = (0,3)(946,6) \quad (\text{Remplacer valeurs numérique})$$

$$\Rightarrow \boxed{f = 284,0 \text{ N}} \quad (\text{Évaluer } f)$$

Voici les mesures que nous pouvons obtenir de notre système d'axe :

Configuration initiale		Configuration finale		
$y_i = 0$	$v_i = 3 \text{ m/s}$	$y_f = s \sin(\alpha)$ $y_f = (10)\sin(15^\circ)$ $y_f = 2,59 \text{ m}$	$v_f = ?$	

Évaluons nos termes d'énergie :

$$\bullet K_i = \frac{mv_i^2}{2} = \frac{(100)(3)^2}{2} \Rightarrow \boxed{K_i = 450 \text{ J}}$$

$$\bullet K_f = \frac{mv_f^2}{2} = \frac{(100)v_f^2}{2} \Rightarrow \boxed{K_f = 50v_f^2}$$

$$\bullet U_{gi} = 0$$

$$\bullet U_{gf} = mgy_f = (100)(9,8)(2,59) \Rightarrow \boxed{U_{gf} = 2538,2 \text{ J}}$$

Avec la définition du travail, nous pouvons évaluer le travail de  $F$  et  $f$ : ( $W = F s \cos(\theta)$ )

$$\bullet W_F = F s \cos(\theta) = (500)(10)\cos(0^\circ) \Rightarrow \boxed{W_F = 5000 \text{ J}}$$

$$\bullet W_f = f s \cos(\theta) = (284)(10)\cos(180^\circ) \Rightarrow \boxed{W_f = -2840 \text{ J}}$$

Avec la conservation de l'énergie, évaluons la vitesse finale  $v_f$  :

$$K_f + U_{rf} + U_{gf} = K_i + U_{ri} + U_{gi} + W_a \quad (\text{Conservation de l'énergie})$$

$$\Rightarrow K_f + U_{gf} = K_i + W_a \quad (U_{rf} = U_{ri} = U_{gi} = 0)$$

$$\Rightarrow K_f + U_{gf} = K_i + (W_F + W_f) \quad (W_a = W_F + W_f)$$

$$\Rightarrow (50v_f^2) + (2538,2) = (450) + (5000) + (-2840) \quad (\text{Remplacer valeurs numériques})$$

$$\Rightarrow 50v_f^2 = 71,8 \quad (\text{Calcul})$$

$$\Rightarrow v_f^2 = 1,436 \quad (\text{Isoler } v_f^2)$$

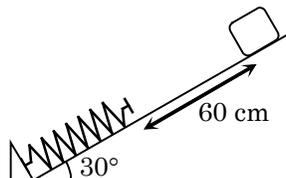
$$\Rightarrow v_f = \pm 1,20 \quad (\text{Résoudre } v_f)$$

$$\Rightarrow \boxed{v_f = 1,20 \text{ m/s}} \quad (\text{Choisir la vitesse positive})$$

## Exercices

**3.4.10** *La tête en bas, prise 2.* Dans le montage de l'exercice **3.4.9**, quelle doit être la valeur minimale de  $H$  pour que le chariot demeure en contact avec la piste au point  $C$  ?

**3.4.15** *Un ressort pour freiner la descente.* Sur un plan sans frottement incliné à  $30^\circ$  par rapport à l'horizontale, un bloc de 2 kg initialement immobile glisse sur une distance de 60 cm avant de rencontrer un ressort idéal. On observe que la compression maximale du ressort est égale à 20 cm. Que vaut sa constante de rappel?



**3.4.16** *Un ressort pour freiner la descente, prise 2.* À l'exercice **3.4.15**, quelle serait la compression maximale du ressort en présence d'un coefficient de frottement cinétique de 0,4 entre le bloc et le plan? (Utilisez la même constante de ressort que celle trouvée dans l'exercice **3.4.15**.)

## Solutions

### 3.4.10 La tête en bas, prise 2.

En construction ...

### 3.4.12 Un ressort pour freiner la descente.

Système d'axe : Prenons l'axe  $y$  verticale vers le haut avec  $y = 0$  à la position initiale du bloc (en haut).

Moment initial : Bloc en haut du plan.

Moment final : Bloc en bas du plan comprimant le ressort.

Avec la conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} E_f &= E_i + W_{nc} & \Rightarrow & K_f + U_{gf} + U_{rf} = K_i + U_{gi} + U_{ri} + W_{nc} \\ & & \Rightarrow & \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f + \frac{1}{2}ke_f^2 = \frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i + \frac{1}{2}ke_i^2 + W_{nc} \\ & & \Rightarrow & mgy_f + \frac{1}{2}ke_f^2 = 0 \quad (y_i = 0, e_i = 0, v_i = 0, v_f = 0, W_{nc} = 0) \\ & & \Rightarrow & \frac{1}{2}ke_f^2 = -mgy_f \\ & & \Rightarrow & k = -\frac{2mgy_f}{e_f^2} \end{aligned}$$

Avec :  $y_f = -(0,6 + 0,2)\sin(30^\circ) = -0,4 \text{ m}$

et  $e_f = 0,2 \text{ m}$

Alors :  $k = -\frac{2mgy_f}{e_f^2} = -\frac{2(2)(9,8)(-0,4)}{(0,2)^2} \Rightarrow \boxed{k = 392 \text{ N/m}}$

### 3.4.13 Un ressort pour freiner la descente, prise 2.

En construction ...



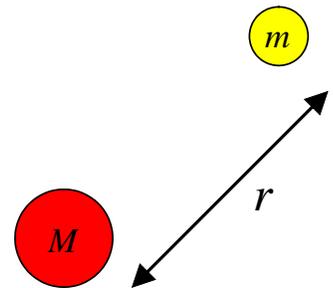
# Chapitre 3.6 – L'énergie potentielle gravitationnelle des astres

## Énergie potentielle gravitationnelle de deux masses

De façon générale, on peut associer une **énergie potentielle gravitationnelle**  $U_g$  à un système de deux **masses ponctuelles** ou **sphériques et homogènes** s'exerçant des forces gravitationnelles entre elles selon la distance  $r$  qui séparent les deux masses :

$$U_g = -\frac{GMm}{r}$$

- où
- $U_g$  : Énergie potentielle gravitationnelle entre  $M$  et  $m$  (J).
  - $M$  : Masse qui produit le champ gravitationnel (kg).
  - $m$  : Masse qui subit l'influence du champ gravitationnel (kg).
  - $G$  : Constante de la gravitation universelle ( $6,67 \times 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ ).
  - $r$  : Distance entre la masse  $M$  et  $m$  (m).



**Convention :** Lorsque  $r = \infty$ ,  $U_\infty = 0$

Remarques :

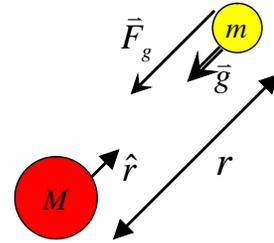
- ❖ L'énergie potentielle gravitationnelle est toujours négative ( $U_g < 0$ ). Le **signe négatif** dans la définition de l'énergie potentielle gravitationnelle est très important, car cela signifie qu'il y a une **attraction** entre les deux masses  $M$  et  $m$ .
- ❖ L'énergie potentielle gravitationnelle ne dépend pas d'un système d'axe, mais uniquement de la distance  $r$  qui séparent les deux masses.
- ❖ Lorsque la distance entre les deux masses est **très petite**, **l'énergie est très négative**.  
( $r$  petit  $\Rightarrow$  peu d'énergie potentielle, donc  $U_g$  très négatif)
- ❖ Lorsque la distance entre les deux masses est **très grande**, **l'énergie tend vers zéro**.  
( $r$  grand  $\Rightarrow$  beaucoup d'énergie potentielle, donc  $U_g$  près de zéro et négatif)

Preuve :

À partir de la définition générale de la force gravitationnelle

$$\vec{F}_g = -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} ,$$

évaluons le travail effectué par cette force lorsque la masse  $m$  s'éloigne de  $M$  dans la direction radiale ce qui correspond à un déplacement dans la direction de  $\hat{r}$  :



$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} \Rightarrow W = \int_{r=r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (\text{Déplacement selon de l'axe } r : d\vec{s} = d\vec{r} )$$

$$\Rightarrow W = \int_{r=r_i}^{r_f} \vec{F} \cdot dr \hat{r} \quad (\text{Remplaçons } d\vec{r} = dr \hat{r} )$$

$$\Rightarrow W = \int_{r=r_i}^{r_f} -G \frac{Mm}{r^2} \hat{r} \cdot dr \hat{r} \quad (\text{Expression de la force : } \vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{r} )$$

$$\Rightarrow W = -GMm \int_{r=r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2} \hat{r} \cdot \hat{r} \quad (\text{Factoriser les constantes})$$

$$\Rightarrow W = -GMm \int_{r=r_i}^{r_f} \frac{dr}{r^2} \quad (\text{Produit scalaire : } \hat{r} \cdot \hat{r} = 1 )$$

$$\Rightarrow W = -GMm \left[ \frac{-1}{r} \right]_{r_i}^{r_f} \quad (\text{Résoudre l'intégrale : } \int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} )$$

$$\Rightarrow W = -GMm \left( \frac{-1}{r_f} - \frac{-1}{r_i} \right) \quad (\text{Évaluer l'intégrale})$$

$$\Rightarrow W = - \left( \frac{GMm}{r_i} - \frac{GMm}{r_f} \right) \quad (\text{Simplifier})$$

$$\Rightarrow W = \left( -\frac{GMm}{r_i} \right) - \left( -\frac{GMm}{r_f} \right) \quad (\text{Intégrer le signe négatif à la définition})$$

$$\Rightarrow W_g = U_{gi} - U_{gf} \quad (\text{Remplacer } U_{gi} = -\frac{GMm}{r_i} \text{ et } U_{gf} = -\frac{GMm}{r_f} )$$

# Différence entre les deux équations de l'énergie potentielle gravitationnelle

Voici les deux expressions associées à l'énergie potentielle gravitationnelle  $U_g$  :

- 1)  $U_g = mgy$  (Valide si le champ gravitationnel est constant)
- 2)  $U_g = -\frac{GMm}{r}$  (Valide pour des masses sphériques ou ponctuelles)

**Situation A : La chute de la brique en deux méthodes.** On désire évaluer la variation de l'énergie potentielle gravitationnelle d'une brique de 0,4 kg qui tombe d'une hauteur de 2 m au sol à l'aide des deux expressions pour l'énergie potentielle gravitationnelle. L'expérience se fait sur la Terre ( $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ,  $M_T = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$ ,  $R_T = 6380 \text{ km}$ ).

Méthode 1 : Champ gravitationnel constant

$$\bullet U_{gi} = mgy_i = (0,4)(9,8)(2) \Rightarrow U_{gi} = 7,84 \text{ J}$$

$$\bullet U_{gf} = mgy_f = (0,4)(9,8)(0) \Rightarrow U_{gf} = 0 \text{ J}$$

$$\bullet \Delta U_g = U_{gf} - U_{gi} = (0) - (7,84) \Rightarrow \Delta U_g = -7,84 \text{ J}$$

Méthode 2 : Équation générale (9 chiffres significatifs)

$$\bullet U_{gi} = -\frac{GMm}{r_i} = -\frac{(6,67 \times 10^{-11})(5,98 \times 10^{24})(0,4)}{6380002} \Rightarrow U_{gi} = -25007264,89 \text{ J}$$

$$\bullet U_{gf} = -\frac{GMm}{r_f} = -\frac{(6,67 \times 10^{-11})(5,98 \times 10^{24})(0,4)}{6380000} \Rightarrow U_{gf} = -25007272,73 \text{ J}$$

$$\bullet \Delta U_g = U_{gf} - U_{gi} = (-25007272,73) - (-25007264,89) \Rightarrow \Delta U_g = -7,84 \text{ J}$$

Conclusion :

Lorsqu'il y a un petit déplacement dans un champ gravitationnel relativement constant, l'expression  $U_g = mgy$  est assez précise et donc valide.

# Énergie totale d'un système et type de trajectoire

L'énergie totale  $E$  d'un système est égale à l'addition de l'énergie cinétique totale  $K$  avec l'énergie potentielle totale  $U$  :

$$E = K + U$$

- où
- $E$  : Énergie totale du système (J)
  - $K$  : Énergie cinétique totale du système (J)
  - $U$  : Énergie potentielle totale du système (J)

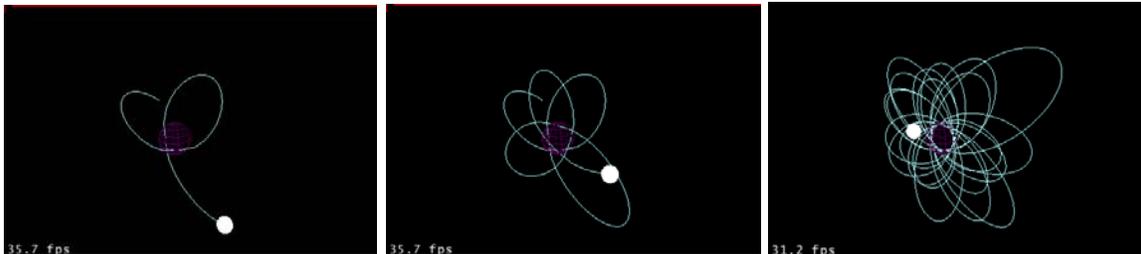


Le système Terre-Lune possède une énergie totale négative.

Dans un système à deux corps massifs, l'énergie potentielle gravitationnelle des deux masses  $M$  et  $m$  est **toujours négative**. Il y a donc trois scénarios possibles pour le bilan de l'énergie qui produisent des trajectoires différentes :

Bilan de l'énergie	Comparaison $K$ et $U$	Type de trajectoire	Exemple
$E < 0$	$ K  <  U $	Fermée	Système Terre-Lune
$E = 0$	$ K  =  U $	Ouverte à l'infini	Vitesse de libération <sup>1</sup>
$E > 0$	$ K  >  U $	Ouverte	Comète qui ne repassera pas près de la Terre

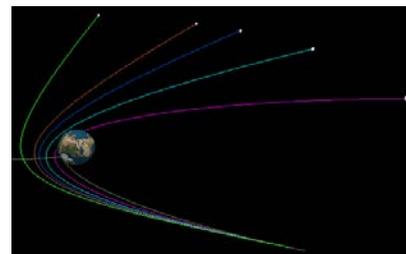
Exemple : Système où  $E < 0$  avec  $W_{nc}$  ( $M$  est immobile et  $m$  est en mouvement)



Pour quitter la liaison, la masse  $m$  doit acquérir une énergie externe afin que le système puisse satisfaire  $E \geq 0$ . Un moteur pourrait jouer ce rôle permettant au système d'augmenter son énergie totale via un travail non-conservatif  $W_{nc}$ . C'est grâce à cette technique que l'on peut envoyer des satellites dans l'espace.

Exemple : système où  $E > 0$  ( $M$  est immobile et  $m$  est en mouvement)

La masse  $m$  possède une vitesse non nulle à une très grande distance de la masse  $M$  et elle sera déviée lorsqu'elle passera près de la masse  $M$  attractive. L'objet n'est pas en orbite.



<sup>1</sup> La vitesse de libération sera présentée dans la situation 2.  
Référence : Marc Séguin, Physique XXI Tome A  
Note de cours rédigée par Simon Vézina

**Situation 2 : La vitesse de libération sur la Lune.** De la surface de la Lune, on lance une balle vers le haut. On désire déterminer le module de la vitesse minimale qu'elle doit posséder pour ne jamais retomber. La Lune a une masse de  $7,35 \times 10^{22}$  kg et un rayon de 1738 km.



Donnée de base :

Initiale :  $r_i = r_{Lune}$        $U_{gi} = -G \frac{mM}{r_i}$       et       $K_i = \frac{1}{2} m v_i^2$

Finale :  $r_f = \infty$        $U_{gf} = 0$       et       $K_f = 0$  car  $v_\infty = 0$

Appliquons la conservation de l'énergie : ( $W_{nc} = 0$  J)

$$U_{gf} + K_f = U_{gi} + K_i + W_{nc} \Rightarrow 0 = -G \frac{mM}{r_i} + \frac{1}{2} m v_i^2 \quad (\text{Remplacer termes})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_i^2 = G \frac{mM}{r_i} \quad (\text{Isoler énergie cinétique})$$

$$\Rightarrow v_i^2 = 2G \frac{M}{r_i} \quad (\text{Isoler } v_i^2)$$

$$\Rightarrow v_i = \sqrt{2G \frac{M}{r_i}} \quad (\text{Vitesse de libération})$$

$$\Rightarrow v_i = \sqrt{2(6,67 \times 10^{-11}) \frac{(7,35 \times 10^{22})}{(1,738 \times 10^6)}} \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow v_i = 2,38 \times 10^3 \text{ m/s} \quad (\text{Évaluer } v_i = 2,38 \text{ km/s})$$

## Vitesse de libération

La vitesse de libération  $v_{lib}$  correspond à la vitesse initiale minimale que doit avoir un objet situé à une distance  $r$  d'un corps très massif de masse  $M$  (comme la Terre ou le Soleil) afin de pouvoir s'en éloigner jusqu'à une distance infinie ( $v_\infty = 0$ ) :

$$v_{lib} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$



Fusée en décollage

Sur Terre, cette vitesse est égale à **11,2 km/s**. À cette vitesse, le frottement de l'air est très important. C'est pour cette raison qu'on ne peut pas uniquement lancer de la Terre un objet ayant comme destination l'espace. Il faut le propulser graduellement (voir image ci-contre).

- Libération du Soleil depuis la Terre :  $\approx 42,1$  km/s
- Libération de la Lune depuis la Lune :  $\approx 2,4$  km/s
- Libération de la voie lactée depuis notre système solaire :  $\approx 1000$  km/s





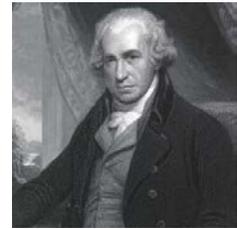


# Chapitre 3.7 – La puissance

## La puissance

La puissance fut introduite par le mathématicien et ingénieur écossais James Watt lors de ses recherches sur l'amélioration de la machine à vapeur.

La puissance permet de quantifier le rythme auquel l'énergie peut être transformée. La **puissance** est donc l'**agent** qui fait **varier** la **transformation de l'énergie** dans le **temps**. Une machine très puissante va donc transformer beaucoup d'énergie en très peu de temps.



James Watt  
(1736-1819)

Notation mathématique :  $Puissance = P$

Unité SI (watt):  $[P] = W$

Correspondance :  $W = \frac{J}{s} = \frac{N \cdot m}{s} = kg \cdot \frac{m}{s^2} \cdot m \cdot \frac{1}{s} = \frac{kg \cdot m^2}{s^3}$

## Puissance moyenne

S'il y a variation d'énergie sur un intervalle de temps donné, on peut calculer la puissance moyenne de la façon suivante :

$$\bar{P} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

où  $\bar{P}$  : Puissance moyenne (W).  
 $\Delta E$  : Variation de l'énergie (J).  
 $\Delta t$  : Intervalle de temps (s).

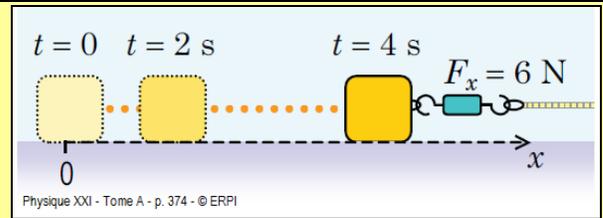
Si la variation d'énergie est associée à un travail, il est possible d'évaluer la puissance moyenne associé à ce travail. Il ne faut pas perdre de vue que le travail est justement un processus de transformation de l'énergie :

$$\bar{P} = \frac{W}{\Delta t}$$

où  $\bar{P}$  : Puissance moyenne (W).  
 $W$  : Le travail effectué (J).  
 $\Delta t$  : Intervalle de temps (s).

Rappel :  $E_f = E_i + W \Rightarrow W = E_f - E_i = \Delta E$

**Situation 2 : La puissance d'Albert, prise 2.** Sur une surface horizontale sans frottement, Albert tire sur un bloc de 3 kg avec une force horizontale de 6 N. Albert commence à tirer à  $t = 0$  : le bloc est initialement immobile.



On désire déterminer la puissance moyenne associée au travail effectué par Albert sur le bloc entre  $t = 2$  s et  $t = 4$  s.

Évaluer l'accélération du bloc :

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= m\vec{a} & \Rightarrow & F = ma_x & \text{(Décomposition selon l'axe } x) \\ & & \Rightarrow & a_x = \frac{F}{m} = \frac{(6)}{(3)} & \text{(Isoler } a_x \text{ et remplacer les valeurs num.)} \\ & & \Rightarrow & \boxed{a_x = 2 \text{ m/s}^2} & \text{(Calculer } a_x) \end{aligned}$$

Utiliser les équations du MUA pour déterminer la position du bloc :

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 & \Rightarrow & x(t=2) = x_2 = (0) + (0)(2) + \frac{1}{2}(2)(2)^2 = 4 \text{ m} \\ & & & x(t=4) = x_4 = (0) + (0)(4) + \frac{1}{2}(2)(4)^2 = 16 \text{ m} \end{aligned}$$

Évaluer le travail :

$$\begin{aligned} W &= F s \cos(\theta) & \Rightarrow & W = F s \cos(0^\circ) & \text{(Angle } \theta = 0^\circ \text{ entre } F \text{ et } s) \\ & & \Rightarrow & W = F(x_4 - x_2) & \text{(Remplacer } s = x_4 - x_2) \\ & & \Rightarrow & W = 6(16 - 4) & \text{(Remplacer les valeurs num.)} \\ & & \Rightarrow & \boxed{W = 72 \text{ J}} & \text{(Calculer } W) \end{aligned}$$

Évaluer la puissance :

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{W}{\Delta t} & \Rightarrow & \bar{P} = \frac{(72)}{(4-2)} & \text{(Remplacer les valeurs num.)} \\ & & \Rightarrow & \boxed{\bar{P} = 36 \text{ W}} & \text{(Calculer } \bar{P}) \end{aligned}$$

## La puissance instantanée

Si le taux auquel l'énergie se transforme n'est pas constant, la puissance moyenne ne sera pas exacte. Si l'on connaît l'expression de l'énergie en fonction du temps  $E(t)$ , nous pouvons faire le calcul :

$$P = \frac{dE(t)}{dt} \quad \text{ou} \quad P = \frac{dW}{dt}$$

Si l'on étudie les unités de la puissance, il est possible de trouver une autre formule très pratique pour évaluer la puissance :

$$W = \left( \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}^3} \right) = \left( \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \right) = \left( \text{N} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

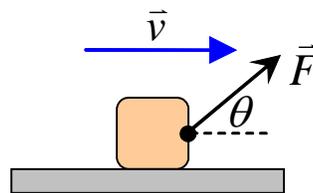
Avec la définition d'un élément de travail infinitésimal  $dW = F \cos(\theta) ds$ , on peut construire l'équation suivante :

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{F \cos(\theta) ds}{dt} = F \cos(\theta) \frac{ds}{dt} = F \cos(\theta) v \quad \text{où} \quad v = \frac{ds}{dt}$$

Voici une équation alternative afin d'évaluer la puissance instantanée :

$$P = F v \cos(\theta)$$

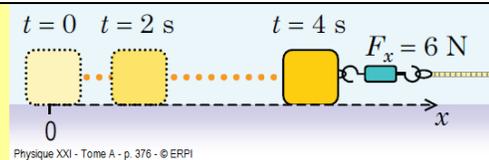
- où
- $P$  : Puissance instantanée associée à la force  $F$  (W).
  - $F$  : Force qui effectue un travail (N).
  - $v$  : Vitesse à laquelle la force est appliquée (m/s).
  - $\theta$  : Angle entre l'orientation de la force et la vitesse



Avec la définition du produit scalaire, on peut réécrire l'équation précédente de la façon suivante :

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

**Situation 3 : La puissance instantanée d'Albert.** À la situation 2, on désire déterminer la puissance instantanée à  $t = 2 \text{ s}$  et  $t = 4 \text{ s}$ .



Nous réutilisons les calculs déjà effectués :  $F = 6 \text{ N}$  et  $a_x = 2 \text{ m/s}^2$

Évaluons la vitesse du bloc à l'aide des équations du MUA :

$$v_x(t) = v_{x0} + a_x t \quad \Rightarrow \quad v_x(t = 2) = v_{x2} = (0) + (2)(2) = 4 \text{ m/s}$$

$$\Rightarrow \quad v_x(t = 4) = v_{x4} = (0) + (2)(4) = 8 \text{ m/s}$$

Évaluons la puissance instantanée :

$$P = F v \cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad P_2 = F v_{x2} \cos(\theta) = (6)(4)\cos(0^\circ) = 24 \text{ W}$$

$$P_4 = F v_{x4} \cos(\theta) = (6)(8)\cos(0^\circ) = 48 \text{ W}$$

Remarque : Nous retrouvons la même puissance moyenne évaluée à la situation 2 :

$$\bar{P} = \frac{P_2 + P_4}{2} = \frac{(24) + (48)}{2} = 36 \text{ W}$$

## Le Cheval-vapeur

Le cheval-vapeur (*horsepower*) est une unité de puissance inventée par l'ingénieur James Watt en 1782 durant son étude sur les performances des machines à vapeur. L'unité permet de comparer la puissance fournie par cheval tirant une charge et la puissance fournie et par une machine ayant une propulsion grâce à la vapeur tirant une même charge.



Locomotive à vapeur

Unité (cheval-vapeur) :  $[P] = \text{hp}$

Correspondance :  $1 \text{ hp} = 746 \text{ W}$  (système britannique)

$1 \text{ hp} = 736 \text{ W}$  (système métrique)

## Le Kilowattheure

Le kilowattheure est une unité fréquemment utilisée dans la vente d'énergie électrique, comme chez Hydro-Québec. Il est important de réaliser que le kilowattheure n'est pas de la puissance, mais de la **puissance multipliée** par du **temps**, ce qui donne une unité d'énergie.



Compteur électrique

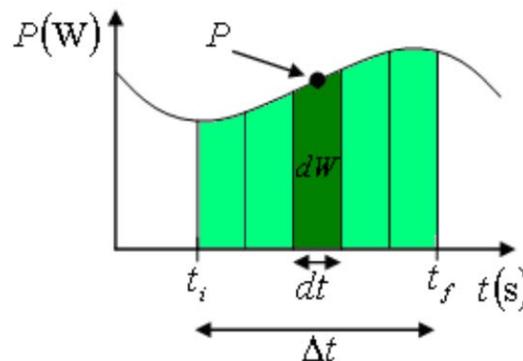
Unité (kilowattheure) :  $[E] = \text{kWh}$

Correspondance :  $1 \text{ kWh} = 1 \text{ kWh} \times \frac{1000}{1 \text{ k}} \times \frac{\text{J/s}}{\text{W}} \times \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 3,6 \times 10^6 \text{ J} = 3,6 \text{ MJ}$

## Le travail à partir de la puissance

À partir de la définition de la puissance, on peut faire l'aire sous la courbe du graphique de puissance en fonction du temps et évaluer le travail  $W = \Delta E$  effectué sur un intervalle de temps  $\Delta t$  :

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{dE}{dt} &\Rightarrow & dE = P dt \\
 & &\Rightarrow & \int_{E=E_i}^{E_f} dE = \int_{t=t_i}^{t_f} P dt \\
 & &\Rightarrow & E_f - E_i = \int_{t=t_i}^{t_f} P dt \\
 & &\Rightarrow & W = \int_{t=t_i}^{t_f} P dt
 \end{aligned}$$











# Chapitre 3.10a – L'impulsion et la quantité de mouvement

## L'impulsion d'une force constante

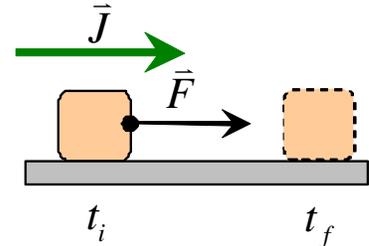
L'impulsion correspond au transfert de quantité de mouvement causé par une force  $\vec{F}$  appliquée durant un intervalle de temps  $\Delta t$  :

$$\vec{J} = \vec{F} \Delta t$$

où  $\vec{J}$  : Impulsion appliquée sur un objet (Ns)

$\vec{F}$  : Force qui effectue l'impulsion (N)

$\Delta t$  : Durée d'application de la force ( $\Delta t = t_f - t_i$ ) (s)



## La quantité de mouvement

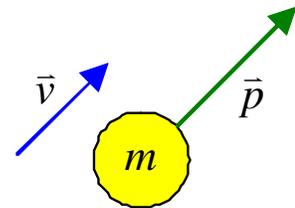
La quantité de mouvement est une mesure de l'état de mouvement d'un objet ayant une vitesse de translation  $\vec{v}$  et une masse  $m$ . On définit classiquement<sup>1</sup> la quantité de mouvement de la façon suivante :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

où  $\vec{p}$  : La quantité de mouvement associé à un objet (kg · m/s)

$m$  : La masse de l'objet (kg)

$\vec{v}$  : La vitesse de l'objet (m/s)



## Théorème de la quantité de mouvement

Le **théorème** de la quantité de mouvement nous permet d'affirmer que **l'impulsion** est **l'agent** qui fait **varier** la **quantité de mouvement** dans le **temps** :

Puisque qu'une impulsion produit une variation de la quantité de mouvement, nous pouvons ajouter ce terme à notre théorème de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{p}_f = \vec{p}_i + \vec{J}$$

où  $\vec{p}_f$  : Quantité de mouvement final (Ns ou kg · m/s)

$\vec{p}_i$  : Quantité de mouvement initiale (Ns ou kg · m/s)

$\vec{J}$  : Impulsion totale extérieure appliquée (Ns)

Unité : 
$$\text{Ns} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} \text{s} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}} = \text{kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

<sup>1</sup> En mécanique relativiste, la quantité de mouvement est égale à  $\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ .

### Preuve :

À partir de la 2<sup>ième</sup> loi de Newton, appliquons une force durant un intervalle de temps (impulsion  $\vec{J}$ ) afin de produire une variation de la quantité de mouvement  $\vec{p}$  :

$$\begin{aligned}\vec{F} = m\vec{a} &\Rightarrow \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} && \text{(Remplacer } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \text{)} \\ &\Rightarrow \vec{F}dt = m d\vec{v} && \text{(Multiplier par } dt \text{)} \\ &\Rightarrow \vec{F}dt = d(m\vec{v}) && \text{(Distribuer } m \text{ dans la dérivée)} \\ &\Rightarrow \vec{F}dt = d\vec{p} && \text{(Remplacer } \vec{p} = m\vec{v} \text{)} \\ &\Rightarrow \vec{F}\Delta t = \Delta\vec{p} && \text{(Relaxer notation } d \rightarrow \Delta \text{)} \\ &\Rightarrow \vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i && \text{(Remplacer } \vec{J} = \vec{F}\Delta t \text{)} \\ &\Rightarrow \vec{p}_f = \vec{p}_i + \vec{J} \quad \blacksquare && \text{(Réécriture)}\end{aligned}$$

**Situation A : On pousse une boîte.** Une boîte 2 kg ayant une vitesse initiale de 2 m/s selon l'axe négatif des  $x$  est poussée à l'aide d'une force de 5 N selon l'axe positif des  $x$  pendant 3 secondes. On désire déterminer la vitesse de la boîte après 3 secondes de poussée.

Appliquons le théorème de la quantité de mouvement selon l'axe  $x$  afin d'évaluer la vitesse de la boîte après 3 secondes de poussée constante :

$$\begin{aligned}p_{xf} = p_{xi} + J_x &\Rightarrow (mv_{xf}) = (mv_{xi}) + J_x && \text{(Remplacer } p_x = mv_x \text{)} \\ &\Rightarrow mv_{xf} = mv_{xi} + (F_x \Delta t) && \text{(Remplacer } J_x = F_x \Delta t \text{)} \\ &\Rightarrow (2)v_{xf} = (2)(-2) + (5)(3) && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ &\Rightarrow 2v_{xf} = -4 + 15 && \text{(Calcul)} \\ &\Rightarrow \boxed{v_{xf} = 5,5 \text{ m/s}} && \text{(Évaluer } v_{xf} \text{)}\end{aligned}$$

## La 2<sup>ième</sup> loi de Newton avec la quantité de mouvement

La 2<sup>ième</sup> loi de Newton peut être réécrite à l'aide de la définition de la quantité de mouvement  $\vec{p}$ . Sous cette forme<sup>2</sup>, cette loi permet plus facilement de mettre en relation l'influence d'une force et la modification de l'état de mouvement d'un objet :

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

où  $\vec{F}$  : La force appliquée en newton (N)  
 $\vec{p}$  : Quantité de mouvement associé à un objet (kg · m/s)  
 $t$  : Le temps en seconde (s)

<sup>2</sup> C'est plutôt sous cette forme qu'Isaac Newton a énoncé sa 2<sup>ième</sup> loi.

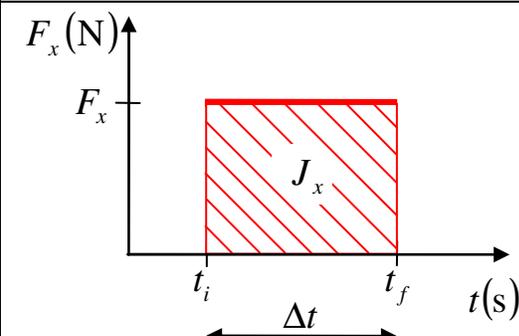
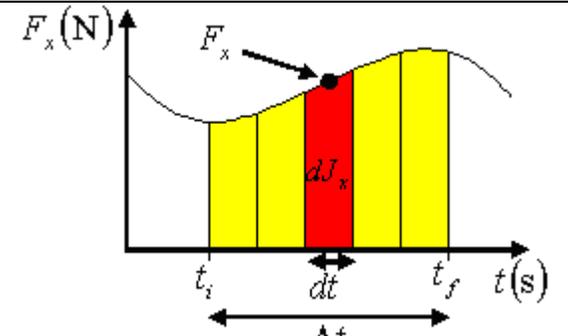
Preuve :

À partir de la 2<sup>ième</sup> loi de Newton, effectuons une réécriture de cette loi introduisant la notion de quantité de mouvement  $\vec{p}$  :

$$\begin{aligned} \vec{F} = m\vec{a} &\Rightarrow \vec{F} = m \frac{d\vec{v}}{dt} && \text{(Définition de l'accélération, } \vec{a} = d\vec{v} / dt \text{)} \\ &\Rightarrow \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} && \text{(Entrer la constante } m \text{ dans la dérivée)} \\ &\Rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} && \blacksquare \text{ (Remplacer } \vec{p} = m\vec{v} \text{)} \end{aligned}$$

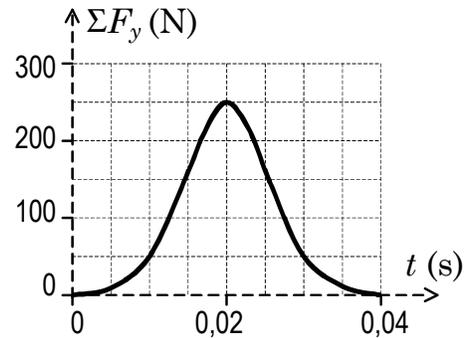
### L'impulsion d'une force non constante

Pour évaluer l'impulsion  $\vec{J}$  d'une force  $\vec{F}$ , nous avons besoin d'évaluer l'**aire sous la courbe** d'un graphique de **force en fonction** du temps  $t$ . Ce calcul peut s'effectuer grâce à l'**intégrale** d'une fonction  $F_x(t)$  :

Force constante	Force non constante
	
$J_x = F_x \Delta t$	(selon l'axe x) $J_x = \int_{t=t_i}^{t_f} F_x dt$
	(vectoriel) $\vec{J} = \int_{t=t_i}^{t_f} \vec{F} dt$

**Chapitre 3.12 - Situation 1 : Une balle rebondit.**

Une balle de 0,1 kg rebondit sur le sol. L'interaction entre le sol et la balle dure 0,04 s. Pendant cet intervalle de temps, la force résultante agissant sur la balle (selon un axe y dont le sens positif est orienté vers le haut) est donnée par le graphique ci-contre. Immédiatement avant le début de l'interaction, la vitesse de la balle est égale à  $-20 \vec{j}$  m/s. On désire déterminer sa vitesse immédiatement après la fin de l'interaction.



Évaluons la quantité de mouvement avant l'impact :

$$\vec{p}_i = m\vec{v}_i \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_i = (0,1)(-20\vec{j}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{p}_i = -2 \vec{j} \text{ Ns}}$$

Évaluons l'impulsion donnée par le sol :

$$1 \text{ carré} = 1 \text{ un} = 50 \text{ N} \times 0,005 \text{ s} = 0,25 \text{ Ns}$$

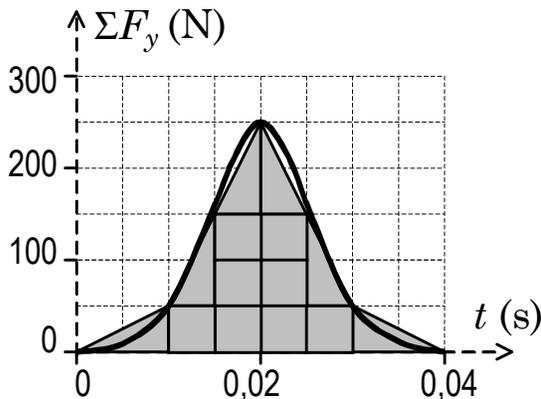
Avec :

$$\vec{J} = \int_{t=t_i}^{t_f} \vec{F} dt = \text{aire sous la courbe}$$

$$\Rightarrow \vec{J} = 8 \text{ carrés (1 un)} \vec{j} + 6 \text{ triangles (1 un)} \vec{j}$$

$$\Rightarrow \vec{J} = 14 \times 0,25 \vec{j}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{J} = 3,5 \vec{j} \text{ Ns}}$$



Nous pouvons évaluer la quantité de mouvement finale à partir de la conservation de la quantité de mouvement :

$$\vec{p}_f = \vec{p}_i + \vec{J} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_f = (-2\vec{j}) + (3,5\vec{j}) \quad (\text{Remplacer num.})$$

$$\Rightarrow \vec{p}_f = 1,5 \vec{j} \quad (\text{Calcul})$$

$$\Rightarrow m\vec{v}_f = 1,5 \vec{j} \quad (\text{Quantité de mouvement, } \vec{p} = m\vec{v})$$

$$\Rightarrow (0,1)\vec{v}_f = 1,5\vec{j} \quad (\text{Remplacer num.})$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_f = 15 \vec{j} \text{ m/s}} \quad (\text{Isoler la vitesse finale } \vec{v}_f)$$

## L'énergie cinétique avec la quantité de mouvement

À partir de la quantité de mouvement  $\vec{p}$  d'une particule, nous pouvons établir la relation classique<sup>3</sup> suivante avec l'énergie cinétique  $K$  :

$$K = \frac{p^2}{2m}$$

où  $K$  : L'énergie cinétique de la particule (J)  
 $p$  : La quantité de mouvement de la particule (kg · m/s)  
 $m$  : La masse de la particule (kg)

Preuve :

À partir de l'expression de l'énergie cinétique, introduisons la référence à la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{2}mv^2 &\Rightarrow K = \frac{1}{2}mv^2 \frac{m}{m} && \text{(Multiplier par } m/m \text{)} \\ &\Rightarrow K = \frac{1}{2m}(mv)^2 && \text{(Réorganisation des termes)} \\ &\Rightarrow K = \frac{p^2}{2m} \quad \blacksquare && \text{(Remplacer } p = mv \text{)} \end{aligned}$$

---

<sup>3</sup> Lorsque la particule voyage à une vitesse de l'ordre de la vitesse de la lumière ( $\approx 3 \times 10^8$  m/s), alors l'expression classique doit être adaptée à la mécanique relativiste.



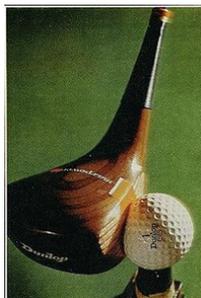




# Chapitre 3.10b – La conservation de la quantité de mouvement

## La collision

Lors d'une collision entre deux objets, puisque les objets ne peuvent occuper le même espace au même moment, il se produit des **forces de contact** entre les objets que nous avons nommées **forces normales**. Ces forces de nature électrique peuvent être appliquées pendant de très court intervalle de temps. Ces forces permettent aux objets de **ralentir**, **s'immobiliser** ou **changer de direction**.



<http://pages.videotron.com/sellig01/saviezvous/saviez1.html>

Une balle de golf se déforme à la collision.



<http://www.foozine.com/photo/automoto/3844-petit-carambolage/>

Un carambolage représente plusieurs collisions à plusieurs corps.

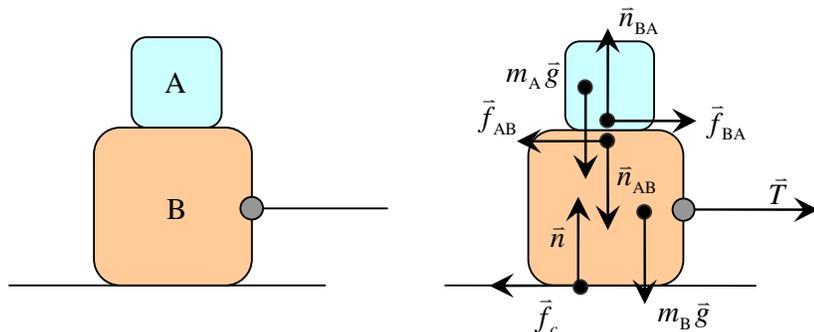
Puisque la **force normale** est difficile à étudier, car elle est **non-constante** pendant la durée de **l'impact** et qu'elle est habituellement difficile à mesurer, la 2<sup>e</sup> loi de Newton ( $\vec{F} = m\vec{a}$ ) semble être un chemin difficile à prendre pour résoudre un tel problème.

## Force interne et force externe

Une **force interne** est une force appliquée sur un objet d'un système qui est **jumelée** à une autre force appliquée sur un autre objet pour former une **paire action-réaction**. Des forces internes ne propulsent pas le système, car la somme des forces internes d'un système est toujours égale à zéro par la 3<sup>ème</sup> loi de Newton ( $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$ ).

Une **force externe** est une force appliquée sur un objet d'un système dont la **source de la force ne fait pas partie du système**. Il n'y a donc pas d'association de paire action-réaction avec ces forces. Ce sont les forces externes qui sont responsable de la propulsion du système par la 2<sup>e</sup> loi de Newton ( $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m_{\text{sys}} \vec{a}$ ).

Exemple : Le système de bloc A et B frotte contre le sol et est tiré par une corde.



Forces internes de somme nulle :

$$\vec{f}_{AB} + \vec{f}_{BA} + \vec{n}_{AB} + \vec{n}_{BA} = 0$$

Forces externes de somme nulle :

$$m_A \vec{g} + m_B \vec{g} + \vec{n} = 0$$

Forces externes résiduelles :

$$\vec{f}_c + \vec{T} = (m_A + m_B) \vec{a}$$

(supposant que les blocs A et B restent collés)

## La conservation de la quantité de mouvement

Lorsqu'un système de masses est parfaitement isolé de toutes formes de force externe ou que la somme des forces externes est égale à zéro en tout temps, il y a conservation de la quantité de mouvement  $\vec{p}$  dans le temps pour l'ensemble du système :

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = 0 \Leftrightarrow \sum \vec{p} = \text{constante}$$

$$\Rightarrow \sum \vec{p}_f = \sum \vec{p}_i$$



<http://fr.wikipedia.org/wiki/Billard>

Une casse au billard est un bon exemple de conservation de la quantité de mouvement, car il n'y a que des forces normales de contact en jeu (forces internes) si l'on néglige le frottement de contact durant la collision (force externe).

où  $\sum \vec{p}_i$  : Somme de la quantité de mouvement avant la collision (kg · m/s)

$\sum \vec{p}_f$  : Somme de la quantité de mouvement après la collision (kg · m/s)

### Preuve :

Considérons un système à deux corps A et B. Appliquons la 2<sup>e</sup> loi de Newton dans la condition où la somme des forces externes est égale à zéro afin de démontrer la conservation de la quantité de mouvement dans une telle situation :

$$\sum \vec{F}_A = \frac{d\vec{p}_A}{dt} \quad \text{et} \quad \sum \vec{F}_B = \frac{d\vec{p}_B}{dt} \quad (2^{\text{e}} \text{ loi de Newton sur A et B})$$

$$\Rightarrow \sum \vec{F}_A + \sum \vec{F}_B = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} \quad (\text{Créer le système en add. nos deux éq.})$$

$$\Rightarrow (\vec{F}_{A\text{ext}} + \vec{F}_{BA}) + (\vec{F}_{B\text{ext}} + \vec{F}_{AB}) = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} \quad (\text{Remplacer } \sum \vec{F} = \vec{F}_{\text{ext}} + \vec{F}_{\text{int}})$$

$$\Rightarrow \vec{F}_{BA} + \vec{F}_{AB} = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} \quad (\text{Supposer } \vec{F}_{A\text{ext}} = 0 \text{ et } \vec{F}_{B\text{ext}} = 0)$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d\vec{p}_A}{dt} + \frac{d\vec{p}_B}{dt} \quad (3^{\text{ième}} \text{ loi Newton : } \vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA})$$

$$\Rightarrow d\vec{p}_A + d\vec{p}_B = 0 \quad (\text{Indépendante du temps, simplifier } dt)$$

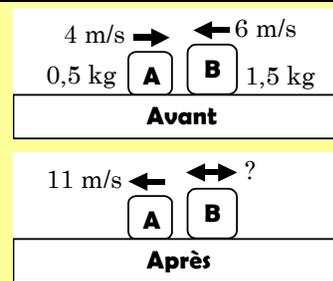
$$\Rightarrow \Delta\vec{p}_A + \Delta\vec{p}_B = 0 \quad (\text{Différentielle relaxée, } d \rightarrow \Delta)$$

$$\Rightarrow (\vec{p}_{Bf} - \vec{p}_{Bi}) + (\vec{p}_{Af} - \vec{p}_{Ai}) = 0 \quad (\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i)$$

$$\Rightarrow \vec{p}_{Af} + \vec{p}_{Bf} = \vec{p}_{Ai} + \vec{p}_{Bi} \quad (\text{Séparer terme initial et final})$$

$$\Rightarrow \sum_{A,B} \vec{p}_f = \sum_{A,B} \vec{p}_i \quad \blacksquare \quad (\text{Remplacer par une sommation})$$

**Situation 4 : Deux blocs entrent en collision.** Les blocs **A** (0,5 kg) et **B** (1,5 kg) entrent en collision. Immédiatement avant la collision, A voyage vers la droite à 4 m/s et B voyage vers la gauche à 6 m/s. Immédiatement après la collision, le bloc **A** voyage vers la gauche à 11 m/s. On désire déterminer la vitesse du bloc **B** après la collision ainsi que la quantité d'énergie cinétique perdue lors de la collision.



Voici les informations de notre situation : (axe  $x$  positif vers la droite)

Vitesse initiale :  $v_{xAi} = 4 \text{ m/s}$   $v_{xBi} = -6 \text{ m/s}$

Vitesse finale :  $v_{xAf} = -11 \text{ m/s}$   $v_{xBf} = ?$

Appliquons la conservation de la quantité de mouvement au système :

$$\begin{aligned} \sum \vec{p}_f &= \sum \vec{p}_i && \Rightarrow \sum p_{xf} = \sum p_{xi} && \text{(Selon l'axe } x) \\ &&& \Rightarrow p_{xAf} + p_{xBf} = p_{xAi} + p_{xBi} && \text{(Développer éq.)} \\ &&& \Rightarrow m_A v_{xAf} + m_B v_{xBf} = m_A v_{xAi} + m_B v_{xBi} && \text{(} p_x = mv_x \text{)} \\ &&& \Rightarrow (0,5)(-11) + (1,5)v_{xBf} = (0,5)(4) + (1,5)(-6) && \text{(Remplacer num.)} \\ &&& \Rightarrow -5,5 + 1,5v_{xBf} = 2 - 9 && \text{(Calcul)} \\ &&& \Rightarrow 1,5v_{xBf} = -1,5 && \text{(Isoler } v_{xBf} \text{)} \\ &&& \Rightarrow \boxed{v_{xBf} = -1 \text{ m/s}} && \text{(Évaluer } v_{xBf} \text{)} \end{aligned}$$

Évaluons l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} K_i &= K_{Ai} + K_{Bi} && \Rightarrow K_i = \frac{1}{2} m_A v_{Ai}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{Bi}^2 \\ &&& \Rightarrow K_i = \frac{1}{2} (0,5)(4)^2 + \frac{1}{2} (1,5)(6)^2 && \Rightarrow \boxed{K_i = 31 \text{ J}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_f &= K_{Af} + K_{Bf} && \Rightarrow K_f = \frac{1}{2} m_A v_{Af}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{Bf}^2 \\ &&& \Rightarrow K_f = \frac{1}{2} (0,5)(11)^2 + \frac{1}{2} (1,5)(1)^2 && \Rightarrow \boxed{K_f = 31 \text{ J}} \end{aligned}$$

Évaluons la variation de l'énergie cinétique :

$$\Delta K = K_f - K_i \quad \Rightarrow \quad \Delta K = (31) - (31) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta K = 0 \text{ J}}$$

Nous avons ici une **collision élastique**.

## Collision élastiques, inélastiques et parfaitement inélastiques

Puisque la conservation de la quantité de mouvement est toujours applicable dans tous les problèmes de collision, nous pouvons distinguer deux grandes familles de collision :

Collision	Quantité de mouvement conservée ( $\vec{p}_f = \vec{p}_i$ )	Énergie cinétique conservée ( $K_f = K_i$ )	Objets restent collés après la collision
Élastique	Oui	Oui	Non
Inélastique	Oui	Non	Possiblement
Parfaitement inélastique (sous catégorie)	Oui	Non	Oui

N.B. Lors d'une **collision inélastique**, l'énergie cinétique initiale n'est pas perdue mais prend une forme autre qu'en mouvement (ex : chaleur, déformation permanente d'un objet, bruit, émission de lumière).

**Situation 5 : Une interaction explosive.** Une carabine **C** à injection de 4 kg initialement immobile expulse un dard **D** tranquilisant de 20 g avec une vitesse horizontale de 1000 m/s. On désire déterminer la vitesse de recul de la carabine et comparer les énergies cinétiques du dard et de la carabine immédiatement après le tir.

Voici les informations de la situation : ( $x$  positif vers la droite)

Notation	Vitesse initiale	Vitesse finale
<ul style="list-style-type: none"> <li>• C : Carabine</li> <li>• D : Dart</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>v_{xCi} = 0</math></li> <li>• <math>v_{xDi} = 0</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>v_{xCf} = ?</math></li> <li>• <math>v_{xDf} = 1000\text{m/s}</math></li> </ul>

Appliquons la conservation de la quantité de mouvement :

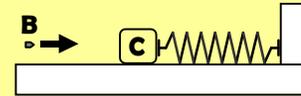
$$\begin{aligned} \sum p_{xf} &= \sum p_{xi} &\Rightarrow & p_{xCf} + p_{xDf} = p_{xCi} + p_{xDi} && \text{(Développer éq.)} \\ & &\Rightarrow & m_C v_{xCf} + m_D v_{xDf} = m_C v_{xCi} + m_D v_{xDi} && (p_x = mv_x) \\ & &\Rightarrow & (4)v_{xCf} + (0,02)(1000) = (4)(0) + (0,02)(0) && \text{(Remplacer num.)} \\ & &\Rightarrow & \boxed{v_{xCf} = -5 \text{ m/s}} && \text{(Isoler } \vec{v}_{Cf} \text{)} \end{aligned}$$

Énergie cinétique :

$$\begin{aligned} K_{Cf} &= \frac{1}{2} m_C v_{Cf}^2 &\Rightarrow & K_{Cf} = \frac{1}{2} (4)(5)^2 &\Rightarrow & \boxed{K_{Cf} = 50 \text{ J}} \\ K_{Df} &= \frac{1}{2} m_D v_{Df}^2 &\Rightarrow & K_{Df} = \frac{1}{2} (0,02)(1000)^2 &\Rightarrow & \boxed{K_{Df} = 10000 \text{ J}} \end{aligned}$$

Nous avons **200 fois** plus d'énergie cinétique dans le dard que dans la carabine.

**Situation 6 : Une situation, deux principes de conservation.** Sur une surface horizontale sans frottement, un cube de bois **C** de 2 kg est placé contre un ressort horizontal dont la constante de rappel vaut 500 N/m. Une balle de fusil **B** de 20 g voyageant horizontalement à 800 m/s pénètre dans le bloc et s'y incruste. On désire déterminer la compression maximale du ressort.



Avec la conservation de la quantité de mouvement selon l'axe  $x$ , nous pouvons déterminer la vitesse du groupe cube + balle après l'impact en utilisant la collision parfaitement inélastique :

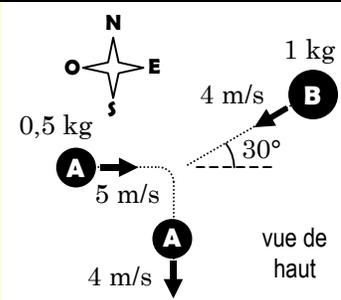
$$\begin{aligned} \sum p_{xf} &= \sum p_{xi} &\Rightarrow & p_{xCf} + p_{xBf} = p_{xCi} + p_{xBi} && \text{(Développer éq.)} \\ & &\Rightarrow & m_C v_{xCf} + m_B v_{xBf} = m_C v_{xCi} + m_B v_{xBi} && (p_x = mv_x) \\ & &\Rightarrow & (m_C + m_B) v_{xf} = m_C v_{xCi} + m_B v_{xBi} && (v_{xCf} = v_{xBf} = v_{xf}) \\ & &\Rightarrow & ((2) + (0,02)) v_{xf} = (2)(0) + (0,02)(800) && \text{(Remplacer num.)} \\ & &\Rightarrow & \boxed{v_{xf} = 7,92 \text{ m/s}} && \text{(Isoler et évaluer } v_{xf} \text{)} \end{aligned}$$

Avec la conservation de l'énergie, nous pouvons évaluer la compression maximale du ressort : ( $W_{nc} = 0$ )

$$\begin{aligned} E_f &= E_i + W_{nc} &\Rightarrow & K_f + U_f = K_i + U_i + (0) && \text{(Développer éq.)} \\ & &\Rightarrow & (0) + \frac{1}{2} k e_f^2 = \frac{1}{2} (m_B + m_C) v_i^2 + (0) && (U_f = U_{rf}, K_i = K_{iB} + K_{iC}) \\ & &\Rightarrow & e_f^2 = \frac{(m_B + m_C) v_i^2}{k} && \text{(Isoler } e_f^2 \text{)} \\ & &\Rightarrow & e_f^2 = \frac{((0,02) + (2))(7,92)^2}{(500)} && \text{(Remplacer, } v_i = v_{xf} \text{)} \\ & &\Rightarrow & \boxed{e_f = \pm 0,503 \text{ m}} && \text{(Évaluer } e_f \text{)} \end{aligned}$$

La compression maximale du ressort est de **0,503 m**.

**Situation 7 : Une collision en deux dimensions.** Sur une table horizontale sans frottement, deux rondelles rebondissent l'une sur l'autre. Avant la collision, la rondelle **A**, dont la masse est égale à 500 g, se déplace à 5 m/s vers l'est et la rondelle **B**, dont la masse est égale à 1 kg, se déplace à 4 m/s à 30° au sud de l'ouest. Après la collision, la rondelle **A** se déplace à 4 m/s vers le sud. On désire (a) déterminer la vitesse de la rondelle **B** après la collision ainsi que (b) la quantité d'énergie cinétique perdue lors de la collision.



Vitesse en $x$ :	Vitesse en $y$ :	Résolution graphique :
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>v_{xAi} = 5 \text{ m/s}</math></li> <li>• <math>v_{xBi} = -4 \cos(30^\circ) \text{ m/s}</math></li> <li>• <math>v_{xAf} = 0 \text{ m/s}</math></li> <li>• <math>v_{xBf} = ?</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>v_{yAi} = 0 \text{ m/s}</math></li> <li>• <math>v_{yBi} = -4 \sin(30^\circ) \text{ m/s}</math></li> <li>• <math>v_{yAf} = -4 \text{ m/s}</math></li> <li>• <math>v_{yBf} = ?</math></li> </ul>	

Appliquons la conservation de la quantité de mouvement selon l'axe  $x$  :

$$\begin{aligned} \sum p_{xf} &= \sum p_{xi} &\Rightarrow & p_{xAf} + p_{xBf} = p_{xAi} + p_{xBi} && \text{(Développer } \sum p_x \text{)} \\ & &\Rightarrow & m_A v_{xAf} + m_B v_{xBf} = m_A v_{xAi} + m_B v_{xBi} && \text{(Remplacer } p_x = mv_x \text{)} \\ & &\Rightarrow & (0,5)(0) + (1)v_{xBf} = (0,5)(5) + (1)(-4 \cos(30^\circ)) && \text{(Remplacer val. num.)} \\ & &\Rightarrow & \boxed{v_{xBf} = -0,964 \text{ m/s}} && \text{(Évaluer } v_{xBf} \text{)} \end{aligned}$$

Appliquons la conservation de la quantité de mouvement selon l'axe  $y$  :

$$\begin{aligned} \sum p_{yf} &= \sum p_{yi} &\Rightarrow & p_{yAf} + p_{yBf} = p_{yAi} + p_{yBi} && \text{(Développer } \sum p_y \text{)} \\ & &\Rightarrow & m_A v_{yAf} + m_B v_{yBf} = m_A v_{yAi} + m_B v_{yBi} && \text{(Remplacer } p_y = mv_y \text{)} \\ & &\Rightarrow & (0,5)(-4) + (1)v_{yBf} = (0,5)(0) + (1)(-4 \sin(30^\circ)) && \text{(Remplacer val. num.)} \\ & &\Rightarrow & \boxed{v_{yBf} = 0 \text{ m/s}} && \text{(Évaluer } v_{yBf} \text{)} \end{aligned}$$

Évaluons le module de la vitesse finale de la rondelle **B** :

$$\begin{aligned} v_{Bf} &= \sqrt{v_{xBf}^2 + v_{yBf}^2} &\Rightarrow & v_{Bf} = \sqrt{(-0,964)^2 + (0)^2} && \text{(Remplacer val. num.)} \\ & &\Rightarrow & \boxed{v_{Bf} = 0,964 \text{ m/s}} && \text{(Évaluer } v_{Bf} \text{)} \end{aligned}$$

Évaluons l'orientation de la vitesse finale de la rondelle **B** par rapport à l'axe  $x$  positif (l'est) :

$$\begin{aligned} \tan(\theta) &= \frac{v_{yB f}}{v_{xB f}} & \Rightarrow & \theta = \arctan\left(\frac{v_{yB f}}{v_{xB f}}\right) \\ & & \Rightarrow & \theta = \arctan\left(\frac{0}{(-0,964)}\right) \\ & & \Rightarrow & \theta = \{ 0^\circ, 180^\circ \} \\ & & \Rightarrow & \boxed{\theta = 180^\circ} \quad (\text{car vitesse selon l'axe } y \text{ négatif}) \end{aligned}$$

(a) Notre rondelle **B** se déplace vers l'ouest à 0,964 m/s en raison de  $\theta = 180^\circ$  par rapport à l'est.

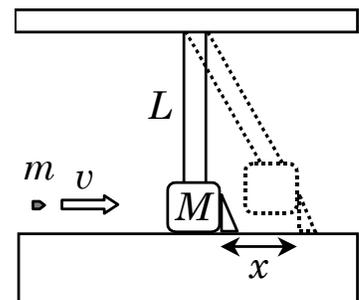
Évaluons nos énergies cinétiques :

- $K_i = \frac{1}{2}m_A v_{A i}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B i}^2 = \frac{1}{2}(0,5)(5)^2 + \frac{1}{2}(1)(4)^2 = 6,25 + 8 \Rightarrow \boxed{K_i = 14,25 \text{ J}}$
- $K_f = \frac{1}{2}m_A v_{A f}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{B f}^2 = \frac{1}{2}(0,5)(4)^2 + \frac{1}{2}(1)(0,964)^2 = 4 + 0,48 \Rightarrow \boxed{K_f = 4,48 \text{ J}}$

(b) Nous avons perdu  $14,25 - 4,48 = 9,77 \text{ J}$  ce qui représente  $9,77/14,25 = 0,686 = 68,6 \%$  de l'énergie cinétique initiale.

## Exercices

**3.10.11** *Un pendule balistique.* Un pendule balistique représenté sur le schéma ci-contre sert à déterminer expérimentalement le module de la vitesse  $v$  d'une balle de fusil. La balle de masse  $m$  pénètre et s'incruste dans un bloc de bois de masse  $M$  accroché à deux cordes de longueur  $L$  (on utilise deux cordes pour éviter que le bloc ne tourne sur lui-même après l'impact). Une petite cale de masse négligeable est placée en arrière du bloc et se déplace d'une distance  $x$  lorsque le pendule atteint sa hauteur maximale. Si  $x = 20 \text{ cm}$ ,  $L = 80 \text{ cm}$ ,  $M = 5 \text{ kg}$  et  $m = 0,01 \text{ kg}$ , déterminez  $v$ .



**3.10.12** *Deux rondelles rebondissent l'une sur l'autre, en deux dimensions.* Deux rondelles entrent en collision sur une surface horizontale. Immédiatement avant la collision, la rondelle **A**, dont la masse est de 500 g, se déplace à 3 m/s vers l'est et la rondelle **B**, dont la masse est de 800 g, se déplace à 4 m/s vers le sud. Immédiatement après la collision, la rondelle **A** se déplace à 2 m/s vers le sud. Déterminez (a) le module et l'orientation de la vitesse de la rondelle **B** immédiatement après la collision et (b) le pourcentage d'énergie cinétique perdue lors de la collision.

## Solutions

### 3.10.11 Un pendule balistique.

Déterminons l'angle d'élévation du bloc :

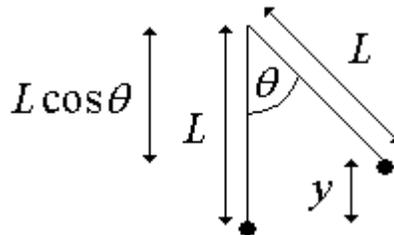
$$\sin(\theta) = \frac{x}{L} = \frac{(0,20)}{(0,80)} \Rightarrow \boxed{\theta = 14,48^\circ}$$

Déterminons la hauteur d'élévation du bloc :

$$y = L - L \cos \theta = L(1 - \cos \theta)$$

$$\Rightarrow y = (0,80)(1 - \cos(14,48^\circ))$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 0,025 \text{ m}}$$



Déterminons la vitesse du système balle + bloc après l'impact par conservation de l'énergie : (prenons  $y = 0$  au point d'impact entre la balle et le bloc)

$$\begin{aligned} E_f &= E_i + W_{nc} &\Rightarrow K_f + U_{gf} &= K_i + U_{gi} + W_{nc} \\ &&\Rightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 + mgy_f &= \frac{1}{2}mv_i^2 + mgy_i + W_{nc} \\ &&\Rightarrow mgy_f &= \frac{1}{2}mv_i^2 \quad (y_i = 0, v_f = 0, W_{nc} = 0) \\ &&\Rightarrow v_i &= \sqrt{2gy_f} = \sqrt{2(9,8)(0,025)} \\ &&\Rightarrow v_i &= \pm 0,7 \text{ m/s} \\ &&\Rightarrow \boxed{v_i = 0,7 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

Utilisons la vitesse après l'impact pour évaluer la vitesse initiale de la balle avant l'impact par conservation de la quantité de mouvement : (prenons l'axe  $x$  positif vers la droite)

$$\begin{aligned} \sum \vec{p}_f &= \sum \vec{p}_i &\Rightarrow \vec{p}_{balle f} + \vec{p}_{bloc f} &= \vec{p}_{balle i} + \vec{p}_{bloc i} \\ &&\Rightarrow m_{balle}v_{balle f} + m_{bloc}v_{bloc f} &= m_{balle}v_{balle i} + m_{bloc}v_{bloc i} \quad (\text{selon l'axe } x) \\ &&\Rightarrow (m_{balle} + m_{bloc})v_f &= m_{balle}v_{balle i} + m_{bloc}v_{bloc i} \quad (\text{collision p. iné.}) \\ &&\Rightarrow (m_{balle} + m_{bloc})v_f &= m_{balle}v_{balle i} \quad (v_{bloc i} = 0) \\ &&\Rightarrow v_{balle i} &= \frac{(m_{balle} + m_{bloc})v_f}{m_{balle}} = \frac{(m + M)}{m}v_f \\ &&\Rightarrow v_{balle i} &= \frac{((0,01) + (5))(0,7)}{(0,01)} \\ &&\Rightarrow \boxed{v_{balle i} = 350,7 \text{ m/s}} \end{aligned}$$

# Chapitre 3.11a – Les collisions élastiques frontales

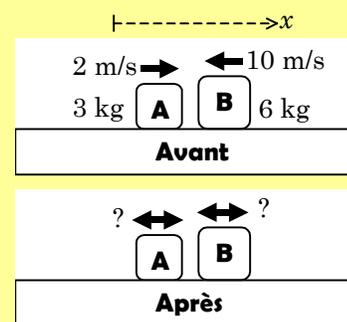
## Les lois de conservation dans une collision élastique en une dimension

Chaque loi physique nous apporte une équation qui peut être utilisée pour résoudre un problème. Dans le cas d'une collision à une dimension, le principe de conservation de la quantité de mouvement nous apporte une équation ce qui nous permet de résoudre un problème à un inconnu. Si la collision est élastique, nous pouvons utiliser la conservation de l'énergie cinétique et résoudre un problème à deux inconnus.



Le pendule de Newton est un bon exemple de collision élastique frontale.

**Situation 1 : Une collision élastique frontale.** Un bloc de 3 kg qui se déplace à 2 m/s vers la droite subit une collision élastique frontale avec un bloc de 6 kg qui se déplace de 10 m/s vers la gauche. On désire déterminer les vitesses des blocs immédiatement après la collision



Développons l'équation de la conservation de la quantité de mouvement selon l'axe  $x$  :

$$\begin{aligned} \sum p_{xf} &= \sum p_{xi} &\Rightarrow & p_{xAf} + p_{xBf} = p_{xAi} + p_{xBi} && \text{(Développer éq.)} \\ & &\Rightarrow & m_A v_{xAf} + m_B v_{xBf} = m_A v_{xAi} + m_B v_{xBi} && (p_x = mv_x) \\ & &\Rightarrow & (3)v_{xAf} + (6)v_{xBf} = (3)(2) + (6)(-10) && \text{(Remplacer num.)} \\ & &\Rightarrow & \boxed{3v_{xAf} + 6v_{xBf} = -54} && \text{(Simplifier) (1)} \end{aligned}$$

Développons l'équation de la conservation de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} K_f &= K_i &\Rightarrow & K_{Af} + K_{Bf} = K_{Ai} + K_{Bi} && \text{(Développer éq.)} \\ & &\Rightarrow & \frac{1}{2}m_A v_{xAf}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{xBf}^2 = \frac{1}{2}m_A v_{xAi}^2 + \frac{1}{2}m_B v_{xBi}^2 && (K = \frac{1}{2}mv^2) \\ & &\Rightarrow & (3)v_{xAf}^2 + (6)v_{xBf}^2 = (3)(2)^2 + (6)(10)^2 && \text{(Remplacer num.)} \\ & &\Rightarrow & \boxed{3v_{xAf}^2 + 6v_{xBf}^2 = 612} && \text{(Calcul) (2)} \end{aligned}$$

Nous avons deux équations et deux inconnus :

$$3v_{xAf} + 6v_{xBf} = -54 \quad \text{(1)}$$

$$3v_{xAf}^2 + 6v_{xBf}^2 = 612 \quad \text{(2)}$$

À partir de (1), isolons  $v_{xAf}$  et développons son expression au carré :

$$\begin{aligned}
 3v_{xAf} + 6v_{xBf} &= -54 \Rightarrow 3v_{xAf} = -54 - 6v_{xBf} && \text{(Isoler } v_{xAf} \text{)} \\
 &\Rightarrow v_{xAf} = -(18 + 2v_{xBf}) && \text{(Diviser par 3)} \\
 &\Rightarrow v_{xAf}^2 = (18 + 2v_{xBf})^2 && \text{(Mettre au carré)} \\
 &\Rightarrow \boxed{v_{xAf}^2 = 324 + 72v_{xBf} + 4v_{xBf}^2} && \text{(3) (Développer le carré)}
 \end{aligned}$$

On remplace (3) dans (2) :

$$\begin{aligned}
 3v_{xAf}^2 + 6v_{xBf}^2 &= 612 \Rightarrow 3(324 + 72v_{xBf} + 4v_{xBf}^2) + 6v_{xBf}^2 = 612 && \text{(Remplacer } v_{xAf}^2 \text{)} \\
 &\Rightarrow 324 + 72v_{xBf} + 4v_{xBf}^2 + 2v_{xBf}^2 = 204 && \text{(Diviser par 3)} \\
 &\Rightarrow 6v_{xBf}^2 + 72v_{xBf} + 120 = 0 && \text{(Éq. égale à zéro)}
 \end{aligned}$$

Nous avons un polynôme du 2<sup>ième</sup> degré à résoudre :

$$\begin{aligned}
 v_{xBf} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow v_{xBf} = \frac{-(72) \pm \sqrt{(72)^2 - 4(6)(120)}}{2(6)} \\
 &\Rightarrow v_{xBf} = \frac{-72 \pm 48}{12} \\
 &\Rightarrow v_{xBf} = \{ -10, -2 \} && (v_{xBf} = -10, \text{ effet fantôme)} \\
 &\Rightarrow \boxed{v_{xBf} = -2 \text{ m/s}} && \text{(Collision entre A et B)}
 \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons après la collision avec l'équation (1) :

$$\begin{aligned}
 3v_{xAf} + 6v_{xBf} &= -54 \Rightarrow v_{xAf} = \frac{-54 - 6v_{xBf}}{3} && \text{(Isoler } v_{xAf} \text{)} \\
 &\Rightarrow v_{xAf} = \frac{-54 - 6(-2)}{3} && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\
 &\Rightarrow \boxed{v_{xAf} = -14 \text{ m/s}} && \text{(Évaluer } v_{xAf} \text{)}
 \end{aligned}$$

Nous avons donc évaluer notre deux vitesses finales à l'aide de nos deux lois de conservation :

$$\boxed{v_{xAf} = -14 \text{ m/s}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{v}_{xBf} = -2 \text{ m/s}}$$

# La collision élastique à une dimension sur un objet immobile

Considérons une particule **A** se déplaçant initialement à une vitesse  $v_{xAi}$  selon l'axe  $x$  vers une particule **B** initialement immobile. Si l'on considère une **collision élastique** entre **A** et **B**, les vitesses finales de nos deux particules après la collision seront déterminées par les équations suivantes :

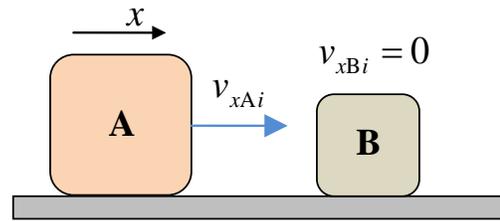


Illustration des vitesses des deux particules avant le contact.

$$v_{xAf} = \left( \frac{1 - m_{B/A}}{1 + m_{B/A}} \right) v_{xAi} \quad \text{et} \quad v_{xBf} = \frac{2}{1 + m_{B/A}} v_{xAi}$$

tel que  $m_{B/A} = m_B / m_A$  et  $v_{xBi} = 0$

- où  $v_{xAf}$  : Vitesse finale de la particule **A** selon l'axe  $x$  (m/s)
- $v_{xBf}$  : Vitesse finale de la particule **B** selon l'axe  $x$  (m/s)
- $v_{xAi}$  : Vitesse initiale de la particule **A** selon l'axe  $x$  (m/s)
- $m_A$  : Masse de la particule **A** (kg)
- $m_B$  : Masse de la particule **B** (kg)

Situation 1	Données	Conclusion	Exemple
$m_A = m_B$	$m_{B/A} = 1$ $v_{xAf} = 0$ $v_{xBf} = v_{xAi}$	Le bloc A s'immobilise et le bloc B avance à la vitesse initiale qu'avait le bloc A.	 Une collision frontale au billard entre deux boules.
Situation 2	Données	Conclusion	Exemple
$m_A \gg m_B$	$m_{B/A} = 0$ $v_{xAf} = v_{xAi}$ $v_{xBf} = 2v_{xAi}$	Le bloc A continue à vitesse constante et le bloc B se déplace avec une vitesse deux fois plus grande que celle du bloc A.	 Frapper un clou avec un marteau.
Situation 3	Données	Conclusion	Exemple
$m_A \ll m_B$	$m_{B/A} = \infty$ $v_{xAf} = -v_{xAi}$ $v_{xBf} = 0$	Le bloc A rebondit avec la même vitesse, mais dans le sens opposé et le bloc B demeure immobile.	 Frapper une enclume avec un marteau.

Preuve :

Considérons deux particules **A** et **B** qui entrent en collision élastique lorsque ceux-ci se déplacent selon l'axe  $x$ . Développons l'équation de la conservation de la quantité de mouvement selon l'axe  $x$  :

$$\begin{aligned} \sum p_{xf} &= \sum p_{xi} &\Rightarrow p_{xAf} + p_{xBf} &= p_{xAi} + p_{xBi} && \text{(Développer éq.)} \\ &&\Rightarrow m_A v_{xAf} + m_B v_{xBf} &= m_A v_{xAi} + m_B v_{xBi} && (p_x = mv_x) \\ &&\Rightarrow m_A v_{xAf} + m_B v_{xBf} &= m_A v_{xAi} && (v_{xBi} = 0) \\ &&\Rightarrow v_{xAf} + \frac{m_B}{m_A} v_{xBf} &= v_{xAi} && \text{(Diviser par } m_A) \\ &&\Rightarrow v_{xAf} + m_{B/A} v_{xBf} &= v_{xAi} && (m_{B/A} = m_B / m_A) \\ &&\Rightarrow \boxed{v_{xAf} = v_{xAi} - m_{B/A} v_{xBf}} && \text{(1)} && \text{(Isoler } v_{xAf}) \end{aligned}$$

Développons l'équation de la conservation de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} K_f &= K_i &\Rightarrow K_{Af} + K_{Bf} &= K_{Ai} + K_{Bi} && \text{(Développer éq.)} \\ &&\Rightarrow \frac{1}{2} m_A v_{xAf}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{xBf}^2 &= \frac{1}{2} m_A v_{xAi}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{xBi}^2 && (K = \frac{1}{2} mv^2) \\ &&\Rightarrow \frac{1}{2} m_A v_{xAf}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{xBf}^2 &= \frac{1}{2} m_A v_{xAi}^2 && (v_{xBi} = 0) \\ &&\Rightarrow m_A v_{xAf}^2 + m_B v_{xBf}^2 &= m_A v_{xAi}^2 && \text{(Multiplier par 2)} \\ &&\Rightarrow v_{xAf}^2 + \frac{m_B}{m_A} v_{xBf}^2 &= v_{xAi}^2 && \text{(Diviser par } m_A) \\ &&\Rightarrow \boxed{v_{xAf}^2 + m_{B/A} v_{xBf}^2 = v_{xAi}^2} && \text{(2)} && (m_{B/A} = m_B / m_A) \end{aligned}$$

Remplaçons l'équation (1) dans l'équation (2) afin d'obtenir une expression pour  $v_{xBf}$  :

$$\begin{aligned} v_{xAf}^2 + m_{B/A} v_{xBf}^2 &= v_{xAi}^2 && \text{(De (2))} \\ \Rightarrow (v_{xAi} - m_{B/A} v_{xBf})^2 + m_{B/A} v_{xBf}^2 &= v_{xAi}^2 && \text{(Remplacer (1))} \\ \Rightarrow (v_{xAi}^2 - 2m_{B/A} v_{xAi} v_{xBf} + m_{B/A}^2 v_{xBf}^2) + m_{B/A} v_{xBf}^2 &= v_{xAi}^2 && \text{(Développer le carré)} \\ \Rightarrow -2m_{B/A} v_{xAi} v_{xBf} + m_{B/A}^2 v_{xBf}^2 + m_{B/A} v_{xBf}^2 &= 0 && \text{(Simplifier } v_{xAi}^2) \\ \Rightarrow -2v_{xAi} + m_{B/A} v_{xBf} + v_{xBf} &= 0 && \text{(Diviser par } m_{B/A} v_{xBf}) \end{aligned}$$

Continuons la simplification afin d'isoler  $v_{xBf}$  :

$$-2v_{xAi} + m_{B/A}v_{xBf} + v_{xBf} = 0 \quad \text{(Ligne précédente)}$$

$$\Rightarrow m_{B/A}v_{xBf} + v_{xBf} = 2v_{xAi} \quad \text{(Isoler } 2v_{xAi} \text{)}$$

$$\Rightarrow v_{xBf}(1 + m_{B/A}) = 2v_{xAi} \quad \text{(Factoriser } v_{xBf} \text{)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{xBf} = \frac{2}{1 + m_{B/A}}v_{xAi}} \quad \blacksquare \text{ (1) (3)} \quad \text{(Isoler } v_{xBf} \text{)}$$

On remplace (3) dans (1) afin d'obtenir une expression pour  $v_{xAf}$  :

$$v_{xAi} = v_{xAf} + m_{B/A}v_{xBf} \quad \text{(De (1))}$$

$$\Rightarrow v_{xAi} = v_{xAf} + m_{B/A}\left(\frac{2}{1 + m_{B/A}}v_{xAi}\right) \quad \text{(Remplacer (3))}$$

$$\Rightarrow v_{xAi} - \frac{2m_{B/A}}{1 + m_{B/A}}v_{xAi} = v_{xAf} \quad \text{(Isoler } v_{xAf} \text{)}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{2m_{B/A}}{1 + m_{B/A}}\right)v_{xAi} = v_{xAf} \quad \text{(Factoriser } v_{xAi} \text{)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1 + m_{B/A} - 2m_{B/A}}{1 + m_{B/A}}\right)v_{xAi} = v_{xAf} \quad \text{(Dénom. commun)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{xAf} = \left(\frac{1 - m_{B/A}}{1 + m_{B/A}}\right)v_{xAi}} \quad \blacksquare \text{ (2)} \quad \text{(Simplifier termes } m_{B/A} \text{)}$$

## Exercice

**3.11.1** *Une collision élastique en une dimension.* Un bloc de 3 kg qui se déplace à 4 m/s vers la gauche subit une collision élastique frontale avec un bloc de 5 kg immobile. Calculez les vitesses des blocs immédiatement après la collision (module et orientation).

## Solution

### 3.11.1 Une collision élastique en une dimension.

Information initiale : (l'axe  $x$  est positif vers la gauche)

$$\vec{v}_{A i} = -4 \vec{i} \text{ m/s}$$

$$K_{A i} = \frac{1}{2} m_A v_{A i}^2 = \frac{1}{2} (3)(4)^2 = 24 \text{ J} \quad \vec{p}_{A i} = m_A \vec{v}_{A i} = (3)(-4 \vec{i}) = -12 \vec{i} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\vec{v}_{B i} = 0 \text{ m/s}$$

$$K_{B i} = 0 \text{ J} \quad \vec{p}_{B i} = 0 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Avec nos deux lois de la conservation :

$$\begin{aligned} \sum \vec{p}_f &= \sum \vec{p}_i &\Rightarrow \vec{p}_{A f} + \vec{p}_{B f} &= \vec{p}_{A i} + \vec{p}_{B i} \\ &&\Rightarrow m_A \vec{v}_{A f} + m_B \vec{v}_{B f} &= (-12 \vec{i}) + (0) \\ &&\Rightarrow (3)v_{A f} \vec{i} + (5)v_{B f} \vec{i} &= -12 \vec{i} && \text{(Collision frontale)} \\ &&\Rightarrow \boxed{3v_{A f} + 5v_{B f} = -12} && \text{(1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K_f &= K_i &\Rightarrow K_{A f} + K_{B f} &= K_{A i} + K_{B i} \\ &&\Rightarrow \frac{1}{2} m_A v_{A f}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B f}^2 &= (24) + (0) \\ &&\Rightarrow \frac{1}{2} (3)v_{A f}^2 + \frac{1}{2} (5)v_{B f}^2 &= (24) + (0) \\ &&\Rightarrow \boxed{1,5v_{A f}^2 + 2,5v_{B f}^2 = 24} && \text{(2)} \end{aligned}$$

Remplaçons (1) dans (2) et isolons  $v_{A f}$  :

$$\begin{aligned} 3v_{A f} + 5v_{B f} = -12 &\Rightarrow v_{A f} = \frac{-12 - 5v_{B f}}{3} && \text{(Isoler } v_{A f} \text{)} \\ &\Rightarrow v_{A f} = -\frac{12 + 5v_{B f}}{3} && \text{(Factoriser le négatif)} \\ &\Rightarrow (v_{A f})^2 = \left( -\frac{12 + 5v_{B f}}{3} \right)^2 && \text{(Mettre au carré)} \\ &\Rightarrow v_{A f}^2 = \frac{144 + 120v_{B f} + 25v_{B f}^2}{9} && \text{(Développer le numérateur)} \end{aligned}$$

Remplaçons l'expression de  $v_{A_f}^2$  dans l'équation (2) :

$$\begin{aligned}1,5v_{A_f}^2 + 2,5v_{B_f}^2 = 24 &\Rightarrow 1,5\left(\frac{144 + 120v_{B_f} + 25v_{B_f}^2}{9}\right) + 2,5v_{B_f}^2 = 24 \\&\Rightarrow \frac{3}{18}(144 + 120v_{B_f} + 25v_{B_f}^2) + 2,5v_{B_f}^2 = 24 \\&\Rightarrow 3(144 + 120v_{B_f} + 25v_{B_f}^2) + 45v_{B_f}^2 = 432 \\&\Rightarrow 432 + 360v_{B_f} + 75v_{B_f}^2 + 45v_{B_f}^2 = 432 \\&\Rightarrow 360v_{B_f} + 120v_{B_f}^2 = 0 \\&\Rightarrow 3 + v_{B_f} = 0 \\&\Rightarrow v_{B_f} = -3 \text{ m/s} \\&\Rightarrow \boxed{\vec{v}_{B_f} = -3 \vec{i} \text{ m/s}}\end{aligned}$$

Évaluons la vitesse  $v_{A_f}$  avec l'équation (1) :

$$\begin{aligned}3v_{A_f} + 5v_{B_f} = -12 &\Rightarrow 3v_{A_f} + 5(-3) = -12 \\&\Rightarrow 3v_{A_f} = 3 \\&\Rightarrow v_{A_f} = 1 \text{ m/s} \\&\Rightarrow \boxed{\vec{v}_{A_f} = 1 \vec{i} \text{ m/s}}\end{aligned}$$



# Chapitre 3.11b – Les collisions élastiques

## Les trois équations de la collision élastique en deux dimensions

Lors d'une collision élastique en deux dimensions entre deux objets A et B, nous pouvons appliquer la conservation de la quantité de mouvement selon l'axe  $x$  et  $y$  et appliquer la conservation de l'énergie cinétique ce qui se résume aux équations suivantes :

Conservation de la quantité de mouvement selon l'axe  $x$  :

$$\sum p_{xf} = \sum p_{xi}$$

$$\Rightarrow p_{xAf} + p_{xBf} = p_{xAi} + p_{xBi}$$

$$\Rightarrow \boxed{m_A v_{xAf} + m_B v_{xBf} = m_A v_{xAi} + m_B v_{xBi}}$$

Conservation de la quantité de mouvement selon l'axe  $y$  :

$$\sum p_{yf} = \sum p_{yi}$$

$$\Rightarrow p_{yAf} + p_{yBf} = p_{yAi} + p_{yBi}$$

$$\Rightarrow \boxed{m_A v_{yAf} + m_B v_{yBf} = m_A v_{yAi} + m_B v_{yBi}}$$

Conservation de l'énergie cinétique :

$$K_f = K_i$$

$$\Rightarrow K_{Af} + K_{Bf} = K_{Ai} + K_{Bi}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_A v_{Af}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{Bf}^2 = \frac{1}{2} m_A v_{Ai}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{Bi}^2$$

$$\Rightarrow m_A v_{Af}^2 + m_B v_{Bf}^2 = m_A v_{Ai}^2 + m_B v_{Bi}^2$$

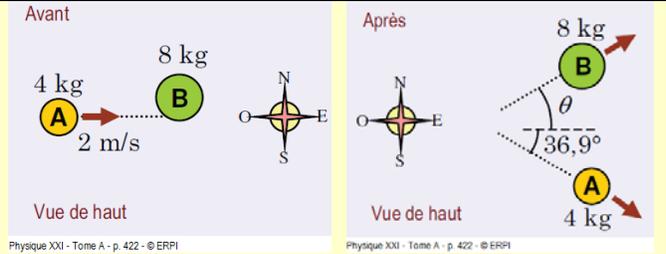
$$\Rightarrow \boxed{m_A (v_{xAf}^2 + v_{yAf}^2) + m_B (v_{xBf}^2 + v_{yBf}^2) = m_A (v_{xAi}^2 + v_{yAi}^2) + m_B (v_{xBi}^2 + v_{yBi}^2)}$$

Puisque ce type de problème dispose de **trois équations**, il peut être résolu si les **inconnus** se limitent à **trois**. Une information sur une **orientation  $\theta$  d'une vitesse** contribue à donner une **équation supplémentaire**.

Voici la liste des paramètres à déterminer lors d'une collision :

Objet	Masse	Vitesse initiale	Vitesse finale
A	$m_A$	$v_{xAi}$ et $v_{yAi}$	$v_{xAf}$ et $v_{yAf}$
B	$m_B$	$v_{xBi}$ et $v_{yBi}$	$v_{xBf}$ et $v_{yBf}$

**Situation 5 : Une collision élastique en deux dimensions.** Sur une surface horizontale sans frottement, deux rondelles de métal subissent une collision élastique. Avant la collision, la rondelle **A** (4 kg) se déplace à 2 m/s vers l'est, et la rondelle **B** (8 kg) est immobile.



Après la collision, la rondelle **A** se déplace à  $36,9^\circ$  au sud de l'est. On désire déterminer les modules des vitesses des rondelles après la collision ainsi que l'orientation de la vitesse de **B**.

Voici les informations disponibles après la lecture de l'énoncé :

Rondelle	Masse	Vitesse initiale	Vitesse finale
A	$m_A = 4 \text{ kg}$	$v_{xAi} = 2 \text{ m/s}$	$v_{xAf} = v_{Af} \cos(36,9^\circ)$
		$v_{yAi} = 0$	$v_{yAf} = -v_{Af} \sin(36,9^\circ)$
B	$m_B = 8 \text{ kg}$	$v_{xBi} = 0$	$v_{xBf}$
		$v_{yBi} = 0$	$v_{yBf}$

Appliquons la loi de la conservation de la quantité de mouvement selon l'axe  $x$  :

$$\begin{aligned} \sum p_{xf} &= \sum p_{xi} &\Rightarrow & m_A v_{xAf} + m_B v_{xBf} = m_A v_{xAi} + m_B v_{xBi} && \text{(Selon dév. précédent)} \\ & &\Rightarrow & (4)(v_{Af} \cos(36,9^\circ)) + (8)v_{xBf} = (4)(2) + (8)(0) && \text{(Remplacer val. num)} \\ & &\Rightarrow & \boxed{v_{xBf} = 1 - 0,4v_{Af}} && \text{(1) (Isoler } v_{xBf} \text{)} \end{aligned}$$

Appliquons la loi de la conservation de la quantité de mouvement selon l'axe  $y$  :

$$\begin{aligned} \sum p_{yf} &= \sum p_{yi} &\Rightarrow & m_A v_{yAf} + m_B v_{yBf} = m_A v_{yAi} + m_B v_{yBi} && \text{(Selon dév. précédent)} \\ & &\Rightarrow & (4)(-v_{Af} \sin(36,9^\circ)) + (8)v_{yBf} = (4)(0) + (8)(0) && \text{(Remplacer val. num)} \\ & &\Rightarrow & \boxed{v_{yBf} = 0,3v_{Af}} && \text{(2)} \end{aligned}$$

Appliquons la conservation de l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned} K_f &= K_i \\ \Rightarrow & m_A (v_{xAf}^2 + v_{yAf}^2) + m_B (v_{xBf}^2 + v_{yBf}^2) = m_A (v_{xAi}^2 + v_{yAi}^2) + m_B (v_{xBi}^2 + v_{yBi}^2) \text{ (Eq. précédente)} \\ \Rightarrow & m_A (v_{xAf}^2 + v_{yAf}^2) + m_B (v_{xBf}^2 + v_{yBf}^2) = m_A v_{xAi}^2 && \text{(Remplacer zéro)} \\ \Rightarrow & m_A v_{Af}^2 + m_B (v_{xBf}^2 + v_{yBf}^2) = m_A v_{xAi}^2 && (v_{Af}^2 = v_{xAf}^2 + v_{yAf}^2) \\ \Rightarrow & (4)v_{Af}^2 + (8)(v_{xBf}^2 + v_{yBf}^2) = (4)(2)^2 && \text{(Remplacer termes)} \\ \Rightarrow & \boxed{4v_{Af}^2 + 8(v_{xBf}^2 + v_{yBf}^2) = 16} && \text{(3) (Simplifier)} \end{aligned}$$

Développons les deux composantes de vitesse finale de la rondelle **B** à partir de l'équation (1) et (2) :

$$\text{De (1)} : v_{xBf} = 1 - 0,4v_{Af} \Rightarrow (v_{xBf})^2 = (1 - 0,4v_{Af})^2 \Rightarrow \boxed{v_{xBf}^2 = 1 - 0,8v_{Af} + 0,16v_{Af}^2}$$

$$\text{De (2)} : v_{yBf} = 0,3v_{Af} \Rightarrow (v_{yBf})^2 = (0,3v_{Af})^2 \Rightarrow \boxed{v_{yBf}^2 = 0,09v_{Af}^2}$$

Remplaçons ces deux dernières équations dans l'équation (3) afin d'évaluer  $v_{Af}$  :

$$4v_{Af}^2 + 8(v_{xBf}^2 + v_{yBf}^2) = 16$$

$$\Rightarrow v_{Af}^2 + 2((1 - 0,8v_{Af} + 0,16v_{Af}^2) + (0,09v_{Af}^2)) = 4 \quad (\text{Diviser par 4 et remplacer})$$

$$\Rightarrow v_{Af}^2 + 2(1 - 0,8v_{Af} + 0,25v_{Af}^2) = 4 \quad (\text{Simplifier})$$

$$\Rightarrow v_{Af}^2 + 2 - 1,6v_{Af} + 0,5v_{Af}^2 = 4 \quad (\text{Distribuer facteur 2})$$

$$\Rightarrow \boxed{1,5v_{Af}^2 - 1,6v_{Af} - 2 = 0} \quad (\text{Mettre forme } ax^2 + bx + c = 0)$$

Évaluons la solution au polynôme du 2<sup>ème</sup> degré :

$$v_{Af} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow v_{Af} = \frac{-(-1,6) \pm \sqrt{(-1,6)^2 - 4(1,5)(-2)}}{2(1,5)} \quad (\text{Remplacer } a, b \text{ et } c)$$

$$\Rightarrow v_{Af} = \frac{1,6 \pm \sqrt{14,56}}{3} \quad (\text{Simplification})$$

$$\Rightarrow v_{Af} = \{-0,7386, 1,805\} \quad (\text{Deux solutions})$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{Af} = 1,805 \text{ m/s}} \quad (\text{Module toujours positif})$$

Évaluons les vitesses finales de nos deux rondelles après la collision :

Rondelle	Selon l'axe x	Selon l'axe y	Module
<b>A</b>	$v_{xAf} = v_{Af} \cos(36,9^\circ)$ $= (1,805)\cos(36,9^\circ)$ $= 1,443 \text{ m/s}$	$v_{yAf} = -v_{Af} \sin(36,9^\circ)$ $= (1,805)\sin(36,9^\circ)$ $= -1,084 \text{ m/s}$	$v_{Af} = 1,805 \text{ m/s}$
<b>B</b>	$v_{xBf} = 1 - 0,4v_{Af}$ $= 1 - 0,4(1,805)$ $= 0,278 \text{ m/s}$	$v_{yBf} = 0,3v_{Af}$ $= 0,3(1,805)$ $= 0,5415 \text{ m/s}$	$v_{yBf} = \sqrt{v_{xBf}^2 + v_{yBf}^2}$ $= \sqrt{(0,278)^2 + (-0,5415)^2}$ $= 0,6087 \text{ m/s}$

Nous pouvons maintenant évaluer l'orientation de la rondelle **B** après la collision :

$$\tan(\theta) = \frac{v_{yBf}}{v_{xBf}} \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{(0,5415)}{(0,278)} \Rightarrow \boxed{\theta = 62,82^\circ \text{ au nord de l'est}}$$

# La vitesse de rapprochement avant la collision et d'éloignement après la collision de deux objets ponctuels

Avant une collision et après une collision, on peut évaluer la vitesse de rapprochement et d'éloignement de deux objets ponctuels à l'aide d'un concept de vitesse relative :

	Avant la collision	Après la collision
	$\vec{v}_{AB0} = \vec{v}_{A0} - \vec{v}_{B0}$	$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$
Selon le référentiel au sol <b>S</b>		
Selon le référentiel <b>B</b>		

- où  $\vec{v}_{A0}$  : Vitesse de la sphère **A** avant la collision (m/s).
- $\vec{v}_{B0}$  : Vitesse de la sphère **B** avant la collision (m/s).
- $\vec{v}_{AB0}$  : Vitesse relative de **A** par rapport à **B** avant la collision (m/s).
- $\vec{v}_A$  : Vitesse de la sphère **A** après la collision (m/s).
- $\vec{v}_B$  : Vitesse de la sphère **B** après la collision (m/s).
- $\vec{v}_{AB}$  : Vitesse relative de **A** par rapport à **B** après la collision (m/s).

Preuve :

Effectuons un calcul de vitesse relative à partir de deux objet **A** et **B** se déplaçant par rapport à un référentiel **S** :

$$\vec{v}_{AB} = \vec{v}_{AS} + \vec{v}_{SB} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{AB} = \vec{v}_{AS} - \vec{v}_{BS} \quad (\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{BA})$$

$$\Rightarrow \quad \vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B \quad \blacksquare \quad (\text{Retirer référence à } \mathbf{S})$$

# La comparaison des vitesses relatives lors d'une collision élastique entre deux objets ponctuels

Lors d'une collision élastique entre deux objets ponctuels **A** et **B**, si on impose la conservation de la quantité de mouvement ( $\sum \vec{p} = \text{constante}$ ) et la conservation de l'énergie sous forme cinétique ( $K = \text{constante}$ ), on obtient alors une contrainte sur la vitesse relatives  $\vec{v}_{AB0}$  avant la collision et la vitesse relative  $\vec{v}_{AB}$  après la collision des deux objets sous la forme suivante :

$$\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{AB0}$$

(Pour une collision élastique entre deux objets ponctuels)

où  $\vec{v}_{AB}$  : Vitesse relative de **A** par rapport à **B** après la collision (m/s).

$\vec{v}_{AB0}$  : Vitesse relative de **A** par rapport à **B** avant la collision (m/s).

## Preuve :

Appliquons la conservation de la quantité de mouvement à la collision entre deux objets ponctuels **A** et **B**, imposons la contrainte des vitesses relatives  $\vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{AB0}$  entre nos deux objets et vérifions qu'il y aura conservation de l'énergie cinétique. Pour la conservation de la quantité de mouvement, nous avons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \vec{p}_A + \vec{p}_B &= \vec{p}_{A0} + \vec{p}_{B0} \Rightarrow m_A \vec{v}_A + m_B \vec{v}_B = m_A \vec{v}_{A0} + m_B \vec{v}_{B0} && (\vec{p} = m\vec{v}) \\ &\Rightarrow m_A \vec{v}_A - m_A \vec{v}_{A0} = m_B \vec{v}_{B0} - m_B \vec{v}_B && (\text{Regrouper terme}) \\ &\Rightarrow m_A (\vec{v}_A - \vec{v}_{A0}) = m_B (\vec{v}_{B0} - \vec{v}_B) && \text{(1)} \quad (\text{Factoriser } m_A \text{ et } m_B) \end{aligned}$$

Pour la contrainte sur les vitesses relatives, nous avons l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \vec{v}_{AB} = -\vec{v}_{AB0} &\Rightarrow \vec{v}_A - \vec{v}_B = -(\vec{v}_{A0} - \vec{v}_{B0}) && (\vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B) \\ &\Rightarrow \vec{v}_A + \vec{v}_{A0} = \vec{v}_B + \vec{v}_{B0} && \text{(2)} \quad (\text{Regrouper terme}) \end{aligned}$$

À partir (1), effectuons un produit scalaire avec la relation (2) afin d'obtenir un terme en  $v^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$  ce qui formera un terme d'énergie cinétique pour ainsi démontrer qu'il y a conservation de l'énergie cinétique sous la contrainte des vitesses relatives :

$$\begin{aligned} m_A (\vec{v}_A - \vec{v}_{A0}) &= m_B (\vec{v}_{B0} - \vec{v}_B) && (\text{De (1)}) \\ \Rightarrow m_A (\vec{v}_A - \vec{v}_{A0}) \cdot (\vec{v}_A + \vec{v}_{A0}) &= m_B (\vec{v}_{B0} - \vec{v}_B) \cdot (\vec{v}_B + \vec{v}_{B0}) && (\text{Produit scalaire avec (2)}) \\ \Rightarrow m_A (v_A^2 + \vec{v}_A \cdot \vec{v}_{A0} - \vec{v}_{A0} \cdot \vec{v}_A - v_{A0}^2) &= m_B (v_{B0} \cdot v_B + v_{B0}^2 - v_B^2 - \vec{v}_B \cdot \vec{v}_{B0}) && (\text{Distribution}) \\ \Rightarrow m_A (v_A^2 - v_{A0}^2) &= m_B (v_{B0}^2 - v_B^2) && (\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \text{ et simpli.}) \\ \Rightarrow m_A v_A^2 - m_A v_{A0}^2 &= m_B v_{B0}^2 - m_B v_B^2 && (\text{Distribuer } m_A \text{ et } m_B) \\ \Rightarrow m_A v_A^2 + m_B v_B^2 &= m_A v_{A0}^2 + m_B v_{B0}^2 && (\text{Réorganiser termes}) \end{aligned}$$

Nous pouvons obtenir une expression illustrant la conservation de l'énergie cinétique :

$$m_A v_A^2 + m_B v_B^2 = m_A v_{A0}^2 + m_B v_{B0}^2 \quad (\text{Équation précédente})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 = \frac{1}{2} m_A v_{A0}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B0}^2 \quad (\text{Multiplier par } \frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow K_A + K_B = K_{A0} + K_{B0} \quad \blacksquare \quad (K = \frac{1}{2} m v^2)$$

## La collision de deux objets non ponctuels

Dans le cadre de la théorie de la dynamique de la particule, il est impossible de déterminer les résultats d'une collision en deux dimension si l'on connaît uniquement les quatre conditions initiales  $v_{xAi}$ ,  $v_{yAi}$ ,  $v_{xBi}$  et  $v_{yBi}$ , car les trois équations disponibles (si la collision est élastique) ne permettent pas de solutionner les quatre inconnus de la situation finale ( $v_{xAf}$ ,  $v_{yAf}$ ,  $v_{xBf}$  et  $v_{yBf}$ ).

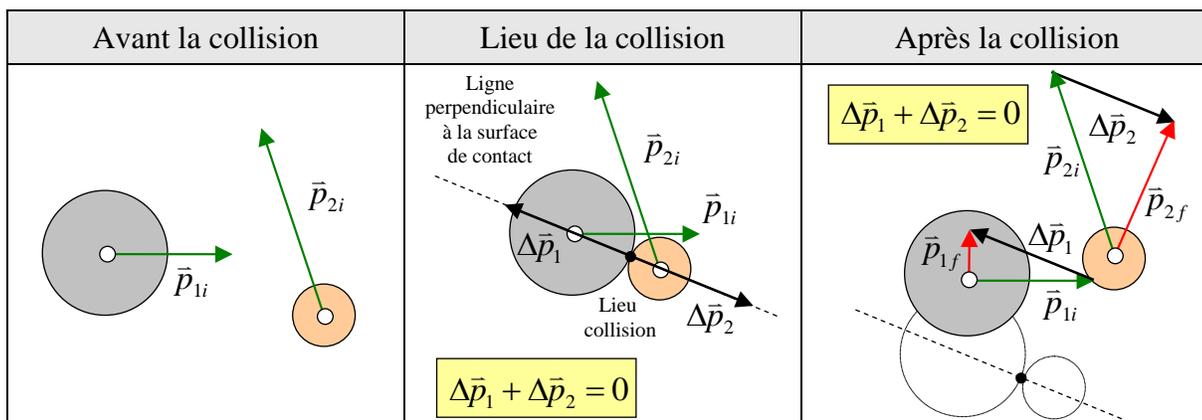


La collision élastique en deux dimensions entre deux objets non ponctuels comme le billard est un problème pouvant être résolu avec uniquement les conditions initiales du système (en négligeant le spin).

Par contre, si les **deux objets** peuvent être considérés comme étant **non ponctuel**, un **site de collision** peut être identifié sur les deux objets et introduit une **contrainte sur l'orientation des forces normales** appliquées entre les deux objets.

Ainsi, la variation de la quantité de mouvement  $\Delta \vec{p}$  que subit les deux objets est de même valeur, mais de sens opposé (3<sup>ième</sup> loi de Newton) et elle s'effectue uniquement dans un **plan perpendiculaire à la surface de contact** dans la direction de la **force normale de contact**. Dans ce modèle de collision, on **néglige le frottement de contact** (force parallèle à la surface de contact).

Voici une représentation vectorielle des échanges de la quantité de mouvement  $\Delta \vec{p}$  :

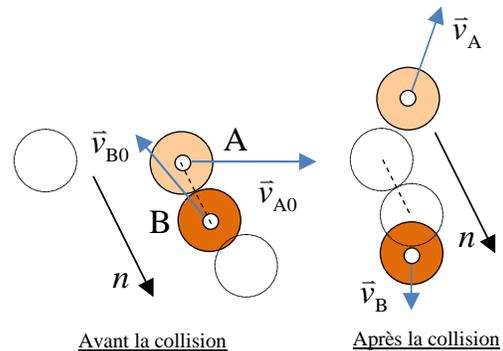


- ❖ Il y a conservation de la quantité de mouvement, car  $\Delta \vec{p}_1 + \Delta \vec{p}_2 = 0$ .
- ❖ La quantité de mouvement finale de chaque objet est obtenu par  $\vec{p}_f = \vec{p}_i + \Delta \vec{p}$ .
- ❖ La valeur de  $\Delta \vec{p}$  dépend de la nature de la collision (élastique ou inélastique).

## La collision élastique en 3D entre deux objets sphériques (complément informatique)

Lors d'une collision élastique entre deux objets sphériques **A** et **B**, l'échange de quantité de mouvement  $\vec{p}$ , tout en respectant la conservation de l'énergie cinétique  $K$ , s'effectue selon un axe  $n$  reliant les deux centres des sphères. On peut déterminer la vitesse finale  $\vec{v}_A$  de l'objet **A** et la vitesse finale  $\vec{v}_B$  de l'objet **B** à l'aide des équations suivantes :

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{AB} + \vec{v}_{B0} \quad \text{et} \quad \vec{v}_B = \vec{v}_{BB} + \vec{v}_{B0}$$



tel que

$$\begin{aligned} \vec{v}_{AB} &= \vec{v}_{AB0} + (v_{nAB} - v_{nAB0})\hat{n} & \hat{n} &= \hat{n}_{AB} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|} \\ \vec{v}_{AB0} &= \vec{v}_{A0} - \vec{v}_{B0} & \vec{v}_{BB} &= -\frac{m_A}{m_B}(v_{nAB} - v_{nAB0})\hat{n} \\ v_{nAB0} &= \vec{v}_{AB0} \cdot \hat{n} & v_{nAB} &= \left( \frac{1 - m_{B/A}}{1 + m_{B/A}} \right) v_{nAB0} \quad \text{où} \quad m_{B/A} = \frac{m_B}{m_A} \end{aligned}$$

- où
- $\vec{v}_A$  : Vitesse de la sphère **A** après la collision (m/s).
  - $\vec{v}_B$  : Vitesse de la sphère **B** après la collision (m/s).
  - $\vec{v}_{AB}$  : Vitesse relative de **A** par rapport à la vitesse initiale de **B** après la collision (m/s).
  - $\vec{v}_{BB}$  : Vitesse relative de **B** par rapport à la vitesse initiale de **B** après la collision (m/s).
  - $\vec{v}_{AB0}$  : Vitesse relative de **A** par rapport à **B** avant la collision (m/s).
  - $v_{nAB}$  : Vitesse relative de **A** par rapport à la vitesse initiale de **B** selon l'axe  $n$  après la collision (m/s).
  - $v_{nAB0}$  : Vitesse relative de **A** par rapport à **B** selon l'axe  $n$  avant la collision (m/s).
  - $\hat{n}$  : Orientation de l'axe passant par le centre de **A** vers le centre de **B**.
  - $m_{B/A}$  : Rapport entre la masse de **B** et la masse de **A**.
  - $m_A$  : Masse de la sphère **B** (kg).
  - $m_B$  : Masse de la sphère **B** (kg).

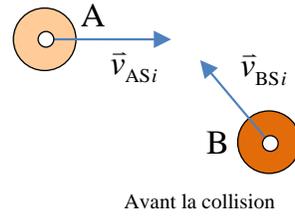
### Remarque :

Cette solution est obtenue en respectant la conservation de la quantité de mouvement  $\vec{p}$  et la conservation de l'énergie cinétique  $K$  à partir du **référentiel de la sphère B avant la collision**. Ainsi, les vitesses relatives sont évaluées par rapport au référentiel de la sphère **B** avant la collision ce qui donne  $\vec{v}_{BB0} = 0$  mais  $\vec{v}_{BB} \neq 0$ .

Preuve :

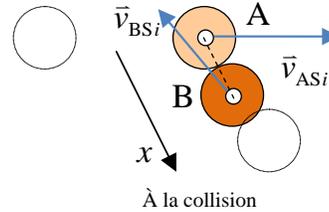
Considérons un objet **A** de masse  $m_A$  et un objet **B** de masse  $m_B$  de forme sphérique se déplaçant dans le référentiel **S** avec les vitesses

$$\vec{v}_{ASi} \text{ et } \vec{v}_{BSi}.$$



Nous allons évaluer la vitesse de nos deux objets après une collision élastique. Puisqu'il y aura transfert de quantité de mouvement entre l'objet **A** et **B** dans la direction de la normale à la surface de nos deux sphères, nous allons définir un axe  $x$  entre nos deux objets en reliant la position  $\vec{r}_A$  de l'objet **A** à la position  $\vec{r}_B$  de l'objet **B** tel que

$$\hat{x} = \vec{i} = \frac{\vec{r}_B - \vec{r}_A}{|\vec{r}_B - \vec{r}_A|}.$$



Pour faciliter les calculs et ainsi simplifier l'expression de nos lois physiques, nous allons réaliser notre collision dans le référentiel de la vitesse initiale de **B**. Nous obtenons ainsi la vitesse de nos deux objets **A** et **B** dans le référentiel **B** à l'aide des équations suivantes :

- $\vec{v}_{ABi} = \vec{v}_{ASi} + \vec{v}_{SBi} \Rightarrow \vec{v}_{ABi} = \vec{v}_{ASi} - \vec{v}_{BSi}$
- $\vec{v}_{BBi} = \vec{v}_{BSi} + \vec{v}_{SBi} \Rightarrow \vec{v}_{BBi} = \vec{v}_{BSi} + (-\vec{v}_{BSi})$  (Vitesse relative :  $\vec{v}_{SBi} = -\vec{v}_{BSi}$ )  
 $\Rightarrow \vec{v}_{BBi} = 0$

Selon l'axe  $x$ , la composante en  $x$  de la vitesse de l'objet **A** dans le référentiel **B** avant la collision s'obtient après le calcul du produit scalaire<sup>1</sup>

$$v_{xABi} = \vec{v}_{ABi} \cdot \hat{x}.$$

Puisque la collision entre l'objet **A** et **B** est élastique, la collision doit respecter la conservation de la quantité de mouvement  $\sum \vec{p}_f = \sum \vec{p}_i$  et la conservation de l'énergie cinétique  $\sum K_f = \sum K_i$ . Ces deux contraintes ayant été réalisées dans le **chapitre 3.11a** nous permet d'obtenir la composante de la vitesse de l'objet **A** selon l'axe  $x$  dans le référentiel **B** à l'aide de l'équation

$$v_{xABf} = \left( \frac{1 - m_{B/A}}{1 + m_{B/A}} \right) v_{xABi} \quad \text{où} \quad m_{B/A} = \frac{m_B}{m_A}.$$

<sup>1</sup> Le produit scalaire :  $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos(\theta) = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$

Puisque la variation de la quantité de mouvement  $\Delta\vec{p}_{AB}$  de l'objet **A** durant la collision étant uniquement selon l'axe  $x$ , nous pouvons l'évaluer à l'aide du calcul suivant :

$$\begin{aligned} \Delta\vec{p}_{AB} = \vec{p}_{ABf} - \vec{p}_{ABi} &\Rightarrow \Delta\vec{p}_{AB} = (p_{xABf} - p_{xABi})\hat{x} && \text{(Uniquement selon l'axe } x) \\ &\Rightarrow \Delta\vec{p}_{AB} = (m_A v_{xABf} - m_A v_{xABi})\hat{x} && (p_x = mv_x) \\ &\Rightarrow \Delta\vec{p}_{AB} = m_A (v_{xABf} - v_{xABi})\hat{x} && \text{(Factoriser } m_A) \end{aligned}$$

Cette variation de la quantité de mouvement  $\Delta\vec{p}_{AB}$  nous permet de déterminer la quantité de mouvement finale  $\vec{p}_{ABf}$  de l'objet **A** dans le référentiel **B** étant

$$\vec{p}_{ABf} = \vec{p}_{ABi} + \Delta\vec{p}_{AB}$$

ce qui nous permet d'évaluer la vitesse finale  $\vec{v}_{ABf}$  de l'objet **A** dans le référentiel **B** à l'aide de l'expression suivante :

$$\begin{aligned} \vec{p}_{ABf} = \vec{p}_{ABi} + \Delta\vec{p}_{AB} &\Rightarrow m_A \vec{v}_{ABf} = m_A \vec{v}_{ABi} + m_A (v_{xABf} - v_{xABi})\hat{x} && (\Delta\vec{p}_{AB} = m_A (v_{xABf} - v_{xABi})\hat{x}) \\ &\Rightarrow \vec{v}_{ABf} = \vec{v}_{ABi} + (v_{xABf} - v_{xABi})\hat{x} && \text{(Simplifier } m_A) \end{aligned}$$

Puisque qu'il y a conservation de la quantité de mouvement ( $\sum \vec{p}_f = \sum \vec{p}_i$ ), nous pouvons affirmer qu'il y a transfert de quantité de mouvement entre **A** et **B** tel que

$$\Delta\vec{p}_{BB} = -\Delta\vec{p}_{AB} .$$

Nous pouvons ainsi déterminer la vitesse finale de **B** dans le référentiel **B** après la collision par le transfert de quantité de mouvement  $\Delta\vec{p}_{BB}$  appliqué à l'objet **B** :

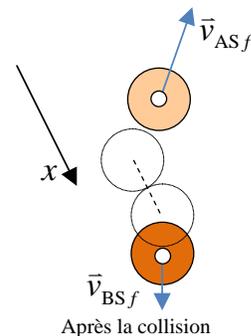
$$\begin{aligned} \vec{p}_{BBf} = \vec{p}_{BBi} + \Delta\vec{p}_{BB} &\Rightarrow \vec{p}_{BBf} = \Delta\vec{p}_{BB} && (\vec{p}_{BBi} = 0, \text{ car } \vec{v}_{BBi} = 0) \\ &\Rightarrow m_B \vec{v}_{BBf} = \Delta\vec{p}_{BB} && (\vec{p} = m\vec{v}) \\ &\Rightarrow \vec{v}_{BBf} = \frac{\Delta\vec{p}_{BB}}{m_B} && \text{(Isoler } \vec{v}_{BBf}) \\ &\Rightarrow \vec{v}_{BBf} = \frac{-\Delta\vec{p}_{AB}}{m_B} && (\Delta\vec{p}_{BB} = -\Delta\vec{p}_{AB}) \\ &\Rightarrow \vec{v}_{BBf} = -\frac{m_A}{m_B} (v_{xABf} - v_{xABi})\hat{x} && (\Delta\vec{p}_{AB} = m_A (v_{xABf} - v_{xABi})\hat{x}) \end{aligned}$$

Finalement, nous pouvons transformer nos vitesses finales dans le référentiel **S** et obtenir les vitesses de nos deux objets tel que

$$\vec{v}_{ASf} = \vec{v}_{ABf} + \vec{v}_{BSi}$$

et

$$\vec{v}_{BSf} = \vec{v}_{BBf} + \vec{v}_{BSi} . \blacksquare$$

















# Chapitre 3.11c – Les collisions inélastiques

## La vitesse de rapprochement dans une collision à deux objets non ponctuels

Lors d'une collision entre deux objets non ponctuels **A** et **B**, on peut évaluer la composante de vitesse de rapprochement  $v_{nAB}$  des deux objets par rapport à un axe orienté selon la normale à la surface  $\hat{n}$  du contact :

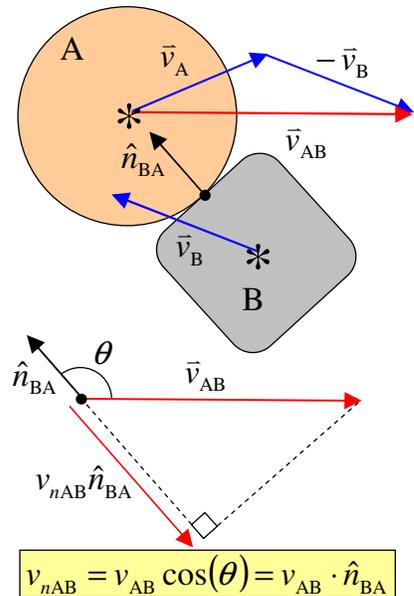
$$v_{nAB} = \vec{v}_{AB} \cdot \hat{n}_{BA} \quad \text{avec} \quad \vec{v}_{AB} = \vec{v}_A - \vec{v}_B$$

où  $v_{nAB}$  : Composante de la vitesse relative de **A** par rapport à **B** selon l'axe  $n$  (m/s).

$\vec{v}_A$  : Vitesse initiale de l'objet **A** (m/s).

$\vec{v}_B$  : Vitesse initiale de l'objet **B** (m/s).

$\hat{n}_{BA}$  : Normale à la surface de l'objet **B** sur l'objet **A** pointant vers l'extérieur de **B**.



Remarque : (avec une définition de  $\hat{n} = \hat{n}_{BA}$  )

- Si  $v_{nAB} > 0$ , alors l'objet **A** s'éloigne de **B** (vitesse relative après la collision).
- Si  $v_{nAB} < 0$ , alors l'objet **A** se rapproche de **B** (vitesse relative avant la collision).

## Le coefficient de restitution

En 1687, Isaac Newton propose un coefficient permettant d'évaluer la perte de vitesse relative entre deux objets entant en collision. Ce coefficient  $e$  compris entre 0 et 1 correspond au rapport entre le module de la vitesse relative  $v_{nAB}$  de deux objets **A** et **B** après une collision et le module de la vitesse relative  $v_{nAB0}$  avant une collision :

En valeur absolue	Avec signes	Comparaison des vitesses relatives
$e = \frac{ v_{nAB} }{ v_{nAB0} }$	$e = -\frac{v_{nAB}}{v_{nAB0}}$	$v_{nAB} = -e v_{nAB0}$

où  $e$  : Coefficient de restitution ( $e \in [0 .. 1]$ ).

$v_{nAB}$  : Composante de la vitesse relative de **A** par rapport à **B** après la collision selon l'axe  $n$  (m/s).

$v_{nAB0}$  : Composante de la vitesse relative de **A** par rapport à **B** avant la collision selon l'axe  $n$  (m/s).

Le coefficient de restitution  $e$  permet d'interpréter un scénario de perte d'énergie cinétique  $K$  dans une collision de façon empirique :

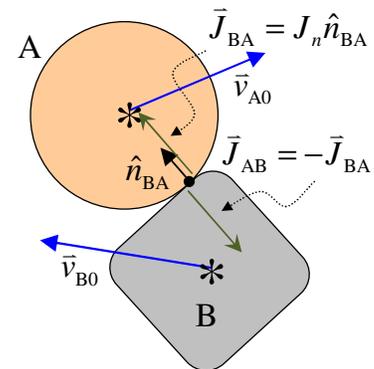
Type de collision	Valeur de $e$
élastique	$e = 1$
inélastique	$0 < e < 1$
Parfaitement inélastique	$e = 0$

Pour des sphères entrant en collisions, voici quelques valeurs tirées de la littérature<sup>1</sup> :

Sphère		Coefficient $e$
bois	bois	1 / 2
liège	liège	5 / 9
ivoire	ivoire	8 / 9
verre	verre	15 / 16
acier	acier	19 / 20

## La collision inélastique en 3D entre deux objets non ponctuels (complément informatique)

Lors d'une collision inélastique entre deux objets **A** et **B** non ponctuels, on peut évaluer l'impulsion  $\vec{J}$  s'appliquant les deux objets selon un axe parallèle à la normale à la surface des deux objets en fonction de la vitesse initiale  $\vec{v}_0$  de nos deux objets, de leur masse  $m$  et du coefficient de restitution  $e$ . Tout en respectant la conservation de la quantité de mouvement, nous obtenons les équations suivantes :



$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A0} + \frac{J_n}{m_A} \hat{n}_{BA} \quad \text{et} \quad \vec{v}_B = \vec{v}_{B0} - \frac{J_n}{m_B} \hat{n}_{BA}$$

tel que

$$J_n = \frac{-(1+e)}{(1/m_A + 1/m_B)} (\vec{v}_{A0} - \vec{v}_{B0}) \cdot \hat{n}_{BA}$$

- où  $\vec{v}_A$  : Vitesse finale de l'objet **A** (m/s).       $\vec{v}_B$  : Vitesse finale de l'objet **B** (m/s).  
 $\vec{v}_{A0}$  : Vitesse initiale de l'objet **A** (m/s).       $\vec{v}_{B0}$  : Vitesse initiale de l'objet **B** (m/s).  
 $m_A$  : Masse de l'objet **A** (kg).       $m_B$  : Masse de l'objet **B** (kg).  
 $\hat{n}_{BA}$  : Normale à la surface de l'objet **B** pointant vers l'extérieur de **B**.  
 $J_n$  : Composante de l'impulsion appliquée selon l'axe  $\hat{n}_{BA}$  (Ns).

<sup>1</sup> Référence des coefficients : [http://fr.wikipedia.org/wiki/Coefficient\\_de\\_restitution](http://fr.wikipedia.org/wiki/Coefficient_de_restitution)

Preuve :

Considérons un objet **A** de masse  $m_A$  se déplaçant à vitesse  $\vec{v}_{A0}$  qui entre en collision avec un objet **B** de masse  $m_B$  se déplaçant à vitesse  $\vec{v}_{B0}$  tel que la force normale de contact appliquée par l'objet **B** sur l'objet **A** sera orientée selon une orientation  $\hat{n}_{BA}$ .

Par **conservation de la quantité de mouvement**, l'impulsion appliquée par l'objet **A** sur l'objet **B** et l'impulsion appliquée par l'objet **B** sur l'objet **A** respecte la relation

$$\vec{J}_{AB} = -\vec{J}_{BA}$$

tel que

$$\vec{J}_{BA} = J_n \hat{n}_{BA} .$$

Ainsi, nous pouvons établir par le théorème de la quantité de mouvement que

$$\vec{p}_A = \vec{p}_{A0} + \vec{J}_{BA} \quad \text{et} \quad \vec{p}_B = \vec{p}_{B0} + \vec{J}_{AB}$$

ce qui nous donne en remplaçant  $\vec{p} = m\vec{v}$  les équations

$$m_A \vec{v}_A = m_A \vec{v}_{A0} + \vec{J}_{BA} \quad \text{et} \quad m_B \vec{v}_B = m_B \vec{v}_{B0} + \vec{J}_{AB} .$$

En divisant par la masse  $m$ , en utilisant  $\vec{J}_{AB} = -\vec{J}_{BA}$  et en remplaçant  $\vec{J}_{BA} = J_n \hat{n}_{BA}$ , nous pouvons obtenir

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{A0} + \frac{J_n}{m_A} \hat{n}_{BA} \quad \text{et} \quad \vec{v}_B = \vec{v}_{B0} - \frac{J_n}{m_B} \hat{n}_{BA} .$$

Il reste maintenant qu'à évaluer l'impulsion  $J_n$  appropriée dans la collision pour respecter la nature d'une collision inélastique. Pour ce faire, introduisons la **définition du coefficient de restitution**

$$v_{nAB} = -e v_{nAB0}$$

valide lors d'une collision inélastique. En développant cette équation **tout en respectant la conservation de la quantité de mouvement**, nous pouvons obtenir l'impulsion  $J_n$  requise :

$$v_{nAB} = -e v_{nAB0}$$

$$\Rightarrow (\vec{v}_A - \vec{v}_B) \cdot \hat{n}_{BA} = -e (\vec{v}_{A0} - \vec{v}_{B0}) \cdot \hat{n}_{BA} \quad (v_{nAB0} = (\vec{v}_{A0} - \vec{v}_{B0}) \cdot \hat{n}_{BA})$$

$$\Rightarrow \left( \left( \vec{v}_{A0} + \frac{J_n}{m_A} \hat{n}_{BA} \right) - \left( \vec{v}_{B0} - \frac{J_n}{m_B} \hat{n}_{BA} \right) \right) \cdot \hat{n}_{BA} = -e (\vec{v}_{A0} - \vec{v}_{B0}) \cdot \hat{n}_{BA} \quad (\text{Remplacer } \vec{v}_A \text{ et } \vec{v}_B)$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{A0} \cdot \hat{n}_{BA} + \frac{J_n}{m_A} \hat{n}_{BA} \cdot \hat{n}_{BA} - \vec{v}_{B0} \cdot \hat{n}_{BA} + \frac{J_n}{m_B} \hat{n}_{BA} \cdot \hat{n}_{BA} = -e (\vec{v}_{A0} - \vec{v}_{B0}) \cdot \hat{n}_{BA} \quad (\text{Distribution})$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{A0} \cdot \hat{n}_{BA} + \frac{J_n}{m_A} - \vec{v}_{B0} \cdot \hat{n}_{BA} + \frac{J_n}{m_B} = -e (\vec{v}_{A0} - \vec{v}_{B0}) \cdot \hat{n}_{BA} \quad (\hat{n}_{BA} \cdot \hat{n}_{BA} = 1)$$

Isolons les termes en  $J_n$  et établissons un lien avec les vitesses initiales :

$$\bar{v}_{A0} \cdot \hat{n}_{BA} + \frac{J_n}{m_A} - \bar{v}_{B0} \cdot \hat{n}_{BA} + \frac{J_n}{m_B} = -e(\bar{v}_{A0} - \bar{v}_{B0}) \cdot \hat{n}_{BA} \quad (\text{Équation précédente})$$

$$\Rightarrow \frac{J_n}{m_A} + \frac{J_n}{m_B} = -e(\bar{v}_{A0} - \bar{v}_{B0}) \cdot \hat{n}_{BA} - \bar{v}_{A0} \cdot \hat{n}_{BA} + \bar{v}_{B0} \cdot \hat{n}_{BA} \quad (\text{Isoler terme avec } J_n)$$

$$\Rightarrow J_n \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) = (-e(\bar{v}_{A0} - \bar{v}_{B0}) - \bar{v}_{A0} + \bar{v}_{B0}) \cdot \hat{n}_{BA} \quad (\text{Factoriser } \hat{n}_{BA} \text{ et } J_n)$$

$$\Rightarrow J_n \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) = (-e(\bar{v}_{A0} - \bar{v}_{B0}) - (\bar{v}_{A0} - \bar{v}_{B0})) \cdot \hat{n}_{BA} \quad (\text{Réécriture})$$

$$\Rightarrow J_n \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) = -(e(\bar{v}_{A0} - \bar{v}_{B0}) + (\bar{v}_{A0} - \bar{v}_{B0})) \cdot \hat{n}_{BA} \quad (\text{Factoriser signe nég.})$$

$$\Rightarrow J_n \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right) = -(e+1)(\bar{v}_{A0} - \bar{v}_{B0}) \cdot \hat{n}_{BA} \quad (\text{Factoriser } \bar{v}_{A0} - \bar{v}_{B0})$$

$$\Rightarrow J_n = \frac{-(1+e)}{\left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right)} (\bar{v}_{A0} - \bar{v}_{B0}) \cdot \hat{n}_{BA} \quad \blacksquare \quad (\text{Isoler } J_n)$$









# Chapitre 4.1 – La cinétique de rotation

## Le corps rigide

Un corps rigide est un système de  $N$  particules dont la distance entre chaque paire de particules doit être maintenue constante grâce à des forces internes. Les contraintes de distance ont pour effet de réduire les  $3N$  possibilités de translation des  $N$  particules (chaque particule ayant 3 degrés de liberté de translation).

Lorsque le corps rigide est libre de mouvement, les mouvements des  $N$  particules est réduit par les contraintes au mouvement **d'une seule particule**. Cette particule ayant toute la masse du corps peut effectuer une **translation** et une **rotation** autour d'un axe.

L'état de **translation du corps** est évalué en appliquant la **2<sup>e</sup> loi de Newton** en supposant que toutes les forces appliquées sur le corps sont appliquées sur la particule et l'état de **rotation du corps** est évalué en appliquant la **2<sup>e</sup> loi de Newton en rotation**<sup>1</sup> par rapport à la particule.

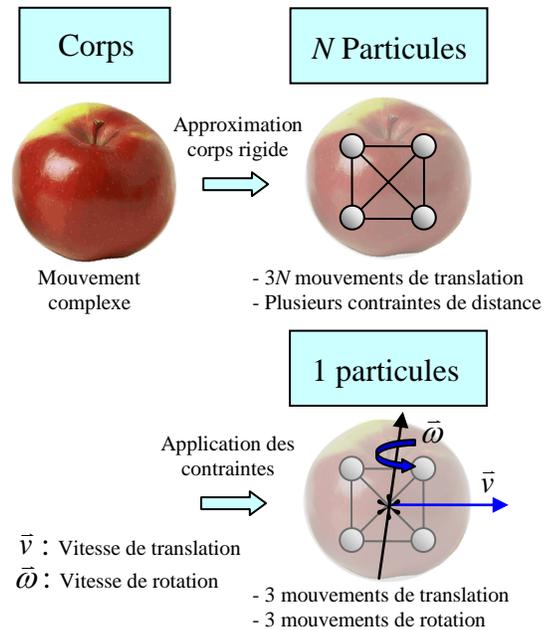
La dynamique du corps rigide ne permet pas d'évaluer la vibration du corps.

## La cinématique de translation et de rotation

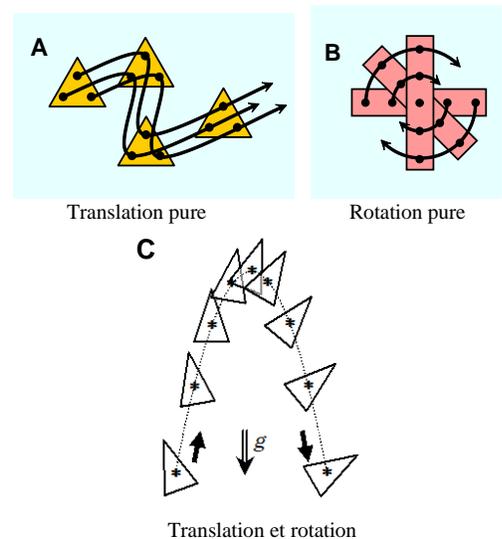
La **cinématique de translation** s'applique lorsque tous les éléments d'un corps effectuent le **même déplacement** (voir schéma A) comme par exemple un bloc qui glisse sur un plan incliné.

La **cinématique de rotation** s'applique lorsque tous les éléments d'un corps tournent autour d'un même point de référence et effectuent la **même rotation angulaire** (voir schéma B) comme par exemple un tourne-disque en rotation.

La **cinématique de translation et de rotation** s'applique lorsqu'un point du corps effectue une translation et que l'ensemble du corps effectue une rotation autour du point en translation (voir schéma C) comme par exemple lancer une balle de baseball.



La dynamique du corps rigide approxime un corps comme étant une particule pouvant effectuer des translations et des rotations autour d'un axe.



<sup>1</sup> La 2<sup>e</sup> loi de Newton en rotation sera présentée dans le chapitre 4.7.

## Axe de rotation et position angulaire

Lorsqu'on fait tourner un corps rigide autour d'un axe de rotation, les points situés sur le corps ne vont pas tous effectuer le même déplacement :

Rotation du corps autour d'un point fixe sur corps (rotation spin)	Rotation du corps autour d'un point fixe à l'extérieur du corps (rotation orbitale)	Rotation spin et rotation orbitale avec deux vitesses angulaires différentes (rotation spin-orbitale)

Puisque tous **points** de l'objet effectuent des **trajectoires circulaires**, on réalise que sous une rotation simple (spin ou orbitale) autour d'un axe, tous les points subissent la même **variation de position angulaire**  $\Delta\theta$  que l'on mesure à l'aide d'un **système d'axe angulaire** :

Position angulaire initiale : $\theta = 0^\circ$	Position angulaire finale : $\theta = 30^\circ$

## Position, vitesse et accélération angulaire

À partir d'un système d'axe angulaire, on peut associer à un corps une position, une vitesse et une accélération qui porte le nom de position angle  $\theta$ , de vitesse angulaire  $\omega$  et accélération angulaire  $\alpha$ .

Tous ces paramètres sont reliés par le calcul différentiel de la façon suivante :

Relation	Position angulaire	Vitesse angulaire	Accélération angulaire
Différentielle (pente)	$\theta(t) = \theta$	$\omega(t) = \frac{d\theta}{dt}$	$\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt}$
Intégrale (aire)	$\theta(t) = \int \omega(t) dt$	$\omega(t) = \int \alpha(t) dt$	$\alpha(t) = \alpha$

où  $\theta$  : Position angulaire (rad)

$\omega$  : Vitesse angulaire (rad/s)

$\alpha$  : Accélération angulaire (rad/s<sup>2</sup>)

**N.B.** On peut utiliser un indice  $x, y$  ou  $z$  aux paramètres  $\theta$ ,  $\omega$  et  $\alpha$  pour désigner autour de quel axe le corps rigide tourne (ex :  $\theta_z$ ,  $\omega_z$  et  $\alpha_z$ ).

## Le mouvement de rotation uniformément accéléré

Lorsqu'un objet subit une accélération angulaire  $\alpha$  constante lors d'une rotation, l'objet effectue un mouvement de rotation uniformément accéléré (RUA). Les équations du mouvement sont alors identiques à celles d'un objet uniformément accéléré (MUA) :

Mouvement rectiligne MUA : Mouvement uniformément accéléré	Mouvement rotatif RUA : Rotation uniformément accéléré
<ul style="list-style-type: none"> <li>○ <math>a_x(t) = a_x</math></li> <li>○ <math>v_x(t) = v_{x0} + a_x t</math></li> <li>○ <math>x(t) = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2} a_x t^2</math></li> <li>○ <math>v_x^2(x) = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0)</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>○ <math>\alpha(t) = \alpha</math></li> <li>○ <math>\omega(t) = \omega_0 + \alpha t</math></li> <li>○ <math>\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2</math></li> <li>○ <math>\omega^2(\theta) = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)</math></li> </ul>

Preuve :

La preuve est identique à la démonstration des équations du MUA en appliquant la correspondance suivante :

$$x \rightarrow \theta \quad v_x \rightarrow \omega \quad a_x \rightarrow \alpha$$

**Situation 1 : Un disque tourne en ralentissant.** Un disque tourne sur lui-même avec une vitesse angulaire initiale de 20 rad/s. En raison du frottement, son mouvement de rotation ralentit au taux constant de 4 rad/s<sup>2</sup>. On désire déterminer combien de tours il effectue avant de l'arrêter.

Voici les données de base :

$$\begin{array}{lll} \omega_0 = 20 \text{ rad/s} & \theta_0 = 0 & \alpha = -4 \text{ rad/s}^2 \\ \omega = 0 & \theta = ? & t = ? \end{array}$$

En utilisant la formule  $\omega^2(\theta)$  pour un RUA, on peut évaluer la position finale angulaire du disque :

$$\begin{aligned} \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) & \Rightarrow (0)^2 = (20)^2 + 2(-4)(\theta - (0)) \\ & \Rightarrow \boxed{\theta = 50 \text{ rad}} \end{aligned}$$

Avec la relation suivante, on peut évaluer le nombre de tour : ( $2\pi = 1$  tour)

$$\frac{50 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad}} = \frac{n \text{ tours}}{1 \text{ tours}} \quad \Rightarrow \quad n = \frac{50}{2\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = 7,96 \text{ tours}}$$

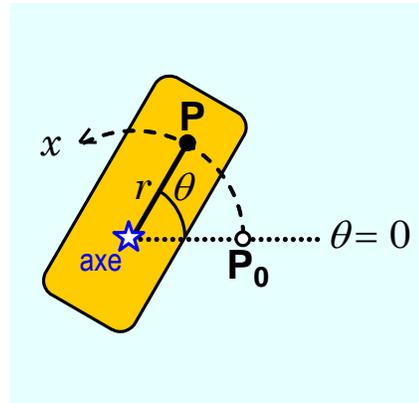
## Les relations entre les variables linéaires et angulaires

Un arc de cercle  $L$  est relié au rayon  $r$  d'un cercle et à un angle d'ouverture  $\theta$  de la façon suivante :

$$L = r\theta \quad \Leftrightarrow \quad \text{Circonférence} = 2\pi r$$

À partir de cette relation, nous pouvons associer la cinématique de translation selon un axe  $x$  circulaire avec la cinématique de rotation selon un axe  $\theta$  de la façon suivante en imposant la contrainte  $x = r\theta = 0$  à l'origine :

- $x = r\theta$
- $v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(r\theta) = r \frac{d\theta}{dt} = r\omega$
- $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(r\omega) = r \frac{d\omega}{dt} = r\alpha$



où  $x$  : Position tangentielle (m)  
 $v_x$  : Vitesse tangentielle (m/s)  
 $a_x$  : Accélération tangentielle (m/s<sup>2</sup>)

**Situation 2 : Un disque qui tourne de plus en plus vite.** Un disque de 30 cm de rayon est initialement au repos. À partir de  $t = 0$ , il est entraîné par une courroie qui lui imprime une accélération angulaire constante de  $2 \text{ rad/s}^2$  (l'axe de rotation du disque est au centre). On désire déterminer **(a)** la vitesse d'une particule située sur le bord du disque à  $t = 3 \text{ s}$  ; **(b)** la longueur du trajet parcouru par une particule située à mi-chemin entre le centre du disque et le bord entre  $t = 0$  et  $t = 3 \text{ s}$ .

Voici les données de base :

$\omega_0 = 0$	$\theta_0 = 0$	$\alpha = 2 \text{ rad/s}^2$
$\omega = ?$	$\theta = ?$	$t = 3 \text{ s}$

Évaluer la vitesse angulaire du disque à 3 s :

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \quad \Rightarrow \quad \omega = (0) + (2)(3) \quad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega = 6 \text{ rad/s}} \quad \text{(Évaluer } \omega \text{)}$$

Évaluons la vitesse linéaire sur le bord du disque :

$$v_x = r\omega \quad \Rightarrow \quad v_x = (0,3)(6) \quad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_x = 1,8 \text{ m/s}} \quad \text{(a) (Évaluer } v_x \text{)}$$

Évaluons l'angle de rotation parcouru durant 3 s :

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \Rightarrow \theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 && \text{(Isoler } \theta - \theta_0 \text{)} \\ &\Rightarrow (\Delta\theta) = \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 && \text{(Remplacer } \Delta\theta = \theta - \theta_0 \text{)} \\ &\Rightarrow \Delta\theta = (0)(3) + \frac{1}{2} (2)(3)^2 && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\ &\Rightarrow \boxed{\Delta\theta = 9 \text{ rad}} && \text{(Évaluer } \Delta\theta \text{)} \end{aligned}$$

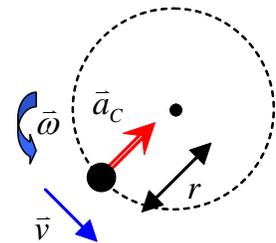
Évaluons la distance parcourue à mi-chemin du rayon total :

$$\begin{aligned} x &= r\theta \Rightarrow \Delta x = r\Delta\theta && \text{(Relation en } \Delta x \text{ et } \Delta\theta \text{)} \\ &\Rightarrow \Delta x = (0,3/2)(9) && \text{(Remplacer, } r \text{ est à mi-chemin)} \\ &\Rightarrow \boxed{\Delta x = 1,35 \text{ m}} \quad \text{(b)} && \text{(Évaluer } \Delta x \text{)} \end{aligned}$$

## Accélération centripète en cinématique de rotation

L'accélération centripète correspond à l'accélération requise pour demeurer sur une trajectoire circulaire. En cinématique de translation, elle dépend de la vitesse et du rayon de rotation. En cinématique de rotation, elle dépend de la vitesse angulaire et du rayon de rotation selon l'expression suivante :

$$a_c = r\omega^2$$



où  $a_c$  : Accélération centripète (m/s<sup>2</sup>)  
 $r$  : Rayon de la trajectoire circulaire (m)  
 $\omega$  : Vitesse angulaire (rad/s)

Preuve :

Évaluons l'accélération centripète en cinématique de rotation à partir de son expression en cinématique de rotation :

$$\begin{aligned} a_c = \frac{v^2}{r} &\Rightarrow a_c = \frac{(r\omega)^2}{r} && \text{(Remplacer } v = v_x = r\omega \text{)} \\ &\Rightarrow a_c = r\omega^2 \quad \blacksquare && \text{(Simplifier } r \text{)} \end{aligned}$$

## Accélération tangentielle et centripète de rotation

Puisque l'accélération peut toujours être décomposée en accélération tangentielle  $\vec{a}_T$  et en accélération centripète  $\vec{a}_C$ , le module de l'accélération respecte la règle de Pythagore étant donné que les deux composantes de l'accélération sont perpendiculaires. Nous avons ainsi la relation suivante :

$$a = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}$$

où  $a$  : Module de l'accélération d'une particule  $\mathbf{P}$  (m/s<sup>2</sup>).

$r$  : Distance entre la particule  $\mathbf{P}$  et l'axe de rotation (m).

$\omega$  : Vitesse angulaire du corps rigide (rad/s).

$\alpha$  : Accélération angulaire du corps rigide (rad/s<sup>2</sup>).

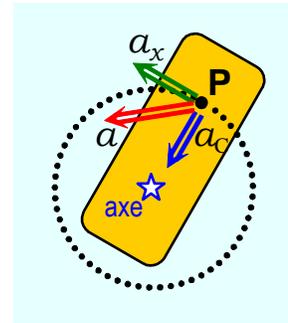
Preuve :

Développons l'expression du module de l'accélération à partir de nos relations pour l'accélération tangentielle  $\vec{a}_T$  et accélération centripète  $\vec{a}_C$  :

$$\vec{a} = \vec{a}_C + \vec{a}_T \Rightarrow a = \sqrt{a_C^2 + a_T^2} \quad (\text{car } \vec{a}_T \perp \vec{a}_C)$$

$$\Rightarrow a = \sqrt{(r\omega^2)^2 + (r\alpha)^2} \quad (\text{Remplacer } a_C = r\omega^2 \text{ et } a_T = r\alpha)$$

$$\Rightarrow a = r\sqrt{\omega^4 + \alpha^2} \quad \blacksquare \quad (\text{Simplification})$$



## La cinématique du roulement *sans glisser*

Lorsqu'une roue de rayon  $r$  roule *sans glisser*, le centre de la roue CR effectue un déplacement  $\Delta x_{CR}$  égale à l'arc de cercle  $r\Delta\theta$  effectué par la roue durant sa rotation ce qui donne la relation suivante :

$$\Delta x_{CR} = r\Delta\theta$$

Une roue à mesure est un instrument qui mesure des distances en effectuant un comptage des tours effectués par la roue durant sa rotation tout au long de son déplacement *sans glisser*. La distance parcourue  $d$  est alors le nombre de tours  $N$  multiplié par la circonférence de la roue  $2\pi r$  ce qui donnera l'expression

$$d = 2\pi r N$$



Une roue à mesure

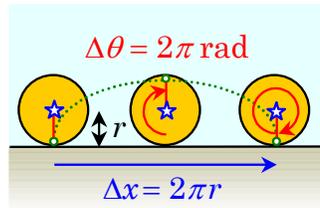
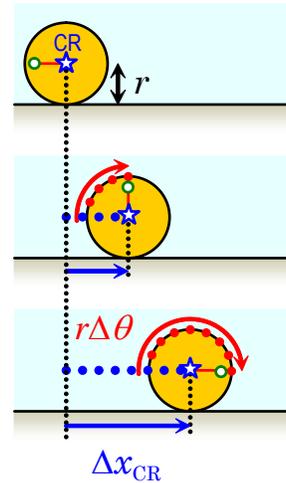
Voici les relations existant entre la cinématique de translation du centre de la roue et la cinématique de rotation de la roue :

Déplacement du centre de la roue :  $\Delta x_{CR} = r\Delta\theta$

Vitesse de translation du centre de la roue :  $v_{CR} = r\omega$

Accélération du centre de la roue :  $a_{CR} = r\alpha$

La cinématique d'un point en bordure d'une roue est beaucoup plus complexe lorsqu'on l'analyse en deux dimensions :



### Position angulaire et coordonnée xy de l'axe de rotation selon z

Lorsqu'un corps effectue une rotation spin ou orbitale autour d'un axe z, la distance entre la position xy où passe l'axe de rotation et le corps en rotation n'influence pas la position angulaire  $\theta_z$ , la vitesse angulaire  $\omega_z$  et l'accélération angulaire  $\alpha_z$  du corps. Les valeurs de  $\theta_z$ ,  $\omega_z$  et  $\alpha_z$  sont uniques au corps.

Pour se convaincre, effectuons une rotation de  $60^\circ$  d'un corps autour de l'axe z situé à deux endroits dans le plan xy :

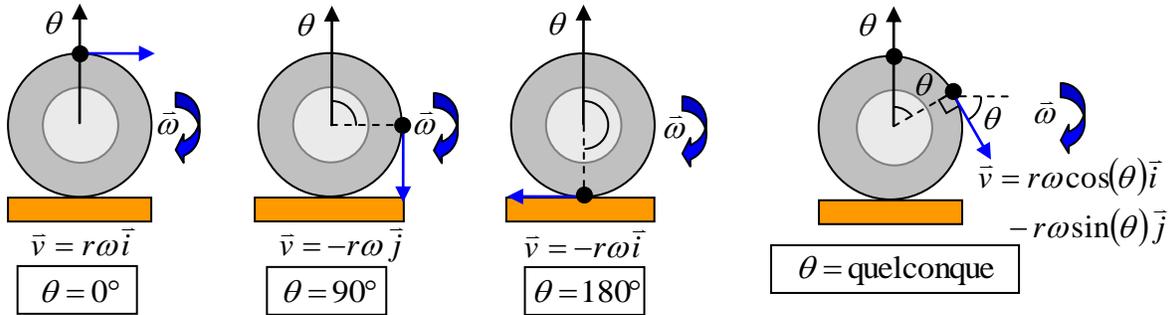
Schéma initiale : $\theta_z = 0^\circ$	Rotation axe 1 : $\theta_z = 60^\circ$	Rotation axe 2 : $\theta_z = 60^\circ$

- ❖ Dans les deux cas, le corps a bel et bien effectué une rotation de  $60^\circ$  autour de l'axe de rotation z et le corps possède le même état de rotation qui est  $\theta_z = 60^\circ$ .
- ❖ Le corps possède une position angulaire  $\theta_z$  unique par rapport à un axe de rotation z.
- ❖ Le corps possède une vitesse angulaire  $\omega_z$  unique par rapport à un axe de rotation z, car  $\omega_z = d\theta_z / dt$  et  $\theta_z$  est unique.
- ❖ Le corps possède une accélération angulaire  $\alpha_z$  unique par rapport à un axe de rotation z, car  $\alpha_z = d\omega_z / dt$  et  $\omega_z$  est unique.

**Situation A : La vitesse d'un bout de pneu.** La roue **R** d'une voiture se déplace *sans glisser* selon l'axe  $x$  à la vitesse  $v_{xRS} = v$  par rapport au sol **S**. La roue possède un rayon  $r$  et tourne à la vitesse angulaire  $\omega$ . On désire évaluer l'expression de la vitesse selon l'axe  $x$  d'un bout de pneu **P** en fonction de son positionnement angulaire  $\theta$  par rapport **(a)** au centre de la roue **R** et **(b)** par rapport au sol **S**.

Selon le **référentiel de la roue**, la roue est immobile et tous les bouts de pneu tournent à la même vitesse angulaire  $\omega$ . Représentons graphiquement le vecteur vitesse  $\vec{v}$  dans un système d'axe  $xy$  à l'aide d'un angle  $\theta$  :

Avec  $v = r\omega$  :



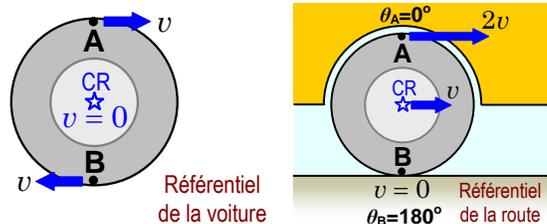
**(a)** Voici l'expression de la vitesse d'un bout de pneu **P** selon l'axe  $x$  en fonction de l'angle  $\theta$  dans le référentiel de la roue **R** :

$$v_{xPR} = r\omega \cos(\theta)$$

**(b)** Selon le **référentiel du sol**, la roue se déplace à vitesse  $v_{xRS}$  en même temps qu'elle effectue des rotations à vitesse angulaire  $\omega$ . À l'aide de l'addition des vitesses relatives en une dimension, nous pouvons évaluer la vitesse d'un bout de pneu **P** selon l'axe  $x$  à partir de la mesure effectuée dans le référentiel de la roue **R** :

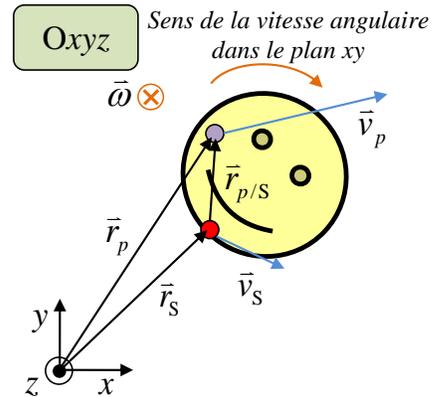
$$\begin{aligned}
 v_{xPS} &= v_{xPR} + v_{xRS} &\Rightarrow & v_{xPS} = r\omega \cos(\theta) + v_{xRS} && \text{(Remplacer } v_{xPR} = r\omega \cos(\theta)\text{)} \\
 & &\Rightarrow & v_{xPS} = v_{xRS} \cos(\theta) + v_{xRS} && \text{(Roue glisse pas : } v_{CR} = r\omega\text{)} \\
 & &\Rightarrow & v_{xPS} = v_{xRS} (1 + \cos(\theta)) && \text{(Factoriser } v_{xRS}\text{)} \\
 & &\Rightarrow & \boxed{v_{xPS} = v(1 + \cos(\theta))} && \text{(Remplacer } v_{xRS} = v\text{)}
 \end{aligned}$$

Avec cette équation, on réalise que le bout de pneu possède une vitesse nulle par rapport au sol lorsque l'angle est égal à  $180^\circ$  ce qui correspond à la position du contact au sol (voir schéma ci-contre). Ce raisonnement est valide uniquement lorsque la roue roule *sans glisser*. Le frottement qui propulse une roue *sans glisser* est alors du frottement statique.



# La position et la vitesse d'une particule du corps rigide par rapport à un point de référence S

L'ensemble des  $N$  particules décrivant le corps rigide possède une position  $\vec{r}_p$  et une vitesse  $\vec{v}_p$  dans nos deux systèmes de coordonnées  $Oxyz$  et  $Sx^{(s)}y^{(s)}z^{(s)}$ . Elles se déplacent à une vitesse  $\vec{v}_S^{(0)}$  avec le corps rigide tout en tournant autour du point  $\vec{r}_S$  dans  $Oxyz$  avec une vitesse angulaire  $\vec{\omega}$ . Cependant, elles sont immobiles selon  $Sx^{(s)}y^{(s)}z^{(s)}$ .



Voici l'ensemble des relations que nous pouvons établir pour définir un corps rigide ainsi que ses  $N$  particules dans le système de coordonnées  $Oxyz$  et  $Sx^{(s)}y^{(s)}z^{(s)}$

Description du paramètre	Mesure par rapport au référentiel $Oxyz$ (toujours fixe, celui qui observe corps rigide en mouvement)	
Masse totale des $N$ particules composant le corps rigide	$m = \sum_{p=1}^N m_p$	
Position du corps rigide (le point de référence)	$\vec{r}_S = \vec{r}_S^{(0)} = (r_{xS}, r_{yS}, r_{zS})$	
Vitesse du corps rigide	$\vec{v}_S = \vec{v}_S^{(0)} = (v_{xS}, v_{yS}, v_{zS})$	
Rotation du corps rigide	Rotation strictement selon l'axe $z$ : $\theta_z$	Rotation en trois dimensions : $\vec{q} = \vec{q}^{(0)} = (q_w, q_x, q_y, q_z)$ (le quaternion doit être normalisé)
Vitesse angulaire du corps rigide	Rotation strictement selon l'axe $z$ : $\omega_z$	Rotation en trois dimensions : $\vec{\omega} = \vec{\omega}^{(0)} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$
Position d'une particule $p$ à partir de la position du corps rigide	$\vec{r}_p = \vec{r}_p^{(0)} = (r_{xp}, r_{yp}, r_{zp})$ et $\vec{r}_p = \vec{r}_S + \vec{r}_{p/S}$ avec $\vec{r}_{p/S} = \vec{r}_p - \vec{r}_S$ (avec la notion de quaternion, nous pouvons calculer $\vec{r}_{p/S}$ d'une autre façon)	
Vitesse d'une particule $p$ à partir de la vitesse du corps rigide	$\vec{v}_p = \vec{v}_p^{(0)} = (v_{xp}, v_{yp}, v_{zp})$ et $\vec{v}_p = \vec{v}_S + \vec{v}_{p/S}$ (la vitesse de la particule dépend de sa position par rapport à S dans $Oxyz$ )	
La vitesse $\vec{v}_{p/S}$ d'une particule $p$ par rapport à l'axe de rotation S à partir de $\vec{r}_{p/S}$ et de la vitesse angulaire $\vec{\omega}$	$\vec{v}_{p/S} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{p/S}$ (vitesse purement rotative autour de S et l'orientation dépend de la position de la particule $p$ par rapport à S)	

## Exercice

**4.1.7** *De moins en moins vite.* Un disque tourne sur lui-même dans le sens anti-horaire à 24 rad/s. En raison du frottement, il ralentit à un taux constant. Après avoir fait 10 tours sur lui-même, il ne tourne plus qu'à 18 rad/s. **(a)** Déterminez  $\alpha$  ? **(b)** Combien de tours supplémentaires le disque fera-t-il avant de s'arrêter?

## Solution

**4.1.7** *De moins en moins vite.*

Informations de base :

$$\omega_0 = 24 \text{ rad/s} \quad \theta_0 = 0 \text{ rad} \quad \alpha = ?$$

$$\omega = 18 \text{ rad/s} \quad \theta = 10 \text{ tours} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{tour}} = 20\pi \text{ rad} \quad t = ?$$

a) Avec l'une des équations du RUA :

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) & \Rightarrow & (18)^2 = (24)^2 + 2\alpha((20\pi) - (0)) \\ & & \Rightarrow & 324 = 576 + 40\pi\alpha \\ & & \Rightarrow & 40\pi\alpha = -252 \\ & & \Rightarrow & \boxed{\alpha = -2,01 \text{ rad/s}^2} \end{aligned}$$

Informations de base :

$$\omega_0 = 18 \text{ rad/s} \quad \theta_0 = 0 \text{ rad} \quad \alpha = -2,01 \text{ rad/s}^2$$

$$\omega = 0 \text{ rad/s} \quad \theta = ? \quad t = ?$$

b) Avec l'une des équations du RUA :

$$\begin{aligned} \omega^2 &= \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) & \Rightarrow & (0)^2 = (18)^2 + 2(-2,01)(\theta - (0)) \\ & & \Rightarrow & -324 = -4,02 \theta \\ & & \Rightarrow & \boxed{\theta = 80,60 \text{ rad}} \end{aligned}$$

Puisque chaque tour représente  $2\pi$  :

$$N = 80,60 \text{ rad} \times \frac{1 \text{ tour}}{2\pi \text{ rad}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{N = 12,83 \text{ tours}}$$













# Chapitre 4.2 – Le moment de force et l'équilibre statique

## Équilibre statique

Un corps est en **équilibre statique** lorsqu'il est maintenu complètement immobile par l'ensemble des forces qui agissent sur lui.

Pour qu'un corps soit en équilibre statique, il faut :

- 1) Vitesse de translation nulle ( $\vec{v} = 0$ ).
- 2) Accélération de translation nulle ( $\vec{a} = 0$ ).
- 3) Vitesse angulaire nulle ( $\vec{\omega} = 0$ ).
- 4) Accélération angulaire nulle ( $\vec{\alpha} = 0$ ).



Le Golden Gate de San Francisco est en équilibre statique.

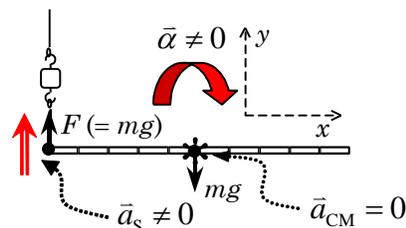
Pour maintenir un équilibre statique, nous pouvons affirmer que  $\vec{v} = 0$  et  $\vec{\omega} = 0$  sont satisfaites lorsque le corps est initialement immobile. Pour satisfaire  $\vec{a} = 0$ , il suffit d'appliquer la 1<sup>re</sup> loi de Newton ( $\sum \vec{F} = 0$ ) afin d'obtenir

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = 0 \quad .$$

Rappelons que pour appliquer la 1<sup>re</sup> loi de Newton, l'endroit où les forces sont appliquées n'a pas d'importance.

Pour satisfaire  $\vec{\alpha} = 0$ , les endroits où les forces sont appliquées sur le corps prendront de l'importance.

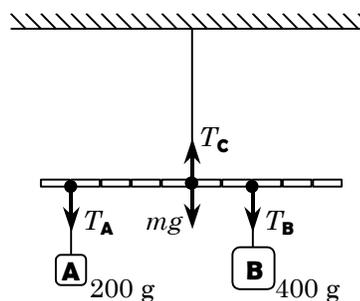
La situation ci-contre (voir schéma ci-contre) illustre qu'il est impossible de maintenir en équilibre une règle si l'on applique une force  $F$  à l'extrémité de celle-ci.



Dans cette exemple,  $\sum F_x = 0$  et  $\sum F_y = 0$ , mais la règle tourne autour de son centre de masse dans le sens horaire.

Pour avoir un équilibre statique, il faut appliquer des forces à des endroits très précis sur le corps.

La situation ci-contre (voir le schéma ci-contre) illustre une situation où l'équilibre statique ( $\vec{a} = 0$  et  $\vec{\alpha} = 0$ ) est satisfait.



Dans cette exemple,  $\sum F_x = 0$  et  $\sum F_y = 0$ , et la règle ne tourne pas.

## Briser l'équilibre statique

Pour mesurer l'efficacité d'une force à modifier l'état de rotation d'un corps autour d'un axe de rotation, nous allons faire intervenir le concept de **moment de force** :

$$\tau \equiv \text{moment de force}$$

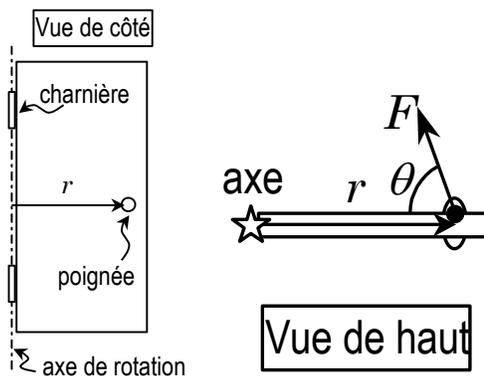
Le moment de force dépend de (1) l'endroit où la force est appliquée, (2) le module de la force et de (3) l'orientation de la force.



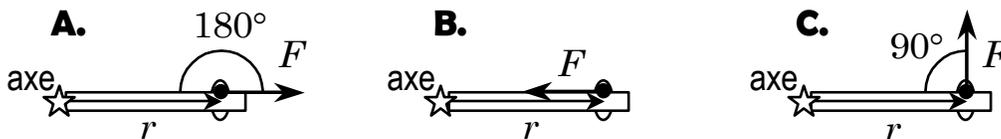
Le Golden Gate de San Francisco détruit dans le film *X-Men*.

### Question sur la disposition d'une porte :

- 1) Pourquoi mettre une poignée de porte à l'extrémité des charnières?
- 2) Pourquoi tirer la poignée perpendiculairement à la porte?



Nous pouvons tirer sur la poignée de trois façons différentes :



Nous avons ici trois mesures :

$F$  : Module de la force qui effectue le moment de force.

$r$  : Distance entre l'axe de rotation et le point d'application de la force.

$\theta$  : Angle entre  $r$  et  $F$ .

### Conclusion :

- 1) Plus la poignée est loin de la charnière, plus la force est efficace à ouvrir la porte :

$$\tau \propto r$$

- 2) Seule la situation C est efficace. Plus la force appliquée  $F$  est perpendiculaire à  $r$ , plus la force est efficace à ouvrir la porte :

$$\tau \propto \sin(\theta)$$

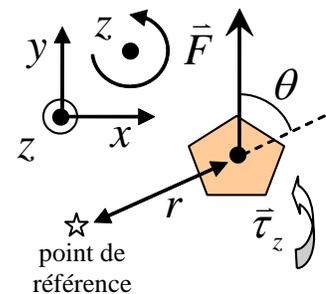
## Moment de force selon l'axe z

Le moment de force  $\tau_z$  mesure l'efficacité d'une force  $F$  à modifier l'état de rotation d'un corps dans le plan  $xy$  autour d'un point de référence. Le module du moment de force  $\tau_z$  est égal à la distance  $r$  dans le plan  $xy$  entre le point de référence et l'endroit où est appliquée la force  $F$  multiplié par le module de la force  $F$  projeté dans le plan  $xy$  et multiplié par le sinus de l'angle  $\theta$  entre  $r$  et  $F$  dans le plan  $xy$ .

Lorsque toutes les mesures sont définies dans le plan  $xy$ , le moment de force  $\tau_z$  est égal au produit de la distance  $r$  avec le module de la force  $F$  et le sinus de l'angle  $\theta$  entre  $r$  et  $F$  :

$$\tau_z = \pm r F \sin(\theta)$$

- où
- $\tau_z$  : Moment de force selon l'axe  $z$  (N · m)
  - $r$  : Distance dans le plan  $xy$  entre le point de référence et l'endroit où est appliquée la force (m)
  - $F$  : Force qui effectue le moment de force projetée dans le plan  $xy$  (N)
  - $\theta$  : Angle dans le plan  $xy$  entre  $r$  et  $F$
  - $\pm$  : Sens de la rotation selon l'axe  $z$  que produirait le moment de force sur le corps



Puisque l'expression  $\tau_z$  permet uniquement de mesurer l'efficacité d'une force  $\vec{F}$  à faire tourner un corps autour de l'axe  $z$ , il est important de mesurer  $r$  dans le plan  $xy$ . Cette mesure correspond également à la distance entre l'axe de rotation  $z$  passant par le point de référence et l'endroit où est appliquée la force  $\vec{F}$ . De plus, il faut également prendre uniquement la composante dans le plan  $xy$  de la force  $\vec{F}$  pour mesurer l'efficacité du moment de force à tourner autour de l'axe  $z$  :

Vue en perspective : $r = r_{\text{origine}} \sin(\alpha)$ $F = F_{\text{origine}} \cos(\beta)$	Vue de haut (plan $xy$ )	Vue de côté (plan $xz$ )

**N.B.** Puisque dans cette section, toutes les forces qui appliqueront un moment de force pertinent à la rédaction d'une solution sont uniquement appliquées dans le plan  $xy$ , la rigueur de la définition générale du moment de force selon l'axe  $z$  ne fera pas partie de notre étude.

## Force perpendiculaire et bras de levier

Puisque c'est uniquement les composants perpendiculaires entre  $r$  et  $F$  qui sont multipliés dans le calcul du moment de force, le moment de force peut être évalué par la projection perpendiculaire de la force  $F_{\perp}$  ou par le bras de levier  $r_{\perp}$  :

Force perpendiculaire : $F_{\perp} = F \sin(\theta)$		Bras de levier : $r_{\perp} = r \sin(\theta)$	
$\tau_z = \pm r F_{\perp}$		$\tau_z = \pm r_{\perp} F$	

## Les équations de l'équilibre statique

Pour satisfaire l'équilibre statique, il faut que :

- 1)  $\sum \vec{F} = 0$
- 2)  $\sum \tau_z = 0 \quad \forall$  point de référence (accepter sans preuve)

Pour résoudre un problème d'équilibre statique, il faut :

- 1) Identifier l'objet sur lequel les forces sont appliquées.
- 2) Identifier toutes les forces appliquées.
- 3) Identifier les positions où sont appliquées les forces.
- 4) Poser l'équation  $\sum \vec{F} = 0$ .
- 5) Poser l'équation  $\sum \tau_z = 0$  **pour un point** de référence en particulier. Au besoin, poser l'équation pour un autre point de référence s'il manque des équations pour résoudre le système.
- 6) Résoudre le système d'équation et répondre à la question.

## Choisir le point de référence en statique de rotation

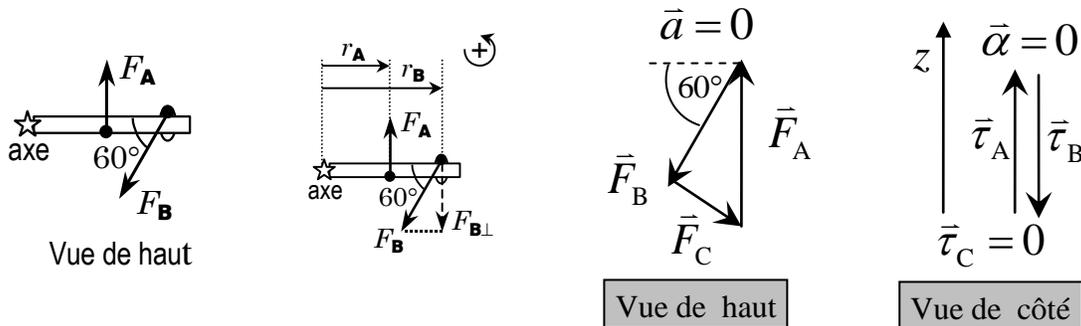
Pour résoudre un problème d'équilibre statique, le choix du point de référence n'a **pas d'importance**, car la deuxième loi de Newton en rotation se doit d'être égale à zéro ( $\sum \tau_z = 0$ ) pour tous les points de référence. Un choix astucieux permettra alors d'accélérer la rédaction d'une solution.

Pour sauver du calcul, identifiez les forces que vous ne pouvez pas évaluer directement grâce à la 2<sup>ème</sup> loi de Newton et choisissez le point de référence à l'endroit où ces forces sont appliquées. Les moments de force associés à ces forces seront égaux à zéro, car  $r = 0$  :

$$\text{Puisque } \tau_z = \pm r F \sin(\theta), \text{ alors } r = 0 \Rightarrow \tau_z = 0$$

**Situation 1 : Ouvrez la porte!** Béatrice essaie d'ouvrir la porte de la chambre d'Albert en poussant sur la poignée avec une force horizontale  $F_B = 30 \text{ N}$  faisant un angle de  $60^\circ$  avec le plan de la porte. De l'autre côté de la porte, Albert empêche la porte de bouger en poussant horizontalement en plein centre de la porte avec une force  $F_A$  perpendiculaire au plan de la porte. La porte mesure  $90 \text{ cm}$  de largeur et la poignée est à  $75 \text{ cm}$  des charnières. On désire calculer  $F_A$ .

Voici le schéma de la situation : (moment de force par rapport à la charnière)



Identifions l'objet en équilibre statique :

La porte

Identifions nos forces et l'endroit où ces forces sont appliquées :

- $\vec{F}_A$  : la force d'Albert à  $r_A = 0,45 \text{ m}$  de la charnière.
- $\vec{F}_B$  : la force de Béatrice à  $r_B = 0,75 \text{ m}$  de la charnière.
- $\vec{F}_C$  : la force de la charnière à  $r_C = 0 \text{ m}$  de la charnière.

Appliquons la 2<sup>e</sup> loi de Newton à la situation :

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{F}_C = 0$$

Selon l'axe  $x$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow -F_B \cos(60^\circ) + F_{x,C} = 0 \\ &\Rightarrow -(30)\cos(60^\circ) + F_{x,C} = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{F_{x,C} = 15 \text{ N}} \end{aligned}$$

Selon l'axe  $y$ , nous avons :

$$\begin{aligned} \sum F_y = 0 &\Rightarrow -F_B \sin(60^\circ) + F_A + F_{y,C} = 0 \\ &\Rightarrow -(30)\sin(60^\circ) + F_A + F_{y,C} = 0 \\ &\Rightarrow \boxed{F_A + F_{y,C} = 25,98 \text{ N}} \end{aligned}$$

Évaluons nos moments de force selon l'axe  $z$  : (positif dans le sens anti-horaire)

$$\tau_A = \pm r_A F_A \sin(\theta_A) \Rightarrow \tau_A = +(0,45)F_A \sin(90^\circ)$$

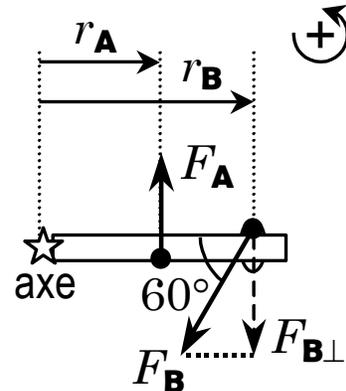
$$\Rightarrow \tau_A = 0,45F_A$$

$$\tau_B = \pm r_B F_B \sin(\theta_B) \Rightarrow \tau_B = -(0,75)(30)\sin(180^\circ - 60^\circ)$$

$$\Rightarrow \tau_B = -19,49 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$\tau_C = \pm r_C F_C \sin(\theta_C) \Rightarrow \tau_C = \pm(0)F_C \sin(\theta_C)$$

$$\Rightarrow \tau_C = 0 \text{ N}\cdot\text{m}$$



Évaluons la somme des moments de force ( $\sum \tau_z$ ) afin de satisfaire l'équilibre statique :

$$\sum \tau_z = 0 \Rightarrow \tau_A + \tau_B + \tau_C = 0$$

$$\Rightarrow (0,45F_A) + (-19,49) + (0) = 0$$

$$\Rightarrow 0,45F_A = 19,49$$

$$\Rightarrow F_A = 43,3 \text{ N}$$

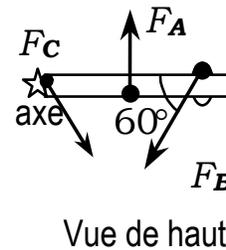
On peut même maintenant évaluer la force exercée par les charnières sur la porte :

En  $x$  :  $F_{xC} = 15 \text{ N}$

En  $y$  :  $F_A + F_{yC} = 25,98 \Rightarrow F_{yC} = 25,98 - F_A$

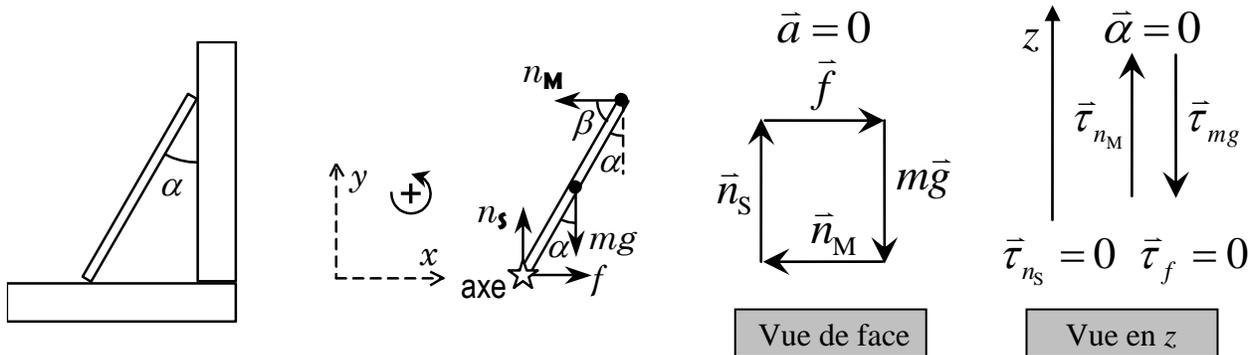
$$\Rightarrow F_{yC} = 25,98 - (43,3)$$

$$\Rightarrow F_{yC} = -17,32 \text{ N}$$



**Situation 5 : Une règle appuyée contre un mur.** Une règle de longueur  $L$  et de masse  $m$  est appuyée contre un mur. Le frottement entre le mur et la règle est négligeable; en revanche, il y a un coefficient de frottement statique  $\mu_s$  entre le sol et la règle. On désire déterminer l'angle  $\alpha$  maximal que peut faire la règle par rapport à la verticale pour demeurer en équilibre.

Voici le schéma de la situation : (moment de force par rapport au contact au sol)



Identifions l'objet en équilibre statique :

La règle

Identifions nos forces et l'endroit où ces forces sont appliquées :

- $\vec{n}_s$  : Normale au sol à  $r_{n_s} = 0$  du point de contact au sol.
- $\vec{f}$  : Frottement statique au sol à  $r_f = 0$  du point de contact au sol.
- $m\vec{g}$  : Poids à  $r_{mg} = L/2$  du point de contact au sol.
- $\vec{n}_M$  : Normale au mur à  $r_{n_M} = L$  du point de contact au sol.

Appliquons la 2<sup>ème</sup> loi de Newton à la situation :

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}_s + \vec{f} + m\vec{g} + \vec{n}_M = 0$$

En x : ( $f = \mu_s n_s$ , frottement statique max.) En y :

$$\begin{aligned} \sum F_x = 0 &\Rightarrow f - n_M = 0 & \sum F_y = 0 &\Rightarrow n_s - mg = 0 \\ &\Rightarrow (\mu_s n_s) - n_M = 0 & &\Rightarrow \boxed{n_s = mg} \\ &\Rightarrow \boxed{\mu_s n_s = n_M} \end{aligned}$$

Nous pouvons remplacer la normale  $n_s$  dans l'équation en x et obtenir la relation suivante :

$$\begin{aligned} \mu_s n_s = n_M &\Rightarrow \mu_s (mg) = n_M \\ &\Rightarrow \boxed{n_M = \mu_s mg} \end{aligned}$$

Évaluons nos moments de force selon l'axe  $z$  : (positif dans le sens anti-horaire)

$$\tau_{n_s} = \pm r_{n_s} n_s \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \tau_{n_s} = \pm(0)n_s \sin \theta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tau_{n_s} = 0}$$

$$\tau_f = \pm r_f f \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \tau_f = \pm(0)f \sin \theta$$

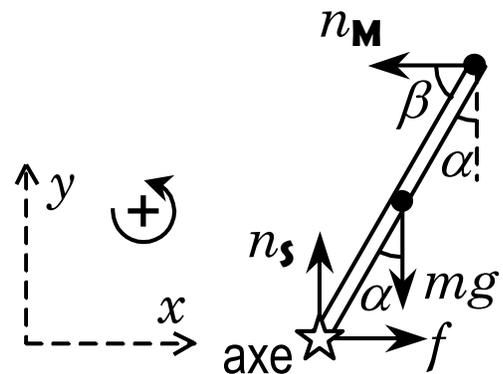
$$\Rightarrow \quad \boxed{\tau_f = 0}$$

$$\tau_{mg} = \pm r_{mg} mg \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \tau_{mg} = -(L/2)mg \sin(180 - \alpha)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tau_{mg} = -\frac{1}{2} mgL \sin(\alpha)}$$

$$\tau_{n_M} = \pm r_{n_M} n_M \sin \theta \quad \Rightarrow \quad \tau_{n_M} = +(L)(\mu_s mg) \sin(180 - \beta)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tau_{n_M} = \mu_s mgL \sin(\beta)}$$



Évaluons la somme des moments de force ( $\sum \tau_z$ ) afin de satisfaire l'équilibre statique :

$$\sum \tau_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{n_s} + \tau_f + \tau_{mg} + \tau_{n_M} = 0$$

$$\Rightarrow \quad (0) + (0) + \left(-\frac{1}{2} mgL \sin(\alpha)\right) + \left(\mu_s mgL \sin(\beta)\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} mgL \sin(\alpha) = \mu_s mgL \sin(\beta)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \sin(\alpha) = \mu_s \sin(\beta) \quad (\text{Simplifier par } mgL)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \sin(\alpha) = \mu_s \sin(90^\circ - \alpha) \quad (\text{Remplacer } \beta = 90^\circ - \alpha)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \sin(\alpha) = \mu_s \cos(\alpha) \quad (\sin(90^\circ - \alpha) = \cos(\alpha))$$

$$\Rightarrow \quad \tan(\alpha) = 2\mu_s$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha = \tan^{-1}(2\mu_s)}$$

**Conclusion :** L'angle dépend seulement du coefficient de frottement statique.

## Le produit vectoriel

En algèbre vectorielle euclidienne dans un plan cartésien  $xyz$  en trois dimensions, on définit le produit vectoriel de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= \|\vec{A}\| \|\vec{B}\| \sin(\theta) \hat{n} \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} - (A_x B_z - A_z B_x) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}\end{aligned}$$

où  $\vec{A} \times \vec{B}$  : Produit vectoriel entre  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ .

$|\vec{A}|$  : Module du vecteur  $\vec{A}$

$|\vec{B}|$  : Module du vecteur  $\vec{B}$

$\theta$  : Angle entre les vecteurs  $\vec{A}$  et  $\vec{B}$ .

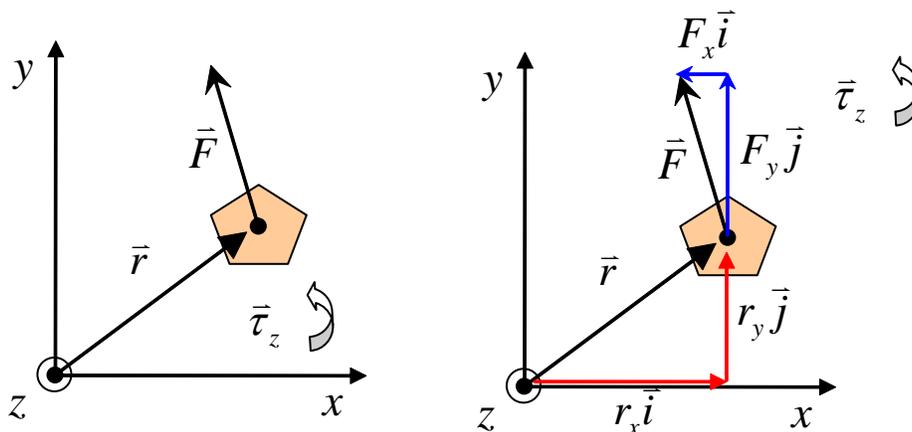
$\hat{n}$  : Vecteur unitaire orientation

et  $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$

$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$

## Le moment de force selon l'axe $z$ en calcul vectoriel (complément informatique)

En construction ...



Le moment de force

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (r_y F_z - r_z F_y) \vec{i} - (r_x F_z - r_z F_x) \vec{j} + (r_x F_y - r_y F_x) \vec{k}$$

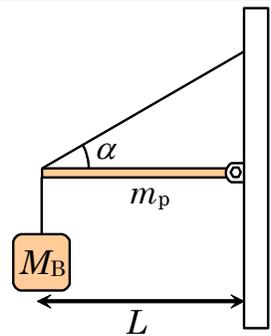
Le moment de force selon l'axe  $z$

$$\tau_z = r_x F_y - r_y F_x$$

## Exercices

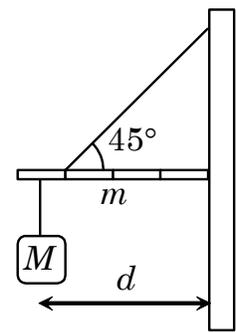
**4.2.4** Une poutre retenue par une charnière. L'extrémité droite d'une poutre horizontale de masse  $m_p$  et de longueur  $L$  est fixée à un mur par une charnière (schéma ci-contre). L'extrémité gauche est retenue par une corde faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontale. À l'extrémité gauche, on suspend un bloc de masse  $M_B$ .

Déterminez (a) le module de la tension dans la corde inclinée (expression algébrique); (b) Si  $L = 2$  m,  $m_p = 5$  kg,  $M_B = 10$  kg et  $\alpha = 30^\circ$ , déterminez le module et l'orientation de la force exercée par la charnière sur la poutre.



**4.2.10** Une poutre appuyée contre un mur sans frottement, prise 2. L'extrémité droite d'une poutre horizontale de 10 kg dont la longueur vaut 4 m est appuyée contre un mur sans frottement : il n'y a pas de charnière (schéma ci-contre). Une corde faisant un angle de  $45^\circ$  avec la verticale soutient la poutre : son point d'attache sur la poutre est à 3 m du mur.

(a) À quelle distance  $d$  du mur doit-on accrocher un bloc de masse  $M = 20$  kg pour que la poutre demeure en équilibre? (b) Si on accroche un bloc de masse  $M$  à l'extrémité gauche de la poutre (à 4 m du mur), pour quelle valeur de  $M$  la poutre demeure-t-elle en équilibre?



## Solutions

### 4.2.4 Une poutre retenue par une charnière.

- a) Objet considéré :  $m$  (la tige)  
 Forces appliquées :  $M\vec{g}$  (par la corde),  $m\vec{g}$ ,  $\vec{T}$ ,  $\vec{F}$  (Charnière)  
 Position de référence : La charnière

$$1) \quad \sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad M\vec{g} + m\vec{g} + \vec{T} + \vec{F} = 0$$

Selon  $x$  :

$$T \cos(\alpha) + F_x = 0 \quad (1)$$

Selon  $y$  :

$$-Mg - mg + T \sin(\alpha) + F_y = 0 \quad (2)$$

$$2) \quad \sum \vec{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{\tau}_M + \vec{\tau}_m + \vec{\tau}_T + \vec{\tau}_F = 0$$

Selon  $z$  : (positif sens horaire)

$$\bullet \quad \tau_M = -r_M Mg \sin(90^\circ) = -(L)Mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_M = -MgL}$$

$$\bullet \quad \tau_m = -r_m mg \sin(90^\circ) = -(L/2)mg \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_m = -\frac{mgL}{2}}$$

$$\bullet \quad \tau_T = +r_T T \sin(180 - \alpha) = (L)T \sin(\alpha) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_T = TL \sin(\alpha)}$$

$$\bullet \quad \tau_F = \pm r_F F \sin(\theta) = \pm(0)F \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_F = 0}$$

$$\sum \tau = -MgL - \frac{mgL}{2} + TL \sin(\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad -Mg - \frac{mg}{2} + T \sin(\alpha) = 0 \quad (\text{simplifier } L)$$

$$\Rightarrow \quad T \sin(\alpha) = +Mg + \frac{mg}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T = \left(M + \frac{m}{2}\right) \frac{g}{\sin(\alpha)}} \quad (3)$$

- b) Évaluons notre tension avec les données mentionnées :

$$T = \left(M + \frac{m}{2}\right) \frac{g}{\sin(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad T = \left((10) + \frac{(5)}{2}\right) \frac{(9,8)}{\sin(30^\circ)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T = 245 \text{ N}}$$

Avec l'équation (1), on peut évaluer la force de la charnière selon  $x$  :

$$\begin{aligned}T \cos(\alpha) + F_x &= 0 &\Rightarrow F_x &= -T \cos(\alpha) \\&&\Rightarrow F_x &= -(245)\cos(30^\circ) \\&&\Rightarrow \boxed{F_x = -212,2 \text{ N}} && \text{(force vers la gauche)}\end{aligned}$$

Avec l'équation (2), on peut évaluer la force de la charnière selon  $y$  :

$$\begin{aligned}-Mg - mg + T \sin(\alpha) + F_y &= 0 &\Rightarrow F_y &= Mg + mg - T \sin(\alpha) \\&&\Rightarrow F_y &= (M + m)g - T \sin(\alpha) \\&&\Rightarrow F_y &= [(10) + (5)](9,8) - (245)\sin(30^\circ) \\&&\Rightarrow \boxed{F_y = 24,5 \text{ N}} && \text{(force vers le haut)}\end{aligned}$$

Nous pouvons évaluer le module de la force appliquée par la charnière et son orientation :

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{(-212,2)^2 + (24,5)^2} \Rightarrow \boxed{F = 213,6 \text{ N}} \quad \text{(réponse)}$$

$$\tan(\theta) = \frac{F_y}{F_x} = \frac{(24,5)}{(212,2)} \Rightarrow \boxed{\theta = 6,58^\circ}$$

(vers le haut par rapport à la gauche)

**4.2.10** Une poutre appuyée contre un mur sans frottement, prise 2.

- a) Objet considéré :  $m$  (la tige)  
Forces appliquées :  $M\vec{g}$ ,  $m\vec{g}$ ,  $\vec{T}$ ,  $\vec{n}$  (le mur)  
Position de référence : endroit où la tension est appliquée

$$\sum \bar{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{\tau}_M + \bar{\tau}_m + \bar{\tau}_T + \bar{\tau}_n = 0$$

Selon  $z$  : (positif sens anti-horaire)

- $\tau_M = +r_M Mg \sin(90^\circ) = (x)Mg = Mgx$
- $\tau_T = \pm r_T T \sin(\theta) = \pm(0)T \sin(\theta) = 0$
- $\tau_m = +r_m mg \sin(90^\circ) = (L/4)mg = \frac{mgL}{4}$
- $\tau_n = \pm r_n n \sin(180^\circ) = \pm\left(\frac{3L}{4}\right)n(0) = 0$

Ainsi :

$$\begin{aligned} \sum \tau = Mgx - \frac{mgL}{4} = 0 & \quad \Rightarrow \quad Mgx = \frac{mgL}{4} \\ & \quad \Rightarrow \quad Mx = \frac{mL}{4} \\ & \quad \Rightarrow \quad x = \frac{mL}{4M} = \frac{(10)(4)}{4(20)} \quad \Rightarrow \quad x = 0,5 \text{ m} \end{aligned}$$

Nous avons pour mesure :  $d = \frac{3L}{4} + x = \frac{3(4)}{4} + (0,5) \quad \Rightarrow \quad d = 3,5 \text{ m}$

- b) Si l'on accroche la masse  $M$  à l'extrémité, nous avons cette équation à satisfaire pour avoir l'équilibre statique :

$$\sum \tau = Mg \frac{L}{4} - mg \frac{L}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad M = m = 10 \text{ kg}$$







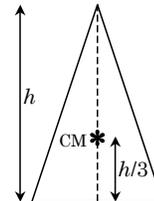
# Chapitre 4.3 – Le centre de masse

## La définition du centre de masse

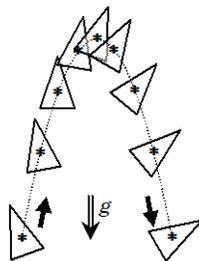
Le **centre de masse** CM d'un corps est un **point de référence imaginaire** situé à la **position moyenne** de la **masse** du corps.

Voici quelques caractéristiques du centre de masse :

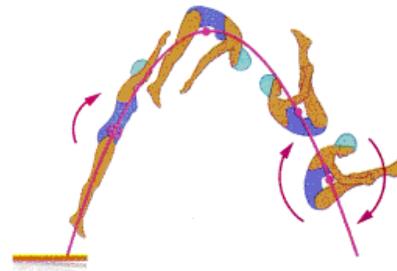
- Cette position n'est pas toujours au centre du corps.
- Le **centre de masse** d'un **corps homogène** (masse volumique constante) qui possède un **haut niveau de symétrie** est situé au **centre géométrique du corps** (ex : sphère, cube, tige)
- Le centre de masse n'est pas nécessairement situé sur le corps lui-même (ex : Boomerang).
- Lorsqu'un corps effectue un **mouvement libre** (aucun axe de rotation imposé<sup>1</sup> sur le corps), alors le **centre de masse** du corps effectue un **mouvement de translation** tandis que les **autres points** du corps effectuent une **rotation autour du centre de masse**.



Exemple : Translation du centre de masse et rotation autour du centre de masse



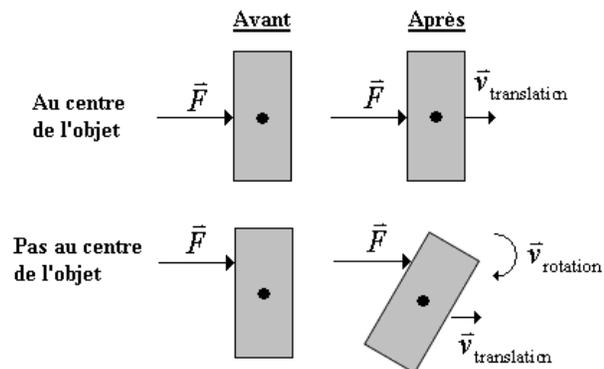
Un triangle homogène lancé dans la gravité.



Un plongeur effectue un saut avec de la rotation.

## Le positionnement expérimental du centre de masse

Pour évaluer la position du centre de masse expérimentalement d'un corps, il suffit de pousser sur le corps à trois endroits différents et dans trois directions différentes sans que celui-ci n'effectue de rotation. L'intersection des trois droites formées à l'aide des points d'application des forces et l'orientation des forces localise le centre de masse.



<sup>1</sup> Exemple de corps ayant un axe de rotation imposé : porte et charnière.

## Densité de masse

La densité de masse est une mesure de masse moyenne par unité de longueur  $L$ , de surface  $A$  ou de volume  $V$ . À partir d'une géométrie particulière, on peut évaluer la masse totale  $m$  d'un objet grâce aux équations suivantes :

	<u>Densité de masse</u>	<u>Équation</u>
Densité linéaire de masse :	$[\mu] = \text{kg} / \text{m}$	$m = \mu L$
Densité surfacique de masse :	$[\sigma] = \text{kg} / \text{m}^2$	$m = \sigma A$
Densité volumique de masse :	$[\rho] = \text{kg} / \text{m}^3$	$m = \rho V$

où  $m$  : Masse du corps homogène (kg)  
 $L$  : Longueur du corps (m)  
 $A$  : Surface (aire) du corps ( $\text{m}^2$ )  
 $V$  : Volume du corps ( $\text{m}^3$ )

## La position moyenne

Pour évaluer la position du centre de masse, il faut évaluer la moyenne des positions des masses en utilisant la masse comme facteur de pondération. Plus il y a de masse à un endroit, plus le centre de masse sera près de cet endroit.

Exemple :  $M_1 = 10 \text{ kg}$  est située à la position  $x_1 = 5 \text{ m}$   
 $M_2 = 5 \text{ kg}$  est située à la position  $x_2 = 2 \text{ m}$

Le centre de masse associé à la masse totale  $M = M_1 + M_2$  sera plus près de  $x = 5 \text{ m}$ , car la masse de  $M_1$  est plus importante que la masse de  $M_2$ .

Afin de déterminer comment on peut évaluer une position pondérée par une masse, nous allons faire une analogie avec le calcul d'une moyenne générale dans un cours de physique.

**Situation 1 : La moyenne pondérée de deux examens.** Dans son cours de physique, Albert a obtenu la note de 80% au premier examen, qui vaut pour 15 points ; il a obtenu la note de 88% au deuxième examen, qui vaut 25 points. On désire déterminer sa moyenne pour le cours.

Nous avons :  $P_1 = 15$  et  $N_1 = 80\%$  puis  $P_2 = 25$  et  $N_2 = 88\%$

Ce qui nous donne la moyenne suivante :

$$\bar{N} = \frac{P_1 N_1 + P_2 N_2}{P_1 + P_2} \Rightarrow \bar{N} = \frac{(15)(80\%) + (25)(88\%)}{(15) + (25)} \Rightarrow \boxed{\bar{N} = 85\%}$$

## La position du centre de masse

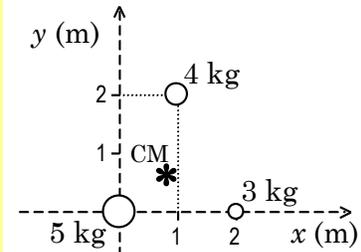
Le centre de masse d'un corps est une position moyenne pondérée par la masse du corps et se calcule de la façon suivante :

Centre de masse en x	Centre de masse en y	Masse totale
$x_{\text{CM}} = \frac{1}{m_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^N m_i x_i$	$y_{\text{CM}} = \frac{1}{m_{\text{tot}}} \sum_{i=1}^N m_i y_i$	$m_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^N m_i$

- où
- $x_{\text{CM}}$  : Position du centre de masse selon l'axe  $x$  (m)
  - $y_{\text{CM}}$  : Position du centre de masse selon l'axe  $y$  (m)
  - $m_i$  : La masse de l'objet  $i$  (kg)
  - $x_i$  : La position selon l'axe  $x$  de l'objet  $i$  (m)
  - $y_i$  : La position selon l'axe  $y$  de l'objet  $i$  (m)
  - $N$  : Le nombre d'objet à considérer dans le calcul. ( $i \in 1..N$ )
  - $m_{\text{tot}}$  : La masse totale de tous les objets (kg)

Remarque :  $x_i$  et  $y_i$  peuvent être également la position du centre de masse d'un corps complexe. Pour évaluer le centre de masse d'un **ensemble d'objets**, il est utile de **calculer le centre de masse de chaque objet individuellement** et de calculer à nouveau le centre de masse du système.

**Situation 3 : Le centre de masse d'un système de 3 particules.** Une particule de 5 kg est située à l'origine d'un système d'axe de coordonnées  $xy$ . Une particule de 4 kg est située à la position  $(x; y) = (1 \text{ m} ; 2 \text{ m})$  et une particule de 3 kg est située à la position  $(x; y) = (2 \text{ m} ; 0)$ . On désire déterminer les coordonnées du centre de masse du système composé des 3 particules.



La masse du système :

$$m_{\text{tot}} = \sum_{i=1}^3 m_i = (5) + (4) + (3) = 12 \text{ kg}$$

Le CM selon  $x$  :

$$x_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i x_i}{m_{\text{tot}}} = \frac{(5)(0) + (4)(1) + (3)(2)}{(12)} = 0,8 \text{ m}$$

Le CM selon  $y$  :

$$y_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^3 m_i y_i}{m_{\text{tot}}} = \frac{(5)(0) + (4)(2) + (3)(0)}{(12)} = 0,667 \text{ m}$$

**Situation 4 : Le centre de masse d'une tige pliée en forme de triangle.**

Un fil de métal homogène et de section uniforme est plié afin de former un triangle représenté ci-contre. On désire déterminer les coordonnées du centre de masse du triangle.

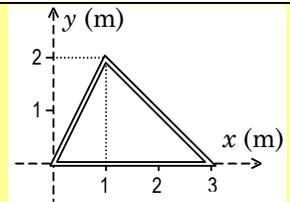
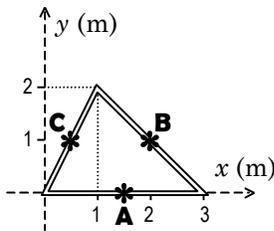
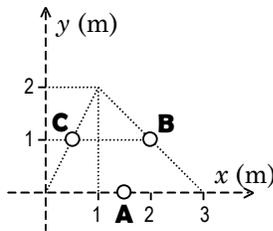


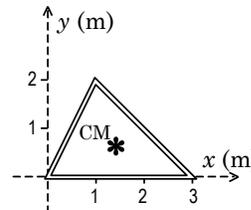
Schéma :



CM des tiges



Masses ponctuelles



Position CM finale

Pour trouver le centre de masse du triangle, nous pouvons découper ce triangle en trois tiges. Nous allons évaluer le centre de masse de chaque tige et les considérer comme des masses ponctuelles. Puisque les tiges sont homogènes, le centre de masse de chaque tige sera au centre géométrique de la tige :

Tige A :  $L_A = 3 \text{ m}$   $x_{ACM} = 1,5 \text{ m}$

$m_A = \mu L_A = 3\mu$   $y_{ACM} = 0 \text{ m}$

Tige B :  $L_B = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2,83 \text{ m}$   $x_{BCM} = 2 \text{ m}$

$m_B = \mu L_B = 2,83\mu$   $y_{BCM} = 1 \text{ m}$

Tige C :  $L_C = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} = 2,24 \text{ m}$   $x_{CCM} = 0,5 \text{ m}$

$m_C = \mu L_C = 2,24\mu$   $y_{CCM} = 1 \text{ m}$

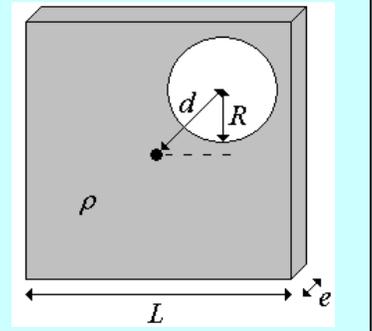
Nous pouvons évaluer le CM :

$$m_{\text{tot}} = \sum_{i=A,B,C} m_i = (3\mu) + (2,83\mu) + (2,24\mu) \Rightarrow m_{\text{tot}} = 8,07\mu$$

$$x_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=A,B,C} m_i x_i}{m_{\text{tot}}} = \frac{(3\mu)(1,5) + (2,83\mu)(2) + (2,24\mu)(0,5)}{(8,07\mu)} = \frac{11,3\mu}{8,07\mu} \Rightarrow x_{\text{CM}} = 1,4 \text{ m}$$

$$y_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=A,B,C} m_i y_i}{m_{\text{tot}}} = \frac{(3\mu)(0) + (2,83\mu)(1) + (2,24\mu)(1)}{(8,07\mu)} = \frac{5,07\mu}{8,07\mu} \Rightarrow y_{\text{CM}} = 0,628 \text{ m}$$

**Situation A : La plaque d'aluminium trouée.** Une plaque carrée en aluminium (masse volumique  $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$ ) est percée d'un cylindre de rayon  $R = 0,6 \text{ m}$  à une distance  $d$  égale à  $1 \text{ m}$  du centre de la plaque à  $45^\circ$  par rapport à l'horizontale (voir schéma ci-contre). Évaluez le centre de masse ( $x_{CM}$  et  $y_{CM}$ ) de la plaque par rapport au coin inférieur gauche de la plaque si celle-ci possède une largeur  $L$  égale à  $4 \text{ m}$  et une épaisseur  $e$  égale à  $0,1 \text{ m}$ .



Pour résoudre ce problème, on peut considérer la **masse d'un trou** comme étant une **masse négative**.

Plaque sans trou : (masse **positive**)

- $m_{\text{plaque sans trou}} = \rho L L e = \rho L^2 e = (2700)(4)^2(0,1) \Rightarrow m_{\text{plaque sans trou}} = 4320 \text{ kg}$
- $x_{\text{plaque sans trou CM}} = L/2 = (4)/2 \Rightarrow x_{\text{plaque sans trou CM}} = 2 \text{ m}$
- $y_{\text{plaque sans trou CM}} = L/2 = (4)/2 \Rightarrow y_{\text{plaque sans trou CM}} = 2 \text{ m}$

Le trou de la plaque : (masse **négative**)

- $m_{\text{trou}} = -\rho \pi R^2 e = -(2700)\pi(0,6)^2(0,1) \Rightarrow m_{\text{trou}} = -305,4 \text{ kg}$
- $x_{\text{trou CM}} = L/2 + d \cos(45^\circ) = (4)/2 + (1)\cos 45^\circ \Rightarrow x_{\text{trou CM}} = 2,71 \text{ m}$
- $y_{\text{trou CM}} = L/2 + d \sin(45^\circ) = (4)/2 + (1)\sin 45^\circ \Rightarrow y_{\text{trou CM}} = 2,71 \text{ m}$

La plaque avec trou :

- $m_{\text{tot}} = m_{\text{plaque sans trou}} + m_{\text{trou}} = (4320) + (-305,4) \Rightarrow m_{\text{tot}} = 4014,6 \text{ kg}$
- $x_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{m_{\text{tot}}} = \frac{(4320)(2) + (-305,4)(2,71)}{(4014,6)} \Rightarrow x_{\text{CM}} = 1,946 \text{ m}$
- $y_{\text{CM}} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i y_i}{m_{\text{tot}}} = \frac{(4320)(2) + (-305,4)(2,71)}{(4014,6)} \Rightarrow y_{\text{CM}} = 1,946 \text{ m}$

## La stabilité et polygone de sustentation

Pour être en **équilibre statique**, il faut satisfaire  $\sum \vec{F} = 0$  et  $\sum \tau_z = 0$ . Lorsqu'un corps repose sur une surface, ces deux conditions sont satisfaites lorsque le **centre de masse** du corps est situé au-dessus du **polygone de sustentation**.

Le polygone de sustentation se construit en reliant tous les points du corps en contact avec la surface par un segment de droite.

Plus le polygone de sustentation est grand, plus il est facile de maintenir l'équilibre.



Élisabeth est en équilibre sur un petit polygone de sustentation.



Élisabeth augmente son polygone de sustentation à l'aide de son trotteur.

Voici un exemple de stabilité et d'instabilité :

Stable (PS exagéré)	Instable (PS exagéré)
<p>Pour demeurer en équilibre, la gymnaste doit positionner son centre de masse au-dessus de sa main afin que les moments de force associés à <math>mg</math> et <math>n</math> puissent s'annuler.</p>	<p>Pour retrouver l'équilibre, le coureur devra déposer sa jambe droite pour agrandir son polygone de sustentation afin que son centre de masse soit au-dessus du polygone.</p>

## Le centre de masse par intégration

À partir de l'intégrale, nous pouvons évaluer la position du centre de masse  $x_{CM}$  et  $y_{CM}$  d'un corps à partir des expressions suivantes :

$$x_{CM} = \frac{1}{m_{tot}} \int x dm \quad \text{et} \quad y_{CM} = \frac{1}{m_{tot}} \int y dm$$

### Situation B : Un bâton de bois.

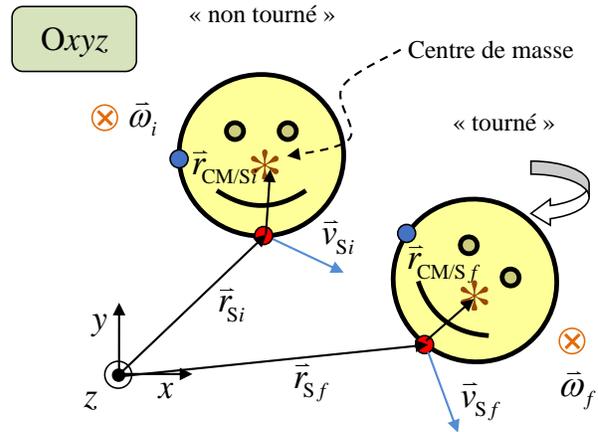
En construction ...



<http://www.flickriver.com/groups/scienceofbaseball/pool/random/>

# La position et la vitesse du centre de masse d'un corps rigide à partir d'un point de référence S

Le positionnement d'un corps rigide se caractérise par la position de deux points : une position de référence  $\vec{r}_S$  et la position du centre de masse  $\vec{r}_{CM} = (r_{xCM}, r_{yCM}, r_{zCM})$ . L'objectif sera de décrire l'évolution dans le temps de la position de référence  $\vec{r}_S$  et de décrire la rotation autour de ce point par une vitesse angulaire  $\vec{\omega}$ .



La position du centre de masse à partir de la position de ses particules	La position du centre de masse à partir de la position du corps rigide	La vitesse du centre de masse à partir de la vitesse de ses particules	La vitesse du centre de masse à partir de la vitesse du corps rigide
$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^N m_p \vec{r}_p$	$\vec{r}_{CM} = \vec{r}_S + \vec{r}_{CM/S}$	$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^N m_p \vec{v}_p$	$\vec{v}_{CM} = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times r_{CM/S}$

Preuve :

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_{CM/S} = \vec{r}_{CM} - \vec{r}_S &\Rightarrow \vec{r}_{CM/S} = \left( \frac{1}{m} \sum_{p=1}^N m_p \vec{r}_p \right) - \vec{r}_S \\
 &\Rightarrow \vec{r}_{CM/S} = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^N m_p \vec{r}_p - \frac{1}{m} m \vec{r}_S \\
 &\Rightarrow \vec{r}_{CM/S} = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^N m_p \vec{r}_p - \frac{1}{m} \left( \sum_{p=1}^N m_p \right) \vec{r}_S \\
 &\Rightarrow \vec{r}_{CM/S} = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^N m_p \vec{r}_p - \frac{1}{m} \sum_{p=1}^N m_p \vec{r}_S \\
 &\Rightarrow \vec{r}_{CM/S} = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^N m_p (\vec{r}_p - \vec{r}_S) \\
 &\Rightarrow \vec{r}_{CM/S} = \frac{1}{m} \sum_{p=1}^N m_p \vec{r}_{p/S} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$



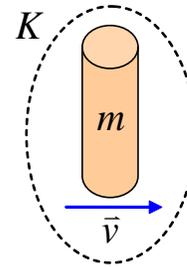
# Chapitre 4.4 – Le moment d’inertie et l’énergie cinétique de rotation

## L’énergie cinétique en rotation

L’énergie cinétique  $K$  est par définition l’énergie associée au mouvement d’un corps. Lorsque celui-ci effectue une translation, l’énergie cinétique dépend de l’inertie de translation qui est la masse  $m$  et du module de la vitesse  $v$  au carré :

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

- où  $K$  : Énergie cinétique de translation (J)  
 $m$  : Masse de l’objet (inertie de translation) (kg)  
 $v$  : Vitesse de l’objet (m/s)

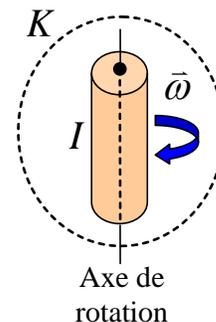


Lorsqu’un **corps** effectue une **rotation** à vitesse  $\omega$  autour d’un axe, le corps est en mouvement et possède une **énergie cinétique**. Puisque l’ensemble du corps se déplace avec une vitesse angulaire commune  $\omega$ , on peut définir une énergie à partir de cette vitesse. **L’inertie de rotation  $I$**  pour cette expression d’énergie n’est pas uniquement la masse  $m$  car l’énergie possède comme unité le joule ( $J = N \cdot m = kg \cdot m^2/s^2$ ).

Afin de préserver la forme de l’expression de l’énergie cinétique, voici l’expression de l’énergie cinétique en rotation qui respecte l’unité du joule :

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

- où  $K$  : Énergie cinétique de l’objet en rotation (J)  
 $I$  : Inertie de l’objet en rotation autour d’un axe ( $kg \cdot m^2$ )  
 $\omega$  : Vitesse angulaire (rad/s)



### Validation des unités :

Évaluons les unités de l’inertie de rotation à partir de la définition de l’énergie cinétique de rotation :

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow [K] = \left[ \frac{1}{2}I\omega^2 \right] \quad (\text{Évaluer les unités})$$

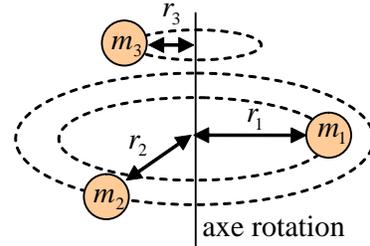
$$\Rightarrow \frac{kg \cdot m^2}{s^2} = [I] \frac{1}{s^2} \quad ([K] = \frac{kg \cdot m}{s^2} \text{ et } [\omega] = \frac{rad}{s} = \frac{1}{s})$$

$$\Rightarrow [I] = kg \cdot m^2 \quad \blacksquare \quad (\text{Simplifier})$$

## L'inertie en rotation

En rotation, l'inertie d'un corps dépend de sa masse, de sa forme et de sa position par rapport à l'axe de rotation du corps. Lorsque le corps peut être décomposé en  $N$  masses ponctuelles  $m_i$ , l'inertie totale du corps sera égale à l'addition de toutes les inerties associées à chaque masse ponctuelle :

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2$$



où  $I$  : Inertie totale du système de masse ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )

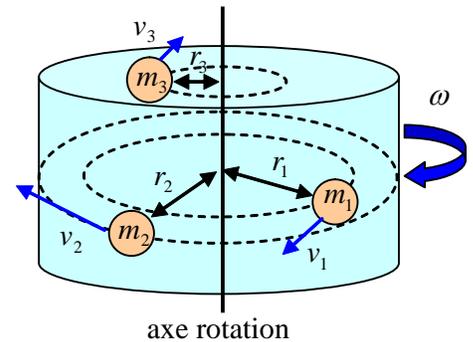
$m_i$  : Masse ponctuelle  $i$  (kg)

$r_i$  : Rayon de la trajectoire circulaire de la masse ponctuelle  $i$  (m)

$N$  : Nombre de masses ponctuelles dans le calcul du moment d'inertie

### Preuve :

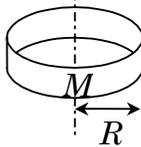
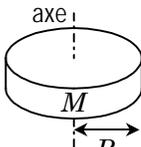
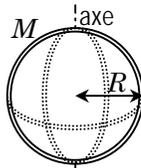
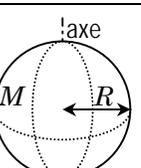
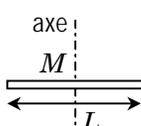
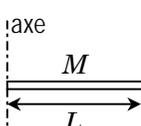
Considérons un corps rigide de masse totale  $m$  constitué de  $N$  éléments de masse  $m_i$  effectuant une rotation autour d'un axe de rotation à une vitesse angulaire  $\omega$ . Il est important de préciser que l'ensemble du corps tourne à une vitesse  $\omega$ , mais que chaque élément  $m_i$  se déplace à une vitesse  $v_i$  et à une distance  $r_i$  de l'axe de rotation. Évaluons l'inertie totale du corps à partir de la définition de l'énergie cinétique :



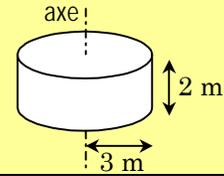
$$\begin{aligned}
 K &= \sum_{i=1}^N K_i &\Rightarrow & K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 && \text{(Remplacer } K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2 \text{)} \\
 &&\Rightarrow & K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (r_i \omega_i)^2 && \text{(Remplacer } v_i = r_i \omega_i \text{)} \\
 &&\Rightarrow & K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega_i^2 && \text{(Simplifier)} \\
 &&\Rightarrow & K = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i r_i^2 \omega^2 && \text{(Vitesse angulaire commune, } \omega_i = \omega \text{)} \\
 &&\Rightarrow & K = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^N m_i r_i^2 && \text{(Factoriser les constantes dans la sommation)} \\
 &&\Rightarrow & K = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{i=1}^N I_i && \text{(Inertie d'une particule ponctuelle, } I_i = m_i r_i^2 \text{)} \\
 &&\Rightarrow & K = \frac{1}{2} I \omega^2 && \text{(Remplacer } I = \sum_{i=1}^N I_i \text{)} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

## Moment d'inertie de différentes géométries

Voici un tableau de différentes géométries où le moment d'inertie a été calculé en fonction de la masse de l'objet, de sa forme et de sa position par rapport à l'axe de rotation. Les détails des calculs se trouvent dans le *chapitre 4.5 : Le moment d'inertie par intégration*.

Géométrie	Situation	Schéma	Moment d'inertie
<b>Cylindre</b>	Cylindre creux de rayon $R$ tournant autour de son axe de symétrie		$I = MR^2$
	Cylindre plein de rayon $R$ tournant autour de son axe de symétrie		$I = \frac{1}{2}MR^2$
<b>Sphère</b>	Coquille sphérique mince de rayon $R$ tournant autour de son centre		$I = \frac{2}{3}MR^2$
	Sphère pleine de rayon $R$ tournant autour de son centre		$I = \frac{2}{5}MR^2$
<b>Tige</b>	Tige mince de longueur $L$ tournant autour d'un axe perpendiculaire à elle-même passant par son centre		$I = \frac{1}{12}ML^2$
	Tige mince de longueur $L$ tournant autour d'un axe perpendiculaire à elle-même passant par une extrémité		$I = \frac{1}{3}ML^2$

**Situation 1 : L'énergie cinétique d'un cylindre en rotation.** On désire calculer l'énergie cinétique d'un cylindre de cuivre de 3 m de rayon et de 2 m de hauteur qui tourne autour de son axe de symétrie à 500 tours par minutes. (Le cuivre a une masse volumique  $\rho$  de  $8900 \text{ kg/m}^3$ .)



Évaluer la masse totale du cylindre :

$$m = \rho V = \rho(\pi R^2 H) = (8900)\pi(3)^2(2) \Rightarrow m = 5,03 \times 10^5 \text{ kg}$$

Évaluer le moment d'inertie du cylindre :

$$I = \frac{1}{2} m R^2 = \frac{1}{2} (5,03 \times 10^5) (3)^2 \Rightarrow I = 2,26 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Évaluer la vitesse angulaire de rotation :

$$\omega = \frac{500 \text{ tours}}{1 \text{ min}} \times \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \times \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ tour}} \Rightarrow \omega = 52,36 \text{ rad/s}$$

Nous pouvons maintenant évaluer l'énergie cinétique :

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} (2,26 \times 10^6) (52,36)^2 \Rightarrow K = 3,10 \times 10^9 \text{ J}$$

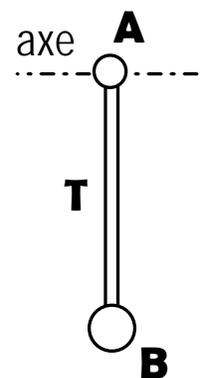
**Situation 2 : Le moment d'inertie de deux particules reliées par une tige.** Soit le système formé par une balle A de 1 kg reliée à une balle B de 2 kg par une mince tige homogène T de 3 m de longueur dont la masse vaut 0,5 kg. Le diamètre des balles est négligeable par rapport à la longueur de la tige. On fait tourner le système autour d'un axe perpendiculaire à la tige qui passe par la balle A. On désire calculer le moment d'inertie du système par rapport à l'axe de rotation.

Par rapport à l'axe de rotation, nous pouvons évaluer le moment d'inertie de nos trois objets :

- $I_A = mR^2 = (1)(0)^2 \Rightarrow I_A = 0$

- $I_B = mR^2 = (2)(3)^2 \Rightarrow I_B = 18 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

- $I_T = \frac{1}{3} mL^2 = \frac{1}{3} (0,5)(3)^2 \Rightarrow I_T = 1,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$



Nous avons le moment d'inertie total suivant :

$$I = \sum_{i=A,B,T} I_i \Rightarrow I = \sum_{i=A,B,T} I_i = I_A + I_B + I_T$$

$$\Rightarrow I = (0) + (18) + (1,5)$$

$$\Rightarrow I = 19,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$









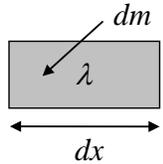
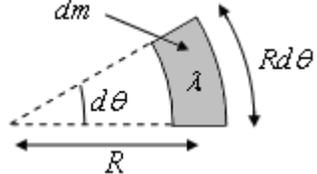
# Chapitre 4.5 – Le moment d’inertie par intégration

## Découpage d’une densité de masse

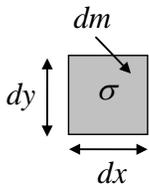
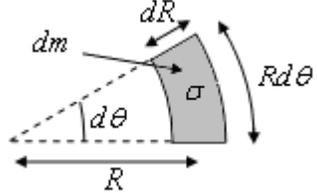
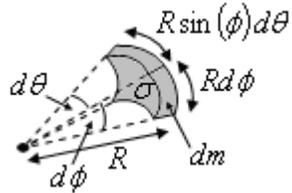
Pour évaluer l’inertie d’un objet non ponctuel, il faut découper l’objet en plusieurs volumes infinitésimaux de masse  $dm$  et calculer l’inertie totale  $I$  provenant de la contribution de toutes les masses infinitésimales en effectuant une sommation.

Voici quelques formes de découpage infinitésimal fréquemment employées :

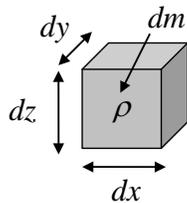
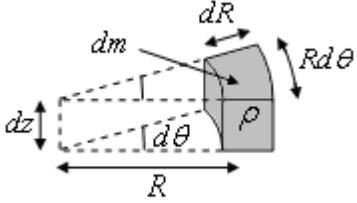
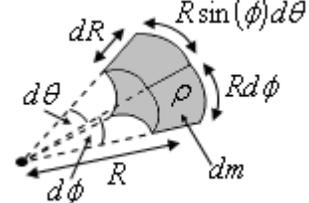
En 1D : Densité linéaire  $[\lambda] = \text{kg/m}$  et  $dm = \lambda dL$

Tige : $dm = \lambda dx$	Tige cylindrique : $dm = \lambda R d\theta$
	

En 2D : Densité surfacique  $[\sigma] = \text{kg/m}^2$  et  $dm = \sigma dA$

Carré : $dm = \sigma dx dy$	Carré cylindrique : $dm = \sigma R dR d\theta$	Carré sphérique: $dm = \sigma R^2 \sin(\phi) d\theta d\phi$
		

En 3D : Densité volumique  $[\rho] = \text{kg/m}^3$  et  $dm = \rho dV$

Cube <sup>1</sup> : $dm = \rho dx dy dz$	Cube cylindrique <sup>2</sup> : $dm = \rho R dR d\theta dz$	Cube sphérique <sup>3</sup> : $dm = \rho R^2 \sin(\phi) dR d\theta d\phi$
		

Remarque :  $x, y, z \in [-\infty.. \infty]$  et  $R \in [0.. \infty]$   $\theta \in [0.. 2\pi]$   $\phi \in [0.. \pi]$   
 $\theta$  : Longitude  $\theta$  : Axe parallèle à  $x$   $\phi$  : Axe parallèle à  $z$   
 $\phi$  : Colatitude « Rotation plan  $xy$  » « Rotation  $+z$  à  $-z$  »

<sup>1</sup> Ce découpage s’effectue dans le système d’axe  $xyz$  qui porte le nom de coordonnée cartésienne.

<sup>2</sup> Ce découpage s’effectue dans le système d’axe  $R\theta z$  qui porte le nom de coordonnée cylindrique.

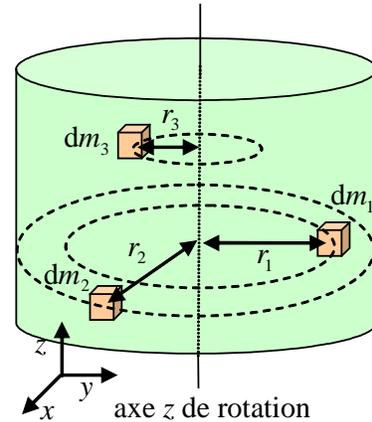
<sup>3</sup> Ce découpage s’effectue dans le système d’axe  $R\theta\phi$  qui porte le nom de coordonnée sphérique.

## Moment d'inertie d'un corps selon l'axe z

Le moment d'inertie d'un corps  $I$  par rapport à l'axe  $z$  de rotation peut être évaluée en découpant le corps en un nombre infini de morceaux infinitésimaux de masse  $dm$  et en additionnant tous les moments d'inertie  $dI$  provenant de tous ces morceaux de masse :

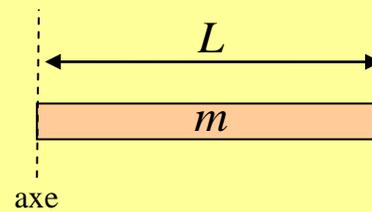
$$I = \int dI = \int r^2 dm$$

où  $I$  : Moment d'inertie total du corps ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )  
 $r$  : Distance dans le plan  $xy$  entre l'axe  $z$  et  $dm$  (m)  
 $dm$  : Morceau infinitésimal de masse (kg)



**Situation 1 : Le moment d'inertie d'une tige.** Une tige homogène de masse  $m$  et de longueur  $L$  tourne autour d'un axe perpendiculaire à elle-même qui passe par une de ses extrémités (voir schéma ci-contre). On désire utiliser le calcul intégral pour montrer que son moment d'inertie est donnée par :

$$I = \frac{1}{3} mL^2$$



Évaluons la densité linéaire  $\lambda$  de masse de la tige, puisqu'elle est uniforme :

$$\lambda = \frac{m}{L}$$

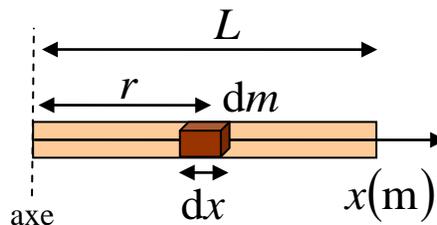
Découpons notre tige en morceau de tige infinitésimale de largeur  $dx$  et représentons la mesure  $r$  du moment d'inertie à l'aide de notre système d'axe  $x$  sachant que l'origine est située sur l'axe de rotation :

Moment d'inertie infinitésimal :

$$dI = r^2 dm$$

et  $dm = \lambda dx$

$$r = x$$



Posons notre intégrale afin d'additionner toutes les inerties  $dI$  provenant de tous les  $dm$  situés sur la tige entre la coordonnée  $x = 0$  et  $x = L$  :

$$I = \int dI \quad \Rightarrow \quad I = \int r^2 dm \quad \text{(Remplacer } dI = r^2 dm \text{)}$$

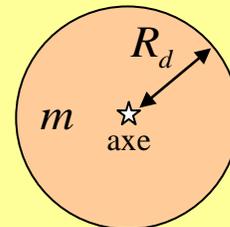
$$\Rightarrow \quad I = \int (x)^2 (\lambda dx) \quad \text{(Remplacer } r = x \text{ et } dm = \lambda dx \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad I = \lambda \int x^2 dx \quad \text{(Factoriser la constante } \lambda \text{)}$$

Posons les bornes de l'intégrale entre  $x = 0$  et  $x = L$  :

$$\begin{aligned}
 I = \lambda \int x^2 dx &\Rightarrow I = \lambda \int_{x=0}^L x^2 dx && \text{(Bornes : } x = 0 \rightarrow L \text{)} \\
 &\Rightarrow I = \lambda \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^L && \left( \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right) \\
 &\Rightarrow I = \lambda \left[ \frac{(L)^3}{3} - \frac{(0)^3}{3} \right] && \text{(Évaluer l'intégrale)} \\
 &\Rightarrow I = \left( \frac{m}{L} \right) \frac{L^3}{3} && \text{(Remplacer } \lambda = \frac{m}{L} \text{)} \\
 &\Rightarrow I = \frac{1}{3} mL^2 \quad \blacksquare && \text{(Simplifier)}
 \end{aligned}$$

**Situation 2 : Le moment d'inertie d'un disque.** Un disque mince et homogène de masse  $m$  et de rayon  $R_d$  tourne autour d'un axe, perpendiculaire à son plan, qui passe par son centre (voir schéma ci-contre). On désire utiliser le calcul intégral pour montrer que son moment d'inertie est donnée par :



$$I = \frac{1}{2} m R_d^2$$

Évaluons la densité surfacique  $\sigma$  de masse du disque, puisqu'elle est uniforme :

$$\sigma = \frac{m}{A} \quad \Rightarrow \quad \sigma = \frac{m}{\pi R_d^2} \quad \text{où } A = \pi R_d^2$$

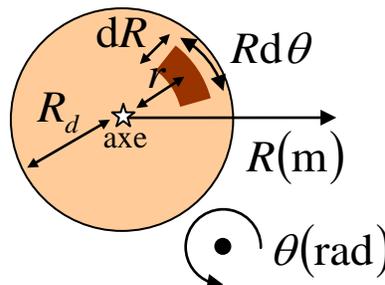
Découpons notre disque en morceau de carré cylindrique infinitésimal (coordonnée cylindrique  $R\theta$ ) de largeur  $dR$  et de longueur  $Rd\theta$  et représentons la mesure  $r$  du moment d'inertie à l'aide de notre système d'axe  $R\theta$  sachant que l'origine est située au centre du disque :

Moment d'inertie infinitésimal :

$$dI = r^2 dm$$

et  $dm = \sigma R dR d\theta$

$$r = R$$

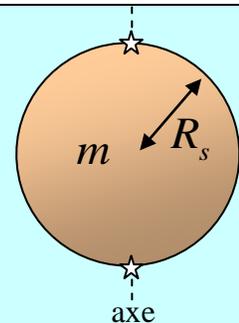


Posons notre intégrale afin d'additionner toutes les inerties  $dI$  provenant de tous les  $dm$  situés sur le disque entre la coordonnée  $R = 0$  et  $R = R_d$  puis entre la coordonnée  $\theta = 0$  et  $\theta = 2\pi$  :

$$\begin{aligned}
 I = \int dI &\Rightarrow I = \int r^2 dm && \text{(Remplacer } dI = r^2 dm \text{)} \\
 &\Rightarrow I = \iint (R)^2 (\sigma R dR d\theta) && \text{(Remplacer } r = R \text{ et } dm = \sigma R dR d\theta \text{)} \\
 &\Rightarrow I = \sigma \iint R^3 dR d\theta && \text{(Factoriser la constante } \sigma \text{)} \\
 &\Rightarrow I = \sigma \int_{R=0}^{R_d} \int_{\theta=0}^{2\pi} R^3 dR d\theta && \text{(Bornes : } R = 0 \rightarrow R_d \text{ et } \theta = 0 \rightarrow 2\pi \text{)} \\
 &\Rightarrow I = \sigma \int_{R=0}^{R_d} R^3 dR \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta && \text{(Factoriser constante pour intégrale sur } \theta \text{)} \\
 &\Rightarrow I = \sigma \int_{R=0}^{R_d} R^3 dR [\theta]_0^{2\pi} && \text{(Résoudre pour } \theta : \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{)} \\
 &\Rightarrow I = \sigma \int_{R=0}^{R_d} R^3 dR ((2\pi) - (0)) && \text{(Évaluer l'intégrale sur } \theta \text{)} \\
 &\Rightarrow I = 2\pi\sigma \int_{R=0}^{R_d} R^3 dR && \text{(Factoriser constante pour intégrale sur } R \text{)} \\
 &\Rightarrow I = 2\pi\sigma \left[ \frac{R^4}{4} \right]_0^{R_d} && \text{(Résoudre pour } R : \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \text{)} \\
 &\Rightarrow I = 2\pi\sigma \left( \frac{(R_d)^4}{4} - \frac{(0)^4}{4} \right) && \text{(Évaluer l'intégrale sur } R \text{)} \\
 &\Rightarrow I = 2\pi \left( \frac{m}{\pi R_d^2} \right) \frac{R_d^4}{4} && \text{(Remplacer } \sigma = \frac{m}{\pi R_d^2} \text{)} \\
 &\Rightarrow I = \frac{1}{2} m R_d^2 \quad \blacksquare && \text{(Simplifier)}
 \end{aligned}$$

**Situation A : Le moment d'inertie d'une sphère.** Une sphère homogène de masse  $m$  et de rayon  $R_s$  tourne autour d'un axe qui passe par son centre (voir schéma ci-contre). On désire utiliser le calcul intégral pour montrer que son moment d'inertie est donnée par :

$$I = \frac{2}{5} m R_s^2$$



Évaluons la densité volumique  $\rho$  de masse de la sphère, puisqu'elle est uniforme :

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{m}{4\pi R_d^3 / 3} \quad (A = 4\pi R_d^3 / 3)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\rho = \frac{3m}{4\pi R_d^3}} \quad (\text{Simplification})$$

Découpons notre sphère en morceau de cube sphérique infinitésimal (coordonnée sphérique  $R\theta\phi$ ) de côté  $dR$ ,  $R\sin(\phi)d\theta$  et  $Rd\phi$  et représentons la mesure  $r$  du moment d'inertie à l'aide de notre système d'axe  $R\theta\phi$  sachant que l'origine est située au centre de la sphère. Considérons que notre sphère tourne autour de l'axe  $z$  :

Moment d'inertie infinitésimal :

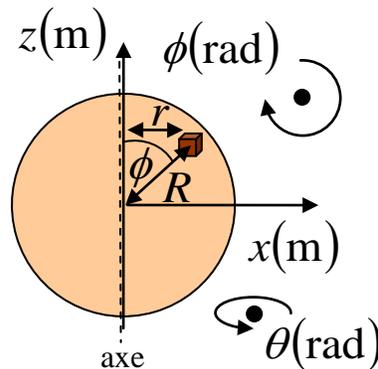
$$dI = r^2 dm$$

et  $dm = \rho R^2 \sin(\phi) dR d\theta d\phi$

$$r = R \sin(\phi)$$

Rappel :  $\theta$  : rotation plan  $xy$

$\phi$  : rotation mesurée par l'axe  $z$



Posons notre intégrale afin d'additionner toutes les inerties  $dI$  provenant de tous les  $dm$  situés sur la sphère entre la coordonnée  $R=0$  et  $R=R_s$ , entre la coordonnée  $\theta=0$  et  $\theta=2\pi$  puis entre la coordonnée  $\phi=0$  et  $\phi=\pi$  :

$$I = \int dI \quad \Rightarrow \quad I = \int r^2 dm \quad (\text{Remplacer } dI = r^2 dm)$$

$$\Rightarrow \quad I = \iiint (R \sin(\phi))^2 (\rho R^2 \sin(\phi) dR d\theta d\phi) \quad (\text{Remplacer } r = R \sin(\phi) \text{ et } dm)$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_{R=0}^{R_s} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} \rho R^4 \sin^3(\phi) dR d\theta d\phi \quad (\text{Bornes des intégrales})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \rho \int_{R=0}^{R_s} R^4 dR \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\phi=0}^{\pi} \sin^3(\phi) d\phi} \quad (\text{Factoriser dans les intégrales})$$

Utilisons la table d'intégrale suivante pour évaluer l'intégrale sur  $\phi$  :

$$\int \sin^3(x) dx = \frac{1}{12} (\cos(3x) - 9 \cos(x))$$

Nous obtenons le résultat suivant pour l'intégrale sur  $\phi$  :

$$I_\phi = \int_{\phi=0}^{\pi} \sin^3(\phi) d\phi \quad (\text{Intégrale à évaluer})$$

$$\Rightarrow I_\phi = \left[ \frac{1}{12} (\cos(3\phi) - 9\cos(\phi)) \right]_0^\pi \quad (\text{Appliquer la table d'intégrale})$$

$$\Rightarrow I_\phi = \frac{1}{12} [\cos(3\phi)]_0^\pi - \frac{9}{12} [\cos(\phi)]_0^\pi \quad (\text{Séparer termes à évaluer})$$

$$\Rightarrow I_\phi = \frac{1}{12} (\cos(3\pi) - \cos(0)) - \frac{9}{12} (\cos(\pi) - \cos(0)) \quad (\text{Évaluer l'intégrale})$$

$$\Rightarrow I_\phi = \frac{1}{12} ((-1) - (1)) - \frac{9}{12} ((-1) - (1)) \quad (\cos(\pi) = \cos(3\pi) = -1 \text{ et } \cos(0) = 1)$$

$$\Rightarrow I_\phi = \frac{-2}{12} + \frac{18}{12} \quad (\text{Calcul})$$

$$\Rightarrow \boxed{I_\phi = \frac{4}{3}} \quad (\text{Calcul})$$

Revenons à notre intégrale initiale et évaluons l'inertie totale :

$$I = \rho \int_{R=0}^{R_s} R^4 dR \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{\phi=0}^{\pi} \sin^3(\phi) d\phi \quad (\text{Expression précédente})$$

$$\Rightarrow I = \rho \int_{R=0}^{R_s} R^4 dR \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \left( \frac{4}{3} \right) \quad (\text{Résultat intégrale sur } \phi)$$

$$\Rightarrow I = \frac{4}{3} \rho \left( \int_{R=0}^{R_s} R^4 dR \right) \left( \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \right) \quad (\text{Factoriser } 4/3, \text{ séparer intégrale})$$

$$\Rightarrow I = \frac{4}{3} \rho \left[ \frac{R^5}{5} \right]_0^{R_s} [\theta]_0^{2\pi} \quad (\text{Résoudre sur } R \text{ et } \theta : \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C)$$

$$\Rightarrow I = \frac{4}{3} \rho \left( \frac{R_s^5}{5} \right) (2\pi) \quad (\text{Évaluer l'intégrale})$$

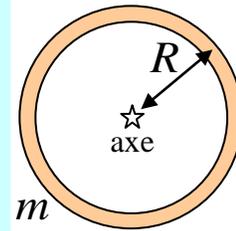
$$\Rightarrow I = \frac{4}{3} \left( \frac{3m}{4\pi R_d^3} \right) \frac{R_s^5}{5} 2\pi \quad (\text{Remplacer } \rho = \frac{3m}{4\pi R_d^3})$$

$$\Rightarrow I = \frac{2}{5} m R_s^2 \quad \blacksquare \quad (\text{Simplifier})$$

## Exercice

**Exercice A : Le moment d'inertie d'un anneau.** Un anneau mince et homogène de masse  $m$  et de rayon  $R$  tourne autour d'un axe, perpendiculaire à son plan, qui passe par son centre (voir schéma ci-contre). Montrer que son moment d'inertie est donnée par :

$$I = mR^2$$



## Solution

**Exercice A : Le moment d'inertie d'un anneau.**

Densité linéaire :

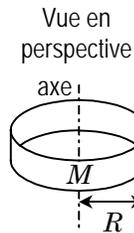
$$\lambda = \frac{m}{L} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{m}{2\pi R} \quad \text{où } L = 2\pi R$$

Moment d'inertie infinitésimal :

$$dI = r^2 dm$$

et  $dm = \lambda R d\theta$

$$r = R$$



Calcul :

$$I = \int dI = \int r^2 dm \quad \Rightarrow \quad I = \int_{\theta=0}^{2\pi} R^2 \lambda R d\theta \quad (\text{Remplacer } r = R \text{ et } dm = \lambda R d\theta)$$

$$\Rightarrow \quad I = \lambda R^3 \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \quad (\text{Factoriser constantes})$$

$$\Rightarrow \quad I = \lambda R^3 [\theta]_0^{2\pi} \quad (\text{Résoudre l'intégrale})$$

$$\Rightarrow \quad I = \lambda R^3 ((2\pi) - (0)) \quad (\text{Évaluer l'intégrale})$$

$$\Rightarrow \quad I = 2\pi \lambda R^3 \quad (\text{Réécriture})$$

$$\Rightarrow \quad I = 2\pi \left( \frac{m}{2\pi R} \right) R^3 \quad (\text{Remplacer } \lambda = \frac{m}{2\pi R})$$

$$\Rightarrow \quad I = mR^2 \quad \blacksquare \quad (\text{Simplifier})$$



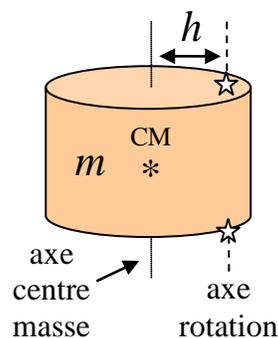
# Chapitre 4.6 – Le théorème des axes parallèles

## Le théorème des axes parallèles

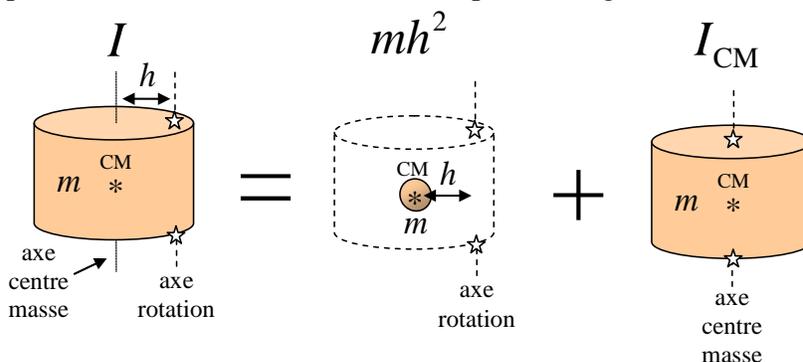
Le théorème des axes parallèles permet d'évaluer l'inertie  $I$  d'un corps par rapport à un axe de rotation quelconque à partir de l'inertie  $I_{CM}$  du corps par rapport à un axe parallèle passant par le centre de masse CM du corps et de la distance  $h$  entre les deux axes :

$$I = mh^2 + I_{CM}$$

- où
- $I$  : Inertie de l'objet en rotation ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )
  - $m$  : Masse de l'objet en rotation (kg)
  - $h$  : Distance entre l'axe de rotation et un axe parallèle passant par le centre de masse CM (m)
  - $I_{CM}$  : Inertie de l'objet en rotation autour d'un axe passant par le centre de masse CM et parallèle à l'axe de rotation ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )



En d'autres mots, on peut visualiser le théorème des axes parallèles grâce au schéma ci-dessous :

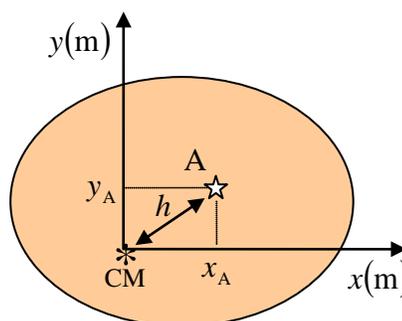


### Preuve : (deux dimensions)

Considérons un corps dans le plan  $xy$  de densité surfacique  $\sigma$  quelconque et de masse  $m$ . Situons l'origine du système d'axe  $xy$  à l'endroit où le centre de masse CM est situé. Faisons tourner le corps autour d'un axe A parallèle à l'axe  $z$  situé à la coordonnée  $x_A$  et  $y_A$  par rapport à notre système d'axe  $xy$ . Définissons la distance  $h$  entre l'axe de rotation et l'axe passant par le centre de masse CM :

$$h = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

(par Pythagore)



Puisque l'origine du système d'axe coïncide avec le centre de masse CM, nous pouvons affirmer que  $x_{CM} = 0$  et  $y_{CM} = 0$ . Ceci nous permet d'affirmer les relations suivantes :

$$x_{CM} = \frac{1}{m} \int x dm \quad \Rightarrow \quad \int x dm = m x_{CM} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int x dm = 0} \quad \text{car } x_{CM} = 0$$

$$y_{CM} = \frac{1}{m} \int y dm \quad \Rightarrow \quad \int y dm = m y_{CM} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\int y dm = 0} \quad \text{car } y_{CM} = 0$$

Évaluons l'expression de l'inertie  $dI$  d'un élément de masse  $dm$  du corps :

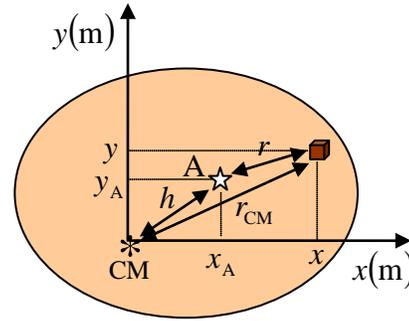
$$dI = r^2 dm$$

et

$$r = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2}$$

$$h = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

$$r_{CM} = \sqrt{x^2 + y^2}$$



Évaluons l'inertie totale  $I$  du corps en introduisant la mesure  $h = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$  :

$$I = \int dI \quad \text{(Inertie totale)}$$

$$\Rightarrow I = \int r^2 dm \quad \text{(Définition de l'inertie)}$$

$$\Rightarrow I = \int [(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2] dm \quad \text{(Remplacer } r^2 \text{)}$$

$$\Rightarrow I = \int [(x^2 - 2x x_A + x_A^2) + (y^2 - 2y y_A + y_A^2)] dm \quad \text{(Développer termes au carré)}$$

$$\Rightarrow I = \int [x^2 + y^2 + x_A^2 + y_A^2 - 2x x_A - 2y y_A] dm \quad \text{(Regrouper termes)}$$

$$\Rightarrow I = \int [r_{CM}^2 + h^2 - 2x x_A - 2y y_A] dm \quad \text{(Remplacer } r_{CM}^2 \text{ et } h^2 \text{)}$$

$$\Rightarrow I = \int r_{CM}^2 dm + \int h^2 dm + \int -2x x_A dm + \int -2y y_A dm \quad \text{(Distribuer l'intégrale)}$$

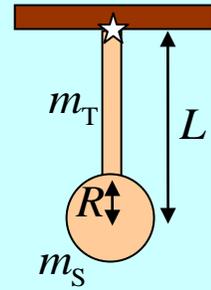
$$\Rightarrow I = \int r_{CM}^2 dm + h^2 \int dm - 2x_A \int x dm - 2y_A \int y dm \quad \text{(Factoriser constantes)}$$

$$\Rightarrow I = \int r_{CM}^2 dm + h^2 \int dm - 2x_A (0) - 2y_A (0) \quad (\int x dm = 0 \text{ et } \int y dm = 0)$$

$$\Rightarrow I = \int r_{CM}^2 dm + h^2 (m) \quad (m = \int dm)$$

$$\Rightarrow I = I_{CM} + m h^2 \quad \blacksquare \quad \text{(Inertie au CM : } I_{CM} = \int r_{CM}^2 dm \text{)}$$

**Situation A : Le moment d'inertie d'une pendule simple.** Un pendule simple fixé à un plafond est constitué d'une tige de masse  $m_T$  de longueur  $L$  et d'une sphère de masse  $m_S$  de rayon  $R$  fixée à l'extrémité de la tige en son centre (voir schéma ci-contre). Le pendule oscille autour d'un axe perpendiculaire aux oscillations passant par l'extrémité de la tige où le pendule est fixé au plafond. On désire déterminer le moment d'inertie du pendule **(a)** lorsqu'on néglige la masse de la tige ( $m_T = 0$ ) et le rayon de la sphère ( $R = 0$ ) (masse ponctuelle), **(b)** lorsqu'on néglige seulement la masse de la tige et **(c)** lorsqu'on néglige aucun paramètre.



**(a)** Puisque la masse de la sphère est ponctuelle et que l'on néglige la masse de la tige, le moment d'inertie sera égal à l'expression d'une masse ponctuelle :

$$I = m_S r^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = m_S L^2} \quad \text{(a)} \quad \text{(Remplacer } r = L \text{)}$$

**(b)** Puisque l'on néglige la masse de la tige, évaluons le moment d'inertie de la sphère à l'aide du théorème des axes parallèles :

$$I = I_S \quad \Rightarrow \quad I = m_S h^2 + I_{CM S} \quad \text{(Théorème axe parallèle)}$$

$$\Rightarrow \quad I = m_S (L)^2 + \left( \frac{2}{5} m_S R^2 \right) \quad \left( I_{CM \text{ sphère}} = \frac{2}{5} m R^2, h = L \right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_S = m_S \left( L^2 + \frac{2}{5} R^2 \right)} \quad \text{(b)} \quad \text{(Factoriser } m_S, I = I_S \text{)}$$

**N.B.** Plus la sphère est grosse ( $R \uparrow$ ), plus l'inertie est importante.

**(c)** Puisque l'on néglige aucun paramètre, évaluer le moment d'inertie du pendule à l'aide du moment d'inertie de la sphère obtenu en **(b)** :

$$I = I_T + I_S \quad \Rightarrow \quad I = \left( \frac{1}{3} m_T L^2 \right) + \left( m_S \left( L^2 + \frac{2}{5} R^2 \right) \right) \quad \left( I_{\text{tige extrémité}} = \frac{1}{3} m L^2, \text{ remplacer } I_S \right)$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{3} m_T L^2 + m_S L^2 + \frac{2}{5} m_S R^2 \quad \text{(Distribuer } m_S \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I = \left( \frac{1}{3} m_T + m_S \right) L^2 + \frac{2}{5} m_S R^2} \quad \text{(c)} \quad \text{(Factoriser } L^2 \text{)}$$











# Chapitre 4.7 – La dynamique de rotation

## La 2<sup>e</sup> loi de Newton en rotation selon l'axe z avec un axe fixe

Lorsque l'on applique la 2<sup>e</sup> loi de Newton sur un corps rigide, nous obtenons l'accélération  $\vec{a}_{CM}$  du centre de masse du corps rigide tel que

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}_{CM}$$

Cependant, si nous désirons obtenir l'accélération angulaire  $\vec{\alpha}$  du corps rigide, cela est un peu plus complexe, car la représentation adéquate du moment d'inertie  $I$  devient une structure tensorielle<sup>1</sup>.

Dans le cas où l'on utilise un point de référence à accélération nulle ( $\vec{a}_s = 0$ ) avec l'imposition d'une rotation du corps rigide autour d'un axe z fixe, alors nous pouvons obtenir l'accélération angulaire  $\alpha_z$  du corps rigide à l'aide de l'équation de la 2<sup>e</sup> loi de Newton en rotation avec axe fixe :

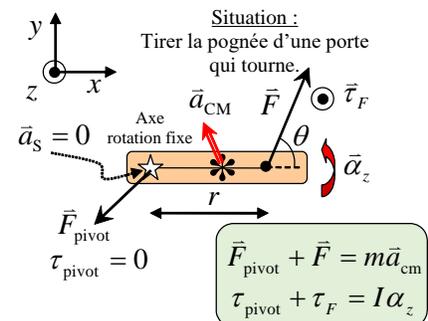
$$\sum \tau_z = I_z \alpha_z$$

(avec axe fixe)

- où  $\sum \tau_z$  : Somme des moments de force selon l'axe z (N·m) ( $\tau_z = \pm r F \sin(\theta)$ )  
 $I_z$  : Moment d'inertie de l'objet par rapport à l'axe de rotation z (kg·m<sup>2</sup>)  
 $\alpha_z$  : Accélération angulaire de l'objet selon l'axe z (rad/s<sup>2</sup>)



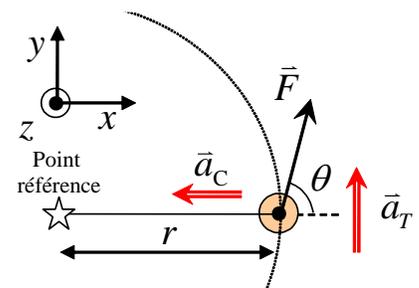
La porte et le tourniquet sont des bons exemples où la 2<sup>e</sup> loi de Newton en rotation selon l'axe z avec axe fixe est applicable.



L'orientation de l'accélération du centre de masse satisfait son accélération tangentielle et centripète.

### Preuve :

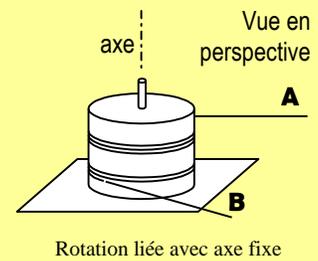
Considérons une particule de masse  $m$  qui subit une accélération tangentielle  $a_T$  grâce à une force  $F$  sur une trajectoire circulaire de rayon  $r$ . Appliquons la 2<sup>e</sup> loi de Newton selon l'axe tangentiel afin d'exprimer cette loi à l'aide de la notion de moment de force  $\tau_z$ , d'inertie de rotation  $I_z$  et d'accélération angulaire  $\alpha_z$ . Remarquons que l'angle entre  $r$  et  $F$  dans le plan  $xy$  est égal à  $\theta$  :



$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = m\vec{a} &\Rightarrow F \sin(\theta) = ma_T && \text{(Force selon l'axe tangentiel : } F_{||} = F \sin(\theta)\text{)} \\ &\Rightarrow F \sin(\theta) = m(r\alpha_z) && \text{(Accélération angulaire : } a_T = r\alpha_z\text{)} \\ &\Rightarrow (r)F \sin(\theta) = (r)m r\alpha_z && \text{(Multiplier par } r \text{ de chaque côté)} \\ &\Rightarrow (\tau_z) = m r^2 \alpha_z && \text{(Moment de force selon } z : \tau_z = rF \sin(\theta)\text{)} \\ &\Rightarrow \tau_z = I_z \alpha_z && \blacksquare \text{ (Inertie de rotation dans plan } xy : I_z = m r^2\text{)} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Consulter le chapitre 7.3 des notes de cours pour plus d'information sur le sujet.  
 Référence : Marc Séguin, Physique XXI Tome A  
 Note de cours rédigée par Simon Vézina

**Situation 1 : Une double bobine de fil.** Un cylindre homogène dont la masse  $M$  est égale à 12 kg et dont le rayon  $R$  est égal à 20 cm peut tourner autour d'un axe vertical sans frottement. Deux fils sont enroulés autour du cylindre et permettent de lui imprimer un mouvement de rotation (voir schéma ci-contre). Albert tire sur le fil **A** avec une force horizontale de 6 N orientée vers l'est et Béatrice tire sur le fil **B** avec une force horizontale de 3 N orientée à  $30^\circ$  au sud de l'est.



Comme les cordes ont des masses négligeables et qu'elles ne glissent pas sur le cylindre, elles transmettent intégralement ces forces au cylindre. On désire déterminer l'accélération angulaire du cylindre.

Schéma vue de haut :

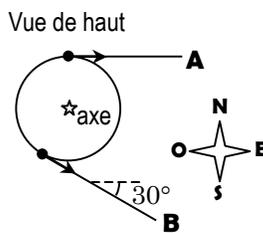
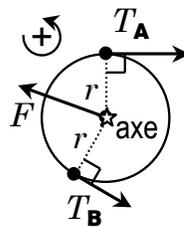
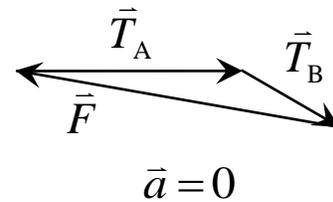


Schéma des forces :



Résolution graph. : ( $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ ) :



Nous avons ici une rotation liée. Nous pouvons alors évaluer le moment d'inertie du cylindre tournant autour de son centre de masse : (voir table inertie chapitre 4.4)

$$I_z = \frac{1}{2}mR^2 \quad \Rightarrow \quad I_z = \frac{1}{2}(12)(0,2)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_z = 0,24 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

Nous avons trois forces d'appliquées sur le cylindre. Évaluons le moment de force associé aux trois forces. Le point de référence sera le centre du cylindre (axe de rotation) :

- $\tau_A = \pm r_A F_A \sin(\theta_A) = -(0,2)(6)\sin(90^\circ) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_A = -1,2 \text{ N} \cdot \text{m}}$
- $\tau_B = \pm r_B F_B \sin(\theta_B) = +(0,2)(3)\sin(90^\circ) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_B = 0,6 \text{ N} \cdot \text{m}}$
- $\tau_F = \pm r_F F_F \sin(\theta_F) = \pm(0)F_F \sin(\theta_F) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_F = 0 \text{ N} \cdot \text{m}}$

Nous pouvons évaluer l'accélération angulaire :

$$\begin{aligned} \sum \tau_z &= I_z \alpha_z & \Rightarrow & \quad \tau_A + \tau_B + \tau_F = I_z \alpha \\ & & \Rightarrow & \quad (-1,2) + (0,6) + (0) = (0,24) \alpha_z \\ & & \Rightarrow & \quad \boxed{\alpha_z = -2,5 \text{ rad/s}^2} \quad (\text{Évaluer } \alpha_z) \end{aligned}$$

Selon notre système d'axe angulaire, le cylindre tourne avec une accélération angulaire de **2,5 rad/s<sup>2</sup>** dans le **sens horaire**.

**Situation 2 : Un bloc relié à un cylindre.** Un cylindre homogène ( $R = 20 \text{ cm}$ ,  $m_C = 12 \text{ kg}$ ,  $I = \frac{1}{2}mR^2 = 0,24 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ) peut tourner autour d'un axe horizontal fixe sans frottement (schéma ci-dessous). Il est initialement au repos. On accroche un bloc  $m_B$  de 2 kg à une corde de masse négligeable qui s'enroule autour du cylindre (la corde ne glisse pas sur le cylindre); on désire déterminer l'accélération angulaire du cylindre ainsi que le module de la vitesse du bloc après une chute de 30 cm.

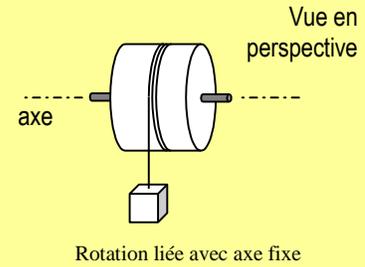


Schéma vue de côté :

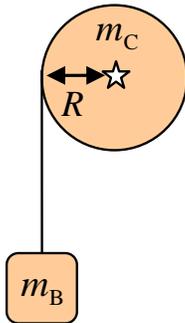
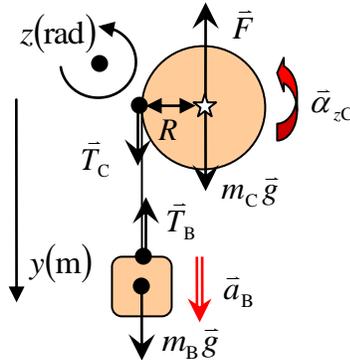
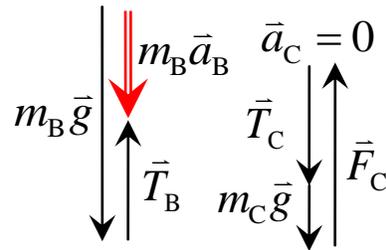


Schéma des forces :



Résolution graphique :



Appliquons la 2<sup>e</sup> loi de Newton sur le bloc de masse  $m_B$  selon l'axe  $y$  positif vers le bas :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad m_B \vec{g} + \vec{T}_B = m\vec{a}_B \quad \Rightarrow \quad \boxed{m_B g - T_B = m_B a_{yB}} \quad (1)$$

Appliquons la 2<sup>e</sup> loi de Newton sur le cylindre de masse  $m_C$  selon l'axe  $y$  positif vers le bas sachant que le cylindre n'effectue pas de translation : ( $\vec{a}_C = 0$ )

$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{T}_C + m_C \vec{g} + \vec{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_C + m_C g - F = 0} \quad (2)$$

Évaluons nos moment de force appliquées du le cylindre par rapport au centre du cylindre :

- $\tau_{T_C} = \pm r_{T_C} T_C \sin(\theta) = +(R)T_C \sin(90^\circ) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_{T_C} = RT_C}$
- $\tau_F = \pm r_F F \sin(\theta) = \pm(0)F \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_F = 0}$
- $\tau_{m_C g} = \pm r_{m_C g} m_C g \sin(\theta) = \pm(0)m_C g \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tau_{m_C g} = 0}$

Appliquons la 2<sup>e</sup> loi de Newton en rotation sur le cylindre de moment d'inertie  $I$  :

$$\begin{aligned} \sum \tau_z &= I_z \alpha_z & \Rightarrow & \quad \tau_{T_C} + \tau_F + \tau_{m_C g} = I_z \alpha_{zC} & \quad (\text{Remplacer } \sum \tau_z) \\ & & \Rightarrow & \quad (RT_C) + (0) + (0) = I_z \alpha_{zC} & \quad (\text{Remplacer valeur num.}) \\ & & \Rightarrow & \quad \boxed{RT_C = I_z \alpha_{zC}} & \quad (3) \quad (\text{Simplifier}) \end{aligned}$$

Avec la 3<sup>e</sup> loi de Newton et l'approximation de la corde de masse nulle, nous avons :

$$T_B = T_C = T$$

Puisque nous deux objets sont reliés entre eux par une corde qui **ne glisse pas** sur la cylindre, nous pouvons relier l'accélération de B et l'accélération angulaire de C de la façon suivante :

$$a_T = r\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_{yB} = R\alpha_{zC}} \quad (4) \quad (\text{Remplacer } r = R \text{ et } a_T = a_{yB})$$

Nous avons donc les quatre équations suivantes :

$$m_B g - T = m_B a_{yB} \quad (1) \quad (\text{chute du bloc})$$

$$T + m_C g - F = 0 \quad (2) \quad (\text{maintien du cylindre})$$

$$RT = I_z \alpha_{zC} \quad (3) \quad (\text{rotation du cylindre})$$

$$a_{yB} = R\alpha_{zC} \quad (4) \quad (\text{relation accélération-rotation})$$

On peut résoudre le système pour évaluer l'accélération angulaire à partir de (3) :

$$RT = I_z \alpha_{zC} \quad \Rightarrow \quad R(m_B g - m_B a_{yB}) = I_z \alpha_{zC} \quad (\text{Utiliser (1), } T = m_B g - m a_{yB})$$

$$\Rightarrow m_B g R - m_B R a_{yB} = I_z \alpha_{zC} \quad (\text{Distribuer le } R)$$

$$\Rightarrow m_B g R - m_B R (R\alpha_{zC}) = I_z \alpha_{zC} \quad (\text{Utiliser (4), } a_{yB} = R\alpha_{zC})$$

$$, \quad \Rightarrow m_B g R = I_z \alpha_{zC} + m_B R^2 \alpha_{zC} \quad (\text{Réunir termes en } \alpha_{zC})$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_{zC} = \frac{m_B g R}{I_z + m_B R^2}} \quad (\text{Isoler } \alpha_{zC})$$

$$\Rightarrow \alpha_{zC} = \frac{(2)(9,8)(0,2)}{(0,24) + (2)(0,2)^2} \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha_{zC} = 12,25 \text{ rad/s}^2} \quad (\text{Évaluer } \alpha_{zC})$$

On peut évaluer l'accélération verticale  $a_{yB}$  du bloc B à partir de (4) :

$$a_{yB} = R\alpha_{zC} \quad \Rightarrow \quad a_y = (0,2)(12,25) \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_y = 2,45 \text{ m/s}^2}$$

Évaluons la vitesse du bloc  $m_B$  après une chute de 30 cm à l'aide des équations du MUA :

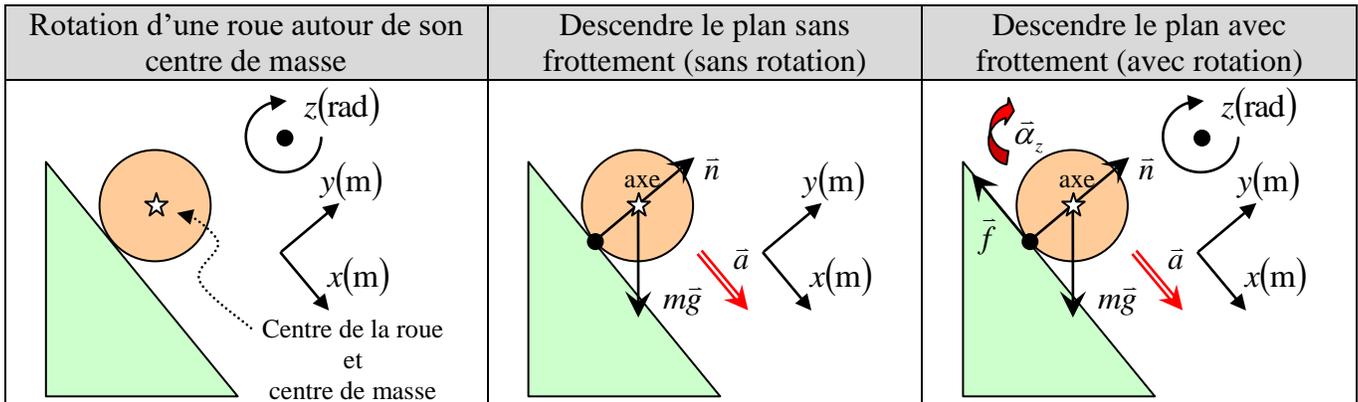
$$v_y^2 = v_{y0}^2 + 2a_y(y - y_0) \quad \Rightarrow \quad v_y^2 = (0)^2 + 2(2,45)((0,3) - (0))$$

$$\Rightarrow v_y^2 = 1,47$$

$$\Rightarrow \boxed{v_y = 1,21 \text{ m/s}}$$

## La 2<sup>e</sup> loi de Newton en rotation selon l'axe z avec un axe passant par le centre de masse

Nous avons présenté précédemment que  $\sum \tau_z = I_z \alpha_z$  est applicable pour expliquer la rotation d'un corps autour d'un axe de rotation fixe (ex : Porte). Cependant, il y a plusieurs situations où un corps effectue une translation autour d'un point de référence tout en effectuant une rotation autour de ce point. Prenons comme exemple une roue qui descend un plan incliné :



En théorie, nous ne pourrions plus appliquer  $\sum \tau_z = I_z \alpha_z$ , car l'axe de rotation est en accélération. Cependant, puisque (1) cet axe est situé sur le centre de masse, (2) que le moment d'inertie du corps est symétrique par rapport l'axe z et (3) que le corps possède uniquement<sup>2</sup> une vitesse angulaire selon l'axe z, alors nous pouvons décrire l'évolution du corps rigide grâce aux deux équations suivantes :

2 <sup>e</sup> loi de Newton en translation	2 <sup>e</sup> loi de Newton en rotation
$\sum \vec{F} = m \vec{a}_{CM}$	$\sum \tau_{zCM} = I_{zCM} \alpha_z$

où

$\sum F$  : Somme des forces selon l'axe x et y (N)

$m$  : Masse totale de l'objet (kg)

$\vec{a}_{CM}$  : Accélération l'objet selon l'axe x et y ( $m/s^2$ )

$\sum \tau_z$  : Somme des moments de force selon l'axe z ( $N \cdot m$ ) avec  $\tau_z = \pm r F \sin(\theta)$

$I_{zCM}$  : Moment d'inertie de l'objet par rapport au centre de masse selon l'axe z ( $kg \cdot m^2$ )

$\alpha_z$  : Accélération angulaire de l'objet selon l'axe z ( $rad/s^2$ )

Preuve :

Consultez le chapitre 7 pour une démonstration très complexe, mais complète.

<sup>2</sup> Sans restriction, en trois dimensions, nous aurions la relation  $\sum \vec{\tau}_{CM} = \vec{\omega} \times I_{CM} \vec{\omega} + I_{CM} \vec{\alpha}$  où  $I_{CM}$  est le tenseur 3x3 de moment d'inertie évalué par rapport au centre de masse du corps.

**Situation 3 : Un cylindre qui roule.** Un cylindre homogène ( $R = 20 \text{ cm}$ ,  $m = 12 \text{ kg}$ ,  $I = \frac{1}{2}mR^2 = 0,24 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ) roule *sans glisser* vers le bas d'un plan incliné à  $50^\circ$  par rapport à l'horizontale (voir schéma ci-contre). On désire déterminer **(a)** l'accélération angulaire du cylindre ainsi que **(b)** le coefficient de frottement statique minimal  $\mu_s$  qui doit exister entre le cylindre et le plan.

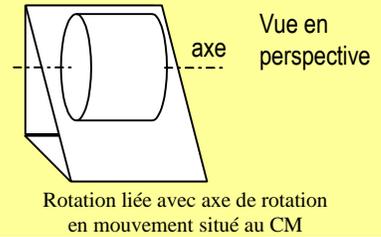


Schéma vue de côté :

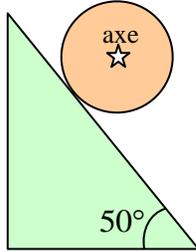
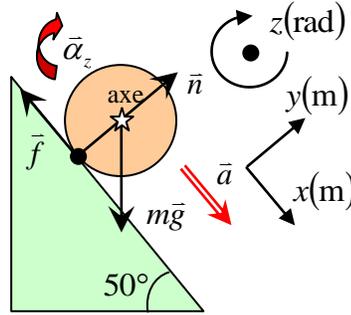
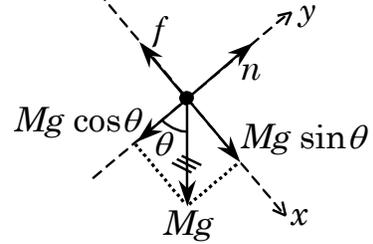


Schéma des forces :



Décomposition des forces :



$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \text{où} \quad m\vec{g} + \vec{n} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Appliquons la 2<sup>e</sup> loi de Newton sur le cylindre de masse  $m$  selon l'axe  $x$  et  $y$  afin d'obtenir nos deux relations en lien avec l'accélération  $a_x$  et  $a_y$  sachant que  $a_y = 0$  :

Selon l'axe  $x$  :

$$\sum F_x = ma_x \Rightarrow \boxed{mg \sin(\theta) - f = ma_x} \quad (1)$$

Selon l'axe  $y$  :

$$\sum F_y = ma_y \Rightarrow \boxed{n - mg \cos(\theta) = 0} \quad (2)$$

Appliquons la 2<sup>e</sup> loi de Newton en rotation sur le cylindre de moment d'inertie  $I_z$  :

$$\sum \tau_z = I_z \alpha_z \Rightarrow \tau_{mg} + \tau_n + \tau_f = I_z \alpha_z$$

Selon l'axe  $z$  :

- $\tau_{mg} = \pm r_{mg} mg \sin(\theta) \Rightarrow \tau_{mg} = \pm(0)mg \sin(\theta) \Rightarrow \boxed{\tau_{mg} = 0}$

- $\tau_n = \pm r_n n \sin(\theta) \Rightarrow \tau_n = \pm(R)n \sin(180^\circ) \Rightarrow \boxed{\tau_n = 0}$

- $\tau_f = \pm r_f f \sin(\theta) \Rightarrow \tau_f = +(R)f \sin(90^\circ) \Rightarrow \boxed{\tau_f = Rf}$

Ceci nous donne une 3<sup>e</sup> équation :

$$\tau_{mg} + \tau_n + \tau_f = I_z \alpha_z \Rightarrow (0) + (0) + (Rf) = I_z \alpha_z$$

$$\Rightarrow \boxed{Rf = I_z \alpha_z} \quad (3)$$

Puisque le cylindre tourne *sans glisser* sur le plan incliné, nous pouvons introduire la relation suivante entre l'accélération de translation  $a_x$  :

$$a_T = r\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_x = R\alpha_z} \quad (4) \quad (\text{Remplacer } r = R \text{ et } a_T = a_x)$$

Nous avons les quatre équations suivantes :

$$mg \sin(\theta) - f = ma_x \quad (1) \quad (\text{accélération du cylindre le long du plan})$$

$$n - mg \cos(\theta) = 0 \quad (2) \quad (\text{support du cylindre sur le plan incliné})$$

$$Rf = I_z \alpha_z \quad (3) \quad (\text{rotation du cylindre autour du centre})$$

$$a_x = R\alpha_z \quad (4) \quad (\text{relation accélération-rotation})$$

Évaluons l'accélération angulaire du cylindre à partir de l'équation (1) :

$$mg \sin(\theta) - f = ma_x \quad \Rightarrow \quad mg \sin(\theta) - f = m(R\alpha_z) \quad (\text{Utiliser (4)})$$

$$\Rightarrow \quad mg \sin(\theta) - \left(\frac{I_z \alpha_z}{R}\right) = mR\alpha_z \quad (\text{Utiliser (3), } f = \frac{I_z \alpha_z}{R})$$

$$\Rightarrow \quad mg \sin(\theta) = mR\alpha_z + \frac{I_z \alpha_z}{R} \quad (\text{Regrouper termes avec } \alpha_z)$$

$$\Rightarrow \quad mg \sin(\theta) = \left(mR + \frac{I_z}{R}\right) \alpha_z \quad (\text{Factoriser } \alpha_z)$$

$$\Rightarrow \quad mg \sin(\theta) = \left(\frac{mR^2 + I_z}{R}\right) \alpha_z \quad (\text{Dénominateur commun})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha_z = \frac{mgR \sin(\theta)}{mR^2 + I_z}} \quad (\text{Isoler } \alpha_z)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_z = \frac{(12)(9,8)(0,2) \sin(50^\circ)}{(12)(0,2)^2 + (0,24)} \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\alpha_z = 25,02 \text{ rad/s}^2} \quad (\mathbf{a}) \quad (\text{Évaluer } \alpha_z)$$

Pour satisfaire cette situation il faut que la force de frottement  $\vec{f}$  génère l'accélération angulaire  $\vec{\alpha}_z$ .

Évaluons la force de frottement requise à partir de l'équation (3) :

$$Rf = I_z \alpha_z \quad \Rightarrow \quad (0,2)f = (0,24)(25,02) \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{f = 30,02 \text{ N}} \quad (\text{Évaluer } f)$$

Pour évaluer le coefficient de frottement statique  $\mu_s$  minimale, nous devons supposer que le frottement statique est sollicité au maximum ( $f_{s\max} = \mu_s n$ ) :

$$\begin{aligned}
 f = f_{s\max} &\Rightarrow f = \mu_s n && \text{(Remplacer } f_{s\max} = \mu_s n \text{)} \\
 &\Rightarrow f = \mu_s (mg \cos(\theta)) && \text{(Utiliser (2), } n = mg \cos(\theta) \text{)} \\
 &\Rightarrow (30,02) = \mu_s (12)(9,8) \cos(50^\circ) && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\
 &\Rightarrow \boxed{\mu_s = 0,3971} && \text{(Évaluer } \mu_s \text{)}
 \end{aligned}$$

Voici la conclusion que nous pouvons tirer sur le coefficient de frottement :

Condition sur le coefficient $\mu_s$	Rappel du schéma des forces
$\mu_s > 0,397$ : Le cylindre roule sur le plan incliné. $a_x = R\alpha_z$	
$\mu_s < 0,397$ : Le cylindre glisse sur le plan incliné. $a_x \neq R\alpha_z$	

## La rotation d'une roue en accélération et décélération

La rotation d'une roue est influencée par le type de frottement qu'applique la surface de contact sur la roue. Dans une voiture, il est important de réaliser que la qualité des pneus est une donnée très importante, car c'est uniquement le frottement entre les pneus et le sol qui permet à la voiture de se déplacer :



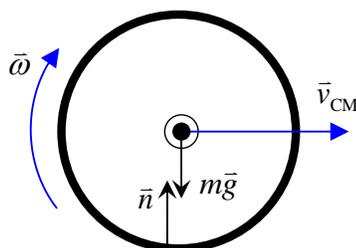
Un dérapage fait intervenir un frottement cinétique

- ❖ Frottement est statique  $\Rightarrow$  la roue tourne sans glisser au sol ( $v_{cm} = r\omega$ )
- ❖ Frottement est cinétique  $\Rightarrow$  la roue tourne en glissant au sol ( $v_{cm} \neq r\omega$ )

Voici différentes situations où le frottement cinétique et statique doit être considéré.

**Situation 1 :** Roue qui roule sur une surface sans frottement.

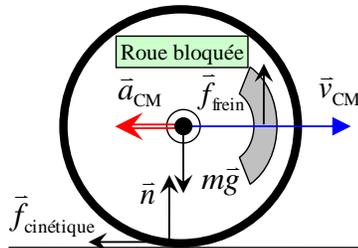
Exemple : Une roue qui glisse en tournant sur de la glace.



- La roue « flotte » sur la surface (pas d'interaction avec la surface)
- L'équation  $v_{cm} = r\omega$  n'est pas nécessairement vraie.
- La roue peut tourner dans les deux sens ou ne pas tourner.

**Situation 2 :** Roue qui glisse sans rouler sur une surface avec frottement.

Exemple : Une roue qui glisse sans tourner en bloquant la rotation des roues par un système de freinage.



Frein à disque sur une moto

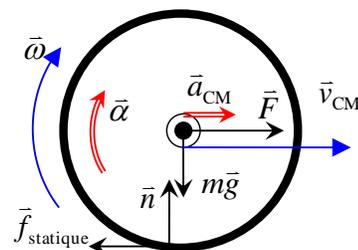


Frein à disque sur une voiture

- La roue est comparable à un bloc qui glisse sous l'influence d'un frottement cinétique  $\vec{f}_c$ .
- Nous avons aucune vitesse angulaire ( $\omega = 0$ ), car  $\tau_f - \tau_{frein} = 0$ .

**Situation 3 :** Roue qui roule sans glisser sur une surface avec frottement, avec force appliquée au centre de masse.

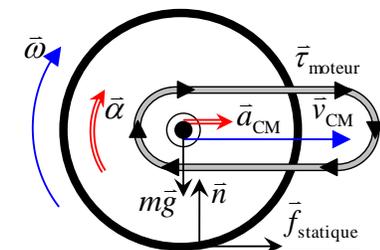
Exemple : Tirer une charrette à l'aide d'une corde.



- L'accélération de translation  $\vec{a}_{CM}$  est propulsée par  $\vec{F}$ , mais ralentie par  $\vec{f}_s$  ( $\vec{F} + \vec{f}_s = m\vec{a}_{CM}$ ,  $F > f_s$ )
- L'accélération de rotation  $\vec{\alpha}$  est propulsée par le moment de force produit par  $\vec{f}_s$  ( $\tau_f = I_{CM}\alpha$ )
- Nous avons la relation suivante :  $v_{CM} = r\omega$  et  $a_{CM} = r\alpha$

**Situation 4 :** Roue qui roule sans glisser sur une surface avec frottement, avec moment de force appliquée sur la roue.

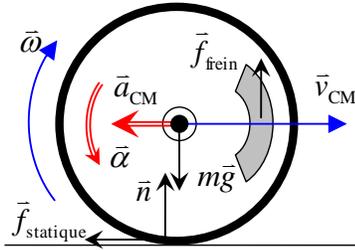
Exemple : Utiliser un pédalier afin de faire tourner le pneu arrière d'une bicyclette.



- Le pédalier applique une force résultant nulle sur le centre de masse. ( $\sum \vec{F}_{moteur} = 0$ )
- L'accélération de translation  $\vec{a}_{CM}$  est propulsée par le frottement  $\vec{f}_s$  ( $\vec{f}_s = m\vec{a}_{CM}$ ).
- L'accélération de rotation  $\vec{\alpha}$  est propulsée par le moment de force produit par  $\vec{\tau}_{moteur}$ , mais ralentie par le moment de force produit par  $\vec{f}_s$  ( $\tau_{moteur} - \tau_f = I_{CM}\alpha$ ,  $\tau_{moteur} > \tau_f$ ).
- Nous avons la relation suivante :  $v_{CM} = r\omega$  et  $a_{CM} = r\alpha$

**Situation 5 :** Roue qui roule sans glisser sur une surface avec frottement, avec moment de force appliquée sur la roue comme freinage.

Exemple : Utiliser un système de frein ABS (empêche le blocage des roues).

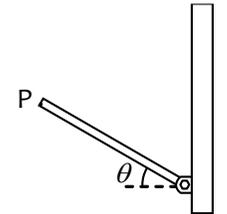


- La décélération de translation  $\vec{a}_{CM}$  est propulsée par le frottement  $\vec{f}_s$  ( $\vec{f}_s = m\vec{a}_{CM}$ ).
- La décélération de rotation  $\vec{\alpha}$  est propulsée par la force du frein  $\vec{f}_{frein}$ , mais ralentie le frottement  $\vec{f}_s$  ( $\tau_s - \tau_{frein} = -I_{CM}\alpha$ ,  $\tau_{frein} > \tau_f$ ).
- Nous avons la relation suivante :  $v_{CM} = r\omega$  et  $a_{CM} = r\alpha$

## Exercices

**4.7.2** *Le temps pour faire un quart de tour.* Une tige mince homogène de 5 kg dont la longueur est de 2 m peut tourner autour de son centre. Si elle est initialement immobile et qu'on lui applique un moment de force de 10 N·m, combien de temps prendra-t-elle pour faire un quart de tour ?

**4.7.3** *Une accélération plus grande que l'accélération de chute libre.* Une tige mince homogène de 2 kg, dont la longueur est de 50 cm, est fixée à une de ses extrémités par une charnière; elle tombe en pivotant sous l'effet de son propre poids (schéma ci-contre). Déterminez (a) l'accélération angulaire de la tige à l'instant où elle fait un angle  $\theta = 30^\circ$  par rapport à l'horizontale et (b) le module de l'accélération tangentielle de la particule **P** située à l'extrémité libre de la tige.



## Solutions

### 4.7.2 *Le temps pour faire un quart de tour.*

Inertie de la tige :

$$I_z = \frac{1}{12}ML^2 \Rightarrow I_z = \frac{1}{12}(5)(2)^2 \Rightarrow \boxed{I_z = 1,667 \text{ kg m}^2}$$

Évaluer l'accélération angulaire :

$$\sum \tau = I_z \alpha \Rightarrow (10) = (1,667)\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = 6 \text{ rad/s}^2}$$

Avec les équations de la cinématique :

$$\begin{aligned} \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 &\Rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right) = (0) + (0)t + \frac{1}{2}(6) t^2 \\ &\Rightarrow t^2 = \frac{\pi}{6} \\ &\Rightarrow \boxed{t = 0,724 \text{ s}} \end{aligned}$$

### 4.7.3 *Une accélération plus grande que l'accélération de chute libre.*

Évaluons l'inertie de la tige par rapport au pivot :

$$I_z = \frac{1}{3}ML^2 \Rightarrow I_z = \frac{1}{3}(2)(0,5)^2 \Rightarrow \boxed{I_z = 0,1667 \text{ kg m}^2}$$

Évaluons le moment de force exercé par la force gravitationnelle par rapport au pivot lorsque la tige fait un angle  $\theta = 30^\circ$  par rapport à l'horizontale :

$$\begin{aligned} \tau_{mg} = \pm r F \sin(\theta) &\Rightarrow \tau_{mg} = +r(mg)\sin(\theta) && (F = mg) \\ &\Rightarrow \tau_{mg} = (0,50/2)(2)(9,8)\sin(180^\circ - 60^\circ) \\ &\Rightarrow \boxed{\tau_{mg} = 4,244 \text{ Nm}} \end{aligned}$$

Évaluons l'accélération angulaire  $\alpha_z$  de la tige à  $30^\circ$  par rapport à l'horizontale :

$$\begin{aligned} \sum \tau_z = I_z \alpha_z &\Rightarrow \tau_{mg} = I_z \alpha_z \\ &\Rightarrow (4,244) = (0,1667)\alpha_z \\ &\Rightarrow \boxed{\alpha_z = 25,46 \text{ rad/s}^2} \quad \text{(a)} \end{aligned}$$

Évaluons l'accélération tangentielle au bout de la tige :

$$a_T = r\alpha \Rightarrow a_T = (0,50)(25,46) \Rightarrow \boxed{a_T = 12,73 \text{ m/s}^2} \quad \text{(b)}$$











# Chapitre 4.8 – L'énergie, le travail et la puissance en rotation

## Une roue qui roule *sans glisser*

Une roue qui roule *sans glisser* sur une surface de contact permet à celle-ci d'effectuer une translation et une rotation. On peut évaluer l'énergie cinétique de la roue de deux façons différentes selon la façon que l'on interprète la rotation de la roue :



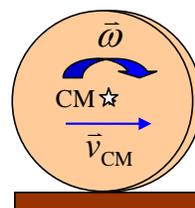
Moto unicycle électrique

- 1) Rotation de la roue autour de son centre de masse et translation du centre de masse par rapport au sol. Le centre de masse définit un **axe de rotation mobile**.

Énergie cinétique :

$$K = \frac{1}{2} m v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$$

où  $K_{translation} = \frac{1}{2} m v_{CM}^2$  et  $K_{rotation} = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2$



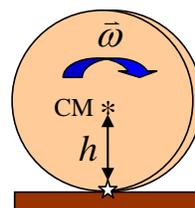
- Inertie de rotation ( $I_{CM}$ ) et énergie cinétique de rotation  $K_{rotation}$  par rapport au centre de masse, car le corps tourne à une vitesse angulaire  $\bar{\omega}$ .
- Inertie de translation ( $m$ ) et énergie cinétique de translation  $K_{translation}$ , car le centre de masse est en mouvement à vitesse  $\bar{v}_{CM}$ .

- 2) Rotation de la roue autour du point de contact au sol. Ce point de contact définit un **axe de rotation fixe**.

Énergie cinétique :

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

où  $I$  : Inertie par rapport à un axe fixe ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )



- L'inertie de rotation ( $I$ ) est maximale et il y a énergie cinétique de rotation  $K_{rotation}$ , car le corps tourne à une vitesse angulaire  $\bar{\omega}$ .
- Il n'y a pas d'énergie cinétique de translation, car le corps tourne autour d'un axe fixe situé au point de contact au sol.
- Il faut imaginer l'axe de rotation se déplacer au rythme du centre de masse de la roue pour sans accorder à cette translation une énergie cinétique de translation.

**P.S.** Dans les deux cas, le corps tourne avec la même vitesse angulaire  $\bar{\omega}$  quel que soit la position de l'axe de rotation.

## Énergie cinétique d'un corps en rotation

L'énergie cinétique  $K$  d'un corps en rotation peut être évaluée par rapport à un axe de rotation fixe ou par rapport à un axe en mouvement passant par le centre de masse du corps :

Énergie cinétique autour d'un axe fixe	Énergie cinétique par rapport au centre de masse
$K = \frac{1}{2} I \omega^2$	$K = \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{\text{CM}}^2$

où  $K$  : Énergie cinétique du corps (J)

$I$  : Moment d'inertie du corps par rapport à un axe de rotation fixe ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )

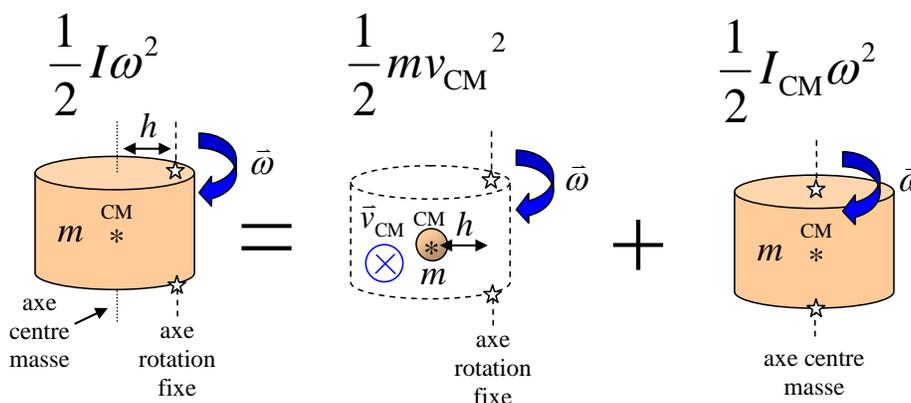
$I_{\text{CM}}$  : Moment d'inertie du corps par rapport à son centre de masse ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )

$\omega$  : Vitesse angulaire du corps (rad/s)

$m$  : Masse total du corps (kg)

$v_{\text{CM}}$  : Vitesse de translation du centre de masse du corps (m/s)

En d'autres mots, on peut visualiser l'expression de l'énergie cinétique grâce au schéma ci-dessous :



### Preuve :

Considérons un corps de moment d'inertie  $I$  tournant sur lui-même par rapport à un axe fixe quelconque à une vitesse angulaire  $\bar{\omega}$ . Utilisons le théorème des axes parallèles pour mesurer l'énergie cinétique  $K$  par rapport à un axe de rotation passant par le centre de masse CM situé à une distance  $h$  de l'axe précédent :

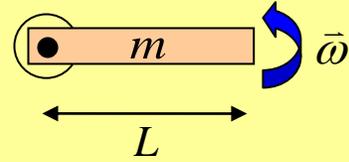
$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} (m h^2 + I_{\text{CM}}) \omega^2 \quad (\text{Théorème axes parallèles : } I = m h^2 + I_{\text{CM}})$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} m h^2 \omega^2 + \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2 \quad (\text{Distribution})$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} m (h \omega)^2 + \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2 \quad (\text{Réécriture})$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} m v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2 \quad \blacksquare \quad (\text{Vitesse centre de masse : } v_{\text{CM}} = h \omega)$$

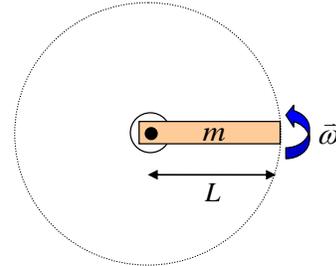
**Situation 1 : L'énergie cinétique d'une tige qui tourne autour de son extrémité.** Une tige homogène de masse  $m$  et de longueur  $L$  est fixée à une de ses extrémités à une charnière immobile (voir schéma ci-contre). Elle tourne avec une vitesse angulaire constante  $\omega$ . On désire déterminer son énergie cinétique.



1) Énergie cinétique de rotation à partir de son extrémité :

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

- $I = \frac{1}{3} mL^2$  (voir table d'inertie)



Évaluons l'énergie cinétique de la tige :

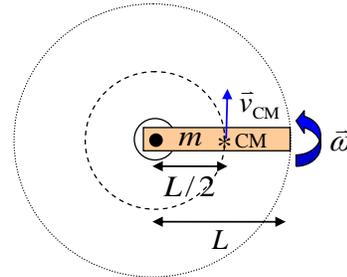
$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{3} mL^2 \right) \omega^2 \quad (\text{Remplacer } I = \frac{1}{3} mL^2)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K = \frac{1}{6} mL^2 \omega^2} \quad (\text{Calcul})$$

2) Énergie cinétique de translation et de rotation à partir du centre de masse :

$$K = \frac{1}{2} m v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2$$

- $I_{\text{CM}} = \frac{1}{12} mL^2$  (voir table d'inertie)
- $v_{\text{CM}} = r\omega$



Évaluons l'énergie cinétique de la tige

$$K = \frac{1}{2} m v_{\text{CM}}^2 + \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} m (r\omega)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{12} mL^2 \right) \omega^2 \quad (\text{Remplacer termes})$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2} m \left( \frac{L}{2} \right)^2 \omega^2 + \frac{1}{24} mL^2 \omega^2 \quad (\text{Remplacer } r = \frac{L}{2})$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{8} mL^2 \omega^2 + \frac{1}{24} mL^2 \omega^2 \quad (\text{Calculs})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K = \frac{1}{6} ML^2 \omega^2} \quad (\text{Simplification})$$

On vérifie ainsi que nous pouvons évaluer l'énergie cinétique à l'aide du théorème des axes parallèles.

## Travail en rotation

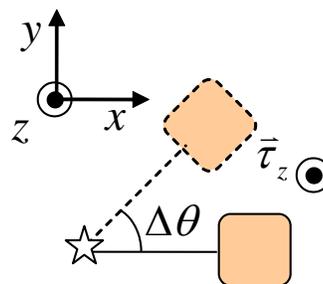
Le **travail**  $W$  est le processus de **transformation de l'énergie** causé par l'application d'un **moment de force**  $\tau_z$  sur un objet effectuant une rotation  $\Delta\theta$ . Seule la composante du moment de **force** qui est perpendiculaire au plan de rotation effectue un travail. Voici l'expression scalaire du travail en rotation :

$$W = \tau_z \Delta\theta$$

où  $W$  : Travail effectué par le moment de force (J)

$\tau_z$  : Moment de force perpendiculaire au plan de rotation (N·m)

$\Delta\theta$  : Rotation effectuée par le corps (rad)



### Preuve :

Considérons un corps qui subit une force  $\vec{F}$  parallèle à un déplacement  $\vec{s}$  le long d'une trajectoire circulaire de rayon  $r$  ce qui génère un travail  $W$ . Réécrivons l'expression du travail en fonction du moment de force associé à la force  $\vec{F}$  et à la rotation  $\Delta\theta$  du corps par rapport à l'axe de rotation :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

$\Rightarrow W = F s \cos(0^\circ)$  (Force  $F$  parallèle au déplacement  $s$ )

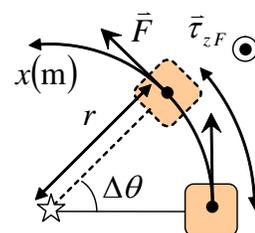
$\Rightarrow W = F(\Delta x)$  (Remplacer  $s = \Delta x$ )

$\Rightarrow W = F(r\Delta\theta)$  (Relation linéaire-angulaire :  $x = r\theta$  et  $\Delta x = r\Delta\theta$ )

$\Rightarrow W = (rF)\Delta\theta$  (Réécriture, regrouper  $rF$ )

$\Rightarrow W = rF \sin(90^\circ)\Delta\theta$  (Angle entre  $r$  et  $F$  est de  $90^\circ$ )

$\Rightarrow W = \tau \Delta\theta$  ■ (Moment de force selon l'axe  $z$  :  $\tau_z = \pm r F \sin(\theta)$ )



## Puissance en rotation

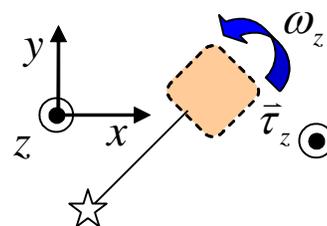
Lorsqu'une force applique un moment de force  $\tau_z$  parallèlement à l'axe de rotation d'un corps tournant à une vitesse angulaire  $\omega_z$ , celle-ci génère une puissance égale à l'expression suivante :

$$P = \tau_z \omega_z$$

où  $P$  : Puissance générée par le moment de force (W)

$\tau_z$  : Moment de force perpendiculaire au plan de rotation (N·m)

$\omega_z$  : Vitesse de rotation du corps (rad)

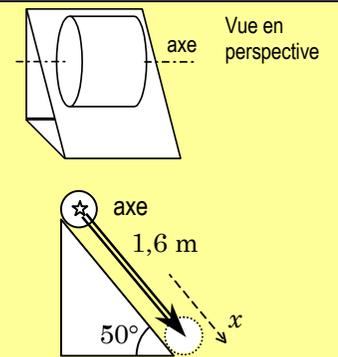


Preuve :

À partir du travail en rotation  $W$ , évaluons la puissance en rotation  $P$  en effectuant une variation dans le temps du travail :

$$\begin{aligned}W = \tau_z \Delta\theta &\Rightarrow \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}(\tau_z \Delta\theta) \\&\Rightarrow P = \frac{d}{dt}(\tau_z \Delta\theta) && \text{(Définition de la puissance : } P = \frac{dW}{dt} \text{)} \\&\Rightarrow P = \tau_z \frac{d}{dt}(\Delta\theta) && \text{(Suppose } \tau_z \text{ constant durant } dt \text{ infinitésimal)} \\&\Rightarrow P = \tau_z \omega \quad \blacksquare\end{aligned}$$

**Situation 2 : L'énergie cinétique d'un cylindre qui roule.** À la situation 3 de la section 4.7, on voulait connaître l'accélération angulaire d'un cylindre ( $R = 20 \text{ cm}$ ,  $m = 12 \text{ kg}$ ,  $I_{CM} = 0,24 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ) qui roule *sans glisser* vers le bas d'un plan incliné à  $50^\circ$  par rapport à l'horizontale (schémas ci-dessous) : on a trouvé  $\alpha = 25 \text{ rad/s}^2$  et  $f = 30,02 \text{ N}$ . On désire calculer l'énergie cinétique acquise par le cylindre lorsqu'il roule à partir du repos sur une distance de  $1,6 \text{ m}$  mesurée le long du plan incliné par (a) dynamique et par (b) conservation de l'énergie.



Nous pouvons évaluer l'accélération de translation du centre de masse  $a_x$  grâce à l'accélération angulaire  $\alpha$  :

$$\begin{aligned}a_x = r\alpha &\Rightarrow a_x = (0,2)(25) && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\&\Rightarrow \boxed{a_x = 5 \text{ m/s}^2} && \text{(Évaluer } a_x \text{)}\end{aligned}$$

Évaluons la vitesse de translation du centre de masse  $v_x$  après avoir parcouru une distance de  $1,6 \text{ m}$  à l'aide des équations du MUA :

$$\begin{aligned}v_x^2 = v_{x0}^2 + 2a_x(x - x_0) &\Rightarrow v_x^2 = (0)^2 + 2(5)(1,6) - (0) && \text{(Remplacer valeurs num.)} \\&\Rightarrow v_x^2 = 16 && \text{(Calcul)} \\&\Rightarrow \boxed{v_x = 4 \text{ m/s}} && \text{(Évaluer } v_x \text{)}\end{aligned}$$

Puisque le cylindre roule sans glisser, on peut évaluer la vitesse angulaire  $\omega$  associée à une vitesse de translation de  $4 \text{ m/s}$  : ( $v_{CR} = v_x$ )

$$\begin{aligned}v_{CR} = r\omega &\Rightarrow (4) = (0,20)\omega \\&\Rightarrow \boxed{\omega = 20 \text{ rad/s}}\end{aligned}$$

Nous pouvons évaluer l'énergie cinétique du cylindre en rotation et translation :

$$K = \frac{1}{2}mv_{CM}^2 + \frac{1}{2}I_{CM}\omega^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}(12)(4)^2 + \frac{1}{2}(0,24)(20)^2$$

$$\Rightarrow K = (96J) + (48J)$$

$$\Rightarrow \boxed{K = 144 J} \quad (\mathbf{a})$$

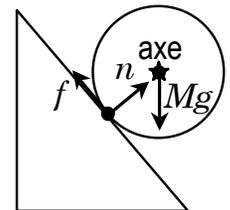
Nous pouvons également vérifier l'énergie cinétique du cylindre par conservation de l'énergie :

Conditions initiales	Conditions finales	Schéma
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>y_i = 1,6 \sin(50^\circ) = 1,226 \text{ m}</math></li> <li>• <math>\omega_i = 0</math></li> <li>• <math>v_{CMi} = 0</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>y_f = 0 \text{ m}</math></li> <li>• <math>\omega_f = 20 \text{ rad/s}</math></li> <li>• <math>v_{CMf} = 4 \text{ m/s}</math></li> </ul>	

On peut évaluer quelques termes d'énergies en exploitant le fait que le cylindre roule sans glisser ce qui permet d'exploiter la relation  $\Delta x_{CR} = r\Delta\theta$  : ( $m = 12 \text{ kg}$ ,  $I = 0,24 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ,  $f = 30,02 \text{ N}$ )

- $K_i = 0$
- $U_{gi} = mgy_i = (12)(9,8)(1,226) \Rightarrow \boxed{U_{gi} = 144 J}$
- $U_{gf} = mgy_f = (12)(9,8)(0) \Rightarrow \boxed{U_{gf} = 0}$
- $W_{f(\text{trans})} = fs \cos(\theta) = (30,02)(1,6)\cos(180^\circ) \Rightarrow \boxed{W_{f(\text{trans})} = -48,03 J}$
- $W_{f(\text{rot})} = +\tau_f \Delta\theta = (rf) \left( \frac{\Delta x_{CR}}{r} \right) = (30,02)(1,6) \Rightarrow \boxed{W_{f(\text{rot})} = +48,03 J}$

$W_f = 0$  On constate que le frottement qui effectue un travail de translation pour réduire l'accélération de translation a également effectué un travail de rotation pour augmenter l'accélération angulaire. La somme des travaux est nul. Après tout, le frottement ne permet pas d'augmenter l'énergie cinétique du système, mais permet de la redistribuer entre la translation et la rotation.



Évaluons l'énergie cinétique (translation et rotation) par conservation de l'énergie :

$$E_f = E_i + W_{nc} \Rightarrow U_{gf} + K_f = U_{gi} + K_i + W_f$$

$$\Rightarrow (0) + K_f = (144) + (0) + (0)$$

$$\Rightarrow \boxed{K_f = 144 J} \quad \blacksquare \quad \text{ce qui correspond à } K_{\text{trans}} = 96 \text{ J plus } K_{\text{rot}} = 48 \text{ J}$$

## Exercice

**4.8.2** *L'énergie d'une sphère qui descend un plan incliné.* Une sphère pleine de 15 cm de rayon dont la masse est égale à 5 kg est initialement au repos en haut d'un plan de 10 m de longueur incliné à  $20^\circ$  par rapport à l'horizontale. Elle roule sans glisser jusqu'en bas du plan. (a) Calculez son énergie cinétique totale lorsqu'elle arrive en bas du plan. (b) Quelle est l'énergie cinétique de rotation lorsqu'elle arrive en bas du plan? (c) Combien de tours sur elle-même a-t-elle fait en descendant le plan?

## Solution

**4.8.2** *L'énergie d'une sphère qui descend un plan incliné.*

Moment d'inertie d'une sphère plein par rapport à son centre de masse :

$$I_{\text{CM}} = \frac{2}{5}MR^2 \quad \Rightarrow \quad I_{\text{CM}} = \frac{2}{5}(5)(0,15)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_{\text{CM}} = 0,045 \text{ kg m}^2}$$

Avec la conservation de l'énergie :

$$\begin{array}{lll} y_i = 10 \sin(20^\circ) = 3,42 \text{ m} & v_i = 0 & \omega_i = 0 \\ y_f = 0 & v_f = ? & \omega_f = ? \end{array}$$

a) Énergie cinétique totale en bas du plan incliné

$$\begin{aligned} E_f &= E_i + W_{nc} & \Rightarrow & \quad K_f + U_f = K_i + U_i + W_{nc} \\ & & \Rightarrow & \quad K_f = U_i & (K_i = 0, U_f = 0, W_{nc} = 0) \\ & & \Rightarrow & \quad K_f = mgy_i = (5)(9,8)(3,42) \\ & & \Rightarrow & \quad \boxed{K_f = 167,58 \text{ J}} \end{aligned}$$

b) Énergie cinétique de rotation

$$\begin{aligned}K &= K_{\text{CM rot}} + K_{\text{CM trans}} &\Rightarrow K_f &= \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega_f^2 + \frac{1}{2} m v_f^2 \\& &\Rightarrow K_f &= \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega_f^2 + \frac{1}{2} m (r \omega_f)^2 && (v = r \omega) \\& &\Rightarrow K_f &= \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega_f^2 + \frac{1}{2} m r^2 \omega_f^2 \\& &\Rightarrow K_f &= \left( \frac{1}{2} I_{\text{CM}} + \frac{1}{2} m r^2 \right) \omega_f^2 \\& &\Rightarrow \omega_f &= \sqrt{\frac{K_f}{\left( \frac{1}{2} I_{\text{CM}} + \frac{1}{2} m r^2 \right)}} \\& &\Rightarrow \omega_f &= \sqrt{\frac{(167,58)}{\frac{1}{2}(0,045) + \frac{1}{2}(5)(0,15)^2}} \\& &\Rightarrow \omega_f &= 46,13 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

Avec la vitesse angulaire, on peut évaluer l'énergie cinétique de rotation :

$$\begin{aligned}K_{\text{CM rot}} &= \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2 &\Rightarrow K_{\text{CM rot } f} &= \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega_f^2 = \frac{1}{2} (0,045)(46,13)^2 \\& &\Rightarrow K_{\text{CM rot } f} &= 47,88 \text{ J}\end{aligned}$$

c) Nombre de tours effectués durant la descente :

$$\begin{aligned}x &= r \theta &\Rightarrow \theta &= \frac{x}{r} = \frac{(10)}{(0,15)} \\& &\Rightarrow \theta &= 66,6 \text{ rad}\end{aligned}$$

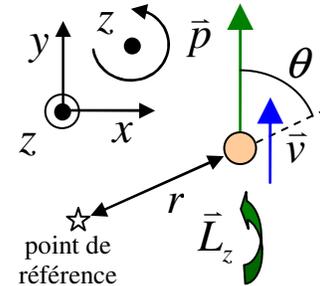
Ce qui nous donne le nombre de tours suivant :

$$N = 66,6 \text{ rad} \times \frac{1 \text{ tour}}{2\pi \text{ rad}} \Rightarrow N = 10,61 \text{ tours}$$

# Chapitre 4.9 – La conservation du moment cinétique

## Moment cinétique d'une particule selon l'axe z

Le moment cinétique  $L_z$  d'une particule mesure la quantité de mouvement dans le plan  $xy$  qui est en rotation autour d'un point de référence. Le module du moment cinétique  $L_z$  est égal à la distance  $r$  dans le plan  $xy$  entre le point de référence et la particule multiplié par la quantité de mouvement  $p$  de la particule dans le plan  $xy$  et multiplié par le sinus de l'angle  $\theta$  entre  $r$  et  $p$  dans le plan  $xy$  :



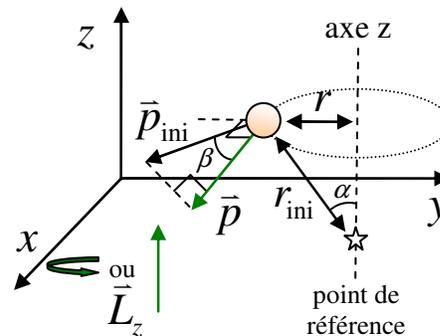
$$L_z = \pm r p \sin(\theta) \quad \text{et} \quad p = mv$$

- où
- $L_z$  : Moment cinétique de la particule selon l'axe z ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ )
  - $r$  : Distance dans le plan  $xy$  entre le point de référence et la particule (m)
  - $p$  : Module de la quantité de mouvement de la particule dans le plan  $xy$  ( $\text{kg} \cdot \text{m/s}$  ou  $\text{Ns}$ )
  - $\theta$  : Angle dans le plan  $xy$  entre  $r$  et  $p$
  - $\pm$  : Sens de la rotation selon l'axe z du moment cinétique

Lorsque l'angle $\theta = 90^\circ$ , le moment cinétique $L_z$ associée à la quantité de mouvement $p$ est maximale :	Lorsque l'angle $\theta = 0^\circ$ , le moment cinétique $L_z$ associée à la quantité de mouvement $p$ est nul :

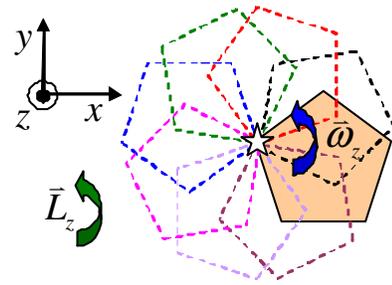
Encore une fois, il est important de rappeler que le moment cinétique  $L_z$  mesure uniquement la quantité de mouvement  $p$  dans le plan  $xy$  à tourner autour de l'axe  $z$  passant par le point de référence (voir schéma ci-contre) :

- $r = r_{\text{ini}} \cos(\alpha)$
- $p = p_{\text{ini}} \cos(\beta)$



## Moment cinétique d'un corps selon l'axe z

Le moment cinétique  $L_z$  d'un corps permet d'évaluer la quantité d'inertie de rotation dans le plan  $xy$  en rotation autour d'un point de référence. Le moment cinétique  $L_z$  d'un corps est égal à l'inertie de rotation  $I$  du corps mesurée par rapport à l'axe  $z$  passant par le point de référence multiplié par la vitesse angulaire  $\omega_z$  :



$$L_z = I\omega_z$$

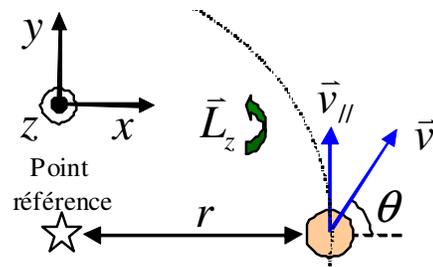
où  $L_z$  : Moment cinétique de l'objet en rotation autour de l'axe  $z$  passant par le point de référence ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ )

$I$  : Inertie de l'objet en rotation autour de l'axe  $z$  passant par le point de référence ( $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ )

$\omega_z$  : Vitesse angulaire de rotation de l'objet autour de l'axe  $z$  ( $\text{rad/s}$ )

### Preuve :

Développons à partir de la définition du moment cinétique  $L_z$  d'une particule une expression pour le moment cinétique faisant intervenir la notion de l'inertie de rotation  $I$  et de la vitesse angulaire  $\omega_z$  :



$$L_z = r p \sin(\theta)$$

$$\Rightarrow L_z = r(mv)\sin(\theta) \quad (\text{Remplacer } p = mv)$$

$$\Rightarrow L_z = m r v \sin(\theta) \quad (\text{Réécriture})$$

$$\Rightarrow L_z = m r (v_{\parallel}) \quad (\text{Remplacer } v_{\parallel} = v \sin(\theta))$$

$$\Rightarrow L_z = m r (r \omega_z) \quad (\text{Remplacer } v_{\parallel} = r \omega_z)$$

$$\Rightarrow L_z = m r^2 \omega_z \quad (\text{Réécriture})$$

$$\Rightarrow L_z = I \omega_z \quad \blacksquare \quad (\text{Remplacer } I = m r^2)$$

## La 2<sup>e</sup> loi de Newton en rotation selon l'axe z avec le moment cinétique

La 2<sup>e</sup> loi de Newton en rotation selon l'axe z peut être réécrite à l'aide de la définition du moment cinétique  $L_z$ . Sous cette forme, cette loi permet plus facilement de mettre en relation l'influence d'un moment de force  $\tau_z$  et la modification de son état de rotation mesuré en moment cinétique  $L_z$  :

$$\tau_z = \frac{dL_z}{dt}$$

où  $\tau_z$  : Moment de force appliquée (N · m)

$dL_z$  : Variation du moment cinétique (kg · m<sup>2</sup>/s)

$dt$  : Temps écoulé durant la variation du moment cinétique (s)

Preuve :

À partir de la définition du moment cinétique d'une particule, appliquons la dérivée par rapport au temps de chaque côté de l'équation afin de faire intervenir la notion de moment de force  $\tau_z$  :

$$\begin{aligned} L_z = \pm r p \sin(\theta) &\Rightarrow \frac{d}{dt} L_z = \frac{d}{dt} \pm r p \sin(\theta) && \text{(Appliquer la dérivée } \frac{d}{dt} \text{)} \\ &\Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = \pm r \sin(\theta) \frac{dp}{dt} && \text{(Factoriser constante)} \\ &\Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = \pm r \sin(\theta) F && \text{(2<sup>e</sup> loi de Newton : } F = dp/dt \text{)} \\ &\Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = \tau_z \quad \blacksquare && \text{(Moment de force : } \tau_z = \pm r F \sin(\theta) \text{)} \end{aligned}$$

## Principe de conservation du moment cinétique selon l'axe z

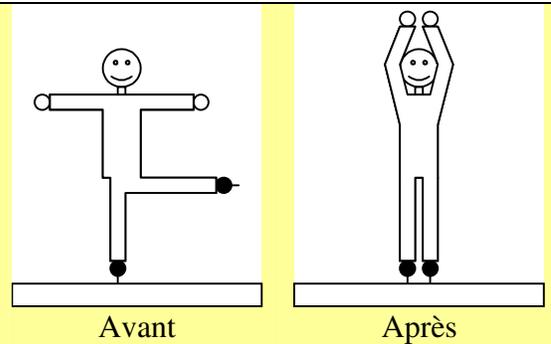
Le moment cinétique  $L_z$  d'un corps est conservé lorsque la somme des moments de force  $\tau_z$  extérieure au système est égale à zéro. Ce principe de conservation est comparable à la conservation de la quantité de mouvement sauf qu'il est évalué en rotation par rapport à un point de référence :

$$\begin{aligned} \sum \tau_{z \text{ ext}} = 0 &\Rightarrow \sum L_z = \text{constante} \\ &\Rightarrow \sum L_{z f} = \sum L_{z i} \end{aligned}$$



Une vrille en patinage artistique est un bon exemple de conservation du moment cinétique

**Situation 1 : La physique du patinage artistique.** Un patineur tourne sur lui-même avec une de ses jambes et ses bras perpendiculaire à son corps (schéma ci-contre) : sa vitesse angulaire vaut 8 rad/s et son moment d'inertie vaut  $3,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ . En ramenant sa jambe à la verticale et en levant ses bras au-dessus de sa tête (schéma ci-contre), il diminue son moment d'inertie à  $1,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  et sa vitesse angulaire augmente pour atteindre 18 rad/s.



On désire analyser cette manœuvre à l'aide du principe de conservation du moment cinétique et du principe de conservation de l'énergie.

Évaluons le moment cinétique du patineur avant ( $i$ ) et après ( $f$ ) :

$$L_z = I\omega_z \quad \Rightarrow \quad L_{zi} = I_i \omega_{zi} = (3,6)(8) \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_{zi} = 28,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}}$$

$$L_{zf} = I_f \omega_{zf} = (1,6)(18) \quad \Rightarrow \quad \boxed{L_{zf} = 28,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}}$$

Cette situation est **physiquement acceptable**, car il y a conservation du moment cinétique en l'absence de force extérieure :

$$L_{zi} = L_{zf}$$

Évaluons l'énergie cinétique du patineur avant ( $i$ ) et après ( $f$ ) :

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad \Rightarrow \quad K_i = \frac{1}{2} I_i \omega_i^2 = \frac{1}{2} (3,6)(8)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_i = 115 \text{ J}}$$

$$K_f = \frac{1}{2} I_f \omega_f^2 = \frac{1}{2} (1,6)(18)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{K_f = 259 \text{ J}}$$

Dans cette situation, il n'y a pas conservation de l'énergie cinétique :

$$K_i \neq K_f$$

Évaluons à l'aide du principe de conservation de l'énergie le travail  $W_{nc}$  effectué sur le patineur entre la situation avant et après : ( $E = K$ )

$$E_f = E_i + W_{nc} \quad \Rightarrow \quad (259) = (115) + W_{nc} \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W_{nc} = 144 \text{ J}} \quad (\text{Évaluer } W_{nc} )$$

Le **patineur** effectue un **travail de 144 J** pour **rapprocher** ses **bras** et sa **jambe** près de lui ce qui se transforme sous forme d'énergie cinétique. Ce travail est cohérent, car les forces des bras et de la jambe du patineur sont orientées dans le sens de l'accélération centripète.

**Situation A : Un ballon qui roule à vitesse constante.** Un ballon homogène de masse  $m = 1,5 \text{ kg}$  et de rayon  $R = 5 \text{ cm}$  roule horizontalement sur le sol *sans glisser* à une vitesse constante de  $5 \text{ m/s}$ . On désire évaluer le moment cinétique de translation du centre de masse du ballon par rapport au point initial de contact au sol **(a)** au début du mouvement et **(b)**  $0,4$  seconde après avoir lancé le ballon. Vérifier qu'il y a conservation du moment cinétique. **(P.S. Garder plusieurs chiffres significatifs dans les calculs.)**



Évaluons la quantité de mouvement du ballon :

$$p = mv \quad \Rightarrow \quad p = (1,5)(5) \quad \Rightarrow \quad \boxed{p = 7,5 \text{ kg} \cdot \text{m/s}}$$

Évaluons le moment cinétique selon l'axe  $z$  du ballon initialement : ( $r = R = 0,05 \text{ m}$ )

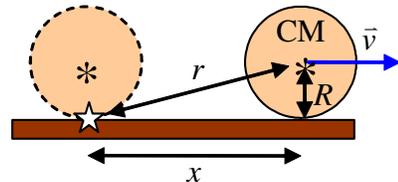
$$\begin{aligned} L_z = \pm r p \sin(\theta) &\Rightarrow L_z = (0,05)(7,5)\sin(90^\circ) \\ &\Rightarrow \boxed{L_{zi} = 0,375 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}} \quad \text{(a)} \end{aligned}$$

Évaluons la position du ballon à  $0,4 \text{ s}$  à l'aide de l'équation du MUA :

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \Rightarrow x = (0) + (5)(0,4) + \frac{1}{2}(0)(3)^2 \Rightarrow \boxed{x = 2 \text{ m}}$$

Évaluons la distance  $r$  entre la position du point de référence (position initiale au sol) et la position finale du ballon :

$$\begin{aligned} r = \sqrt{R^2 + x^2} &\Rightarrow r = \sqrt{(0,05)^2 + (2)^2} \\ &\Rightarrow \boxed{r = 2,000625 \text{ m}} \end{aligned}$$



Évaluons l'angle  $\theta$  entre  $r$  et  $p$  à la position finale :

$$\tan(\theta) = \frac{R}{x} \Rightarrow \tan(\theta) = \frac{(0,05)}{(2,000625)} \Rightarrow \boxed{\theta = 1,43165^\circ}$$

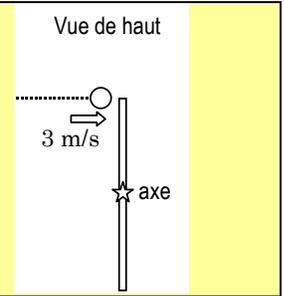
Évaluons le moment cinétique selon l'axe  $z$  du ballon à  $0,4 \text{ s}$  : ( $r = 2,000625 \text{ m}$ )

$$\begin{aligned} L_z = \pm r p \sin(\theta) &\Rightarrow L_z = (2,000625)(7,5)\sin(1,43165^\circ) \\ &\Rightarrow \boxed{L_{zf} = 0,3749 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}} \quad \text{(b)} \end{aligned}$$

Il y a conservation du moment cinétique, car le **moment de force extérieure total**  $\tau_{z\text{ext}}$  exercé sur le ballon est  **nul**  puisque la gravité est annulée par la force normale et le frottement est inexistant, car le ballon roule à vitesse constante. Ainsi, une **trajectoire rectiligne à vitesse constante** respecte la **conservation de moment cinétique** :

$$\sum L_{zf} = \sum L_{zi}$$

**Situation 2 : Une boule percute une tige.** Une petite boule de mastic de 20 g percute l'extrémité d'une tige mince homogène immobile de 120 g dont la longueur est de 1 m ; la tige peut tourner autour d'un axe fixe vertical perpendiculaire à elle-même passant par son centre. La boule frappe la tige avec une vitesse horizontale perpendiculaire à la tige dont le module est égal à 3 m/s (voir schéma ci-contre); après l'impact, la boule reste collée à la tige. On désire déterminer la vitesse angulaire de la tige immédiatement après l'impact.



Évaluons le moment cinétique de la boule avant la collision : (sens horaire +)

$$L_z = \pm r p \sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad L_z = \pm r (mv) \sin(\theta) \quad (\text{Remplacer } p = mv)$$

$$\Rightarrow \quad L_z = \pm (0,5)(0,02)(3) \sin(90^\circ) \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_{zBi} = 0,03 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}} \quad (\text{Évaluer } L_z = L_{zBi})$$

Évaluons le moment cinétique du système avant la collision :

$$L_{zi} = L_{zBi} + L_{zTi} \quad \Rightarrow \quad L_{zi} = (0,03) + (0) \quad (\text{Tige immobile : } L_{zTi} = 0)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_{zi} = 0,03 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}} \quad (\text{Évaluer } L_{zi})$$

Évaluons l'inertie de la boule au lieu de la collision comme une masse ponctuelle :

$$I_B = m_B r_B^2 \quad \Rightarrow \quad I_B = (0,02)(0,5)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_B = 0,005 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

Évaluer l'inertie de la tige tournant sur un axe passant par son centre :

$$I_T = \frac{1}{12} m_T L_T^2 \quad \Rightarrow \quad I_T = \frac{1}{12} (0,12)(1)^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{I_T = 0,01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

Évaluons la vitesse angulaire du système immédiatement après l'impact à l'aide de la conservation du moment cinétique selon l'axe  $z$  :

$$L_{zf} = L_{zi} \quad \Rightarrow \quad (L_{zBf} + L_{zTf}) = L_{zi} \quad (\text{Remplacer } L_{zf} = L_{zBf} + L_{zTf})$$

$$\Rightarrow \quad (I_B \omega_{zBf}) + (I_T \omega_{zTf}) = L_{zi} \quad (\text{Remplacer } L_z = I \omega_z)$$

$$\Rightarrow \quad I_B (\omega_z) + I_T (\omega_z) = L_{zi} \quad (\omega_z = \omega_{zBf} = \omega_{zTf})$$

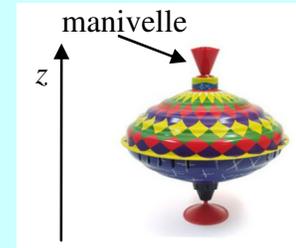
$$\Rightarrow \quad (I_B + I_T) \omega_z = L_{zi} \quad (\text{Factoriser } \omega_z)$$

$$\Rightarrow \quad ((0,005) + (0,01)) \omega_z = (0,03) \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

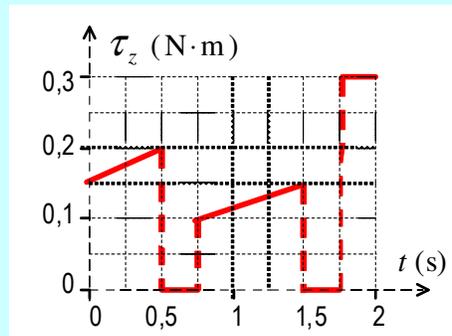
$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_z = 2 \text{ rad/s}}$$

Il est important de préciser que la **force exercée par l'axe de rotation** sur la tige **n'est pas nulle**, mais qu'elle n'applique aucun moment de force par rapport à l'axe de rotation puisque  $r = 0$ . Cette force permet par contre de satisfaire la conservation de la quantité de mouvement  $\vec{p}_i = \vec{p}_f = 0$  sur la tige, car la tige n'effectue pas de translation avant ni après la collision.

**Situation A : Une toupie jouet qui tourne.** Albert fait tourner une toupie de 350 g initialement immobile autour de l'axe  $z$  en poussant contre une manivelle ce qui applique un moment de force sur la toupie (voir schéma ci-contre). Lorsque la manivelle est complètement enfoncée, Albert tire dessus ce qui n'influence pas la rotation de la toupie. Par rapport à l'axe  $z$ , l'inertie de rotation de la toupie est égale à  $0,006 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ .



On désire déterminer la vitesse angulaire finale de la toupie sachant qu'Albert pousse trois fois sur la manivelle et que le moment de force en newton-mètres en fonction du temps en secondes appliqué sur la toupie est représenté à l'aide du graphique ci-dessous :



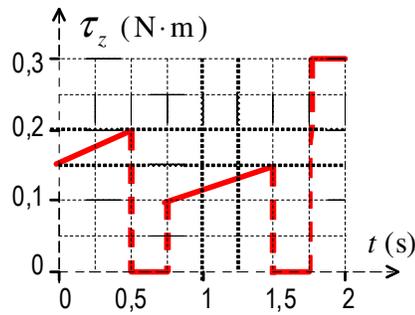
À partir de la 2<sup>ème</sup> loi de Newton en rotation selon l'axe  $z$ , développons une équation permettant d'utiliser la notion de moment de force non constant :

$$\begin{aligned} \tau_z &= \frac{dL_z}{dt} && \Rightarrow && \tau_z dt = dL_z && \text{(Isoler } dL_z \text{)} \\ &&& \Rightarrow && \int_{t=0}^t \tau_z dt = \int_{L_z=L_{z0}}^{L_z} dL_z && \text{(Appliquer l'intégrale de } t=0 \rightarrow t \text{)} \\ &&& \Rightarrow && [L_z]_{L_{z0}}^{L_z} = \int_{t=0}^t \tau_z dt && \text{(Résoudre l'intégrale selon } L_z \text{)} \\ &&& \Rightarrow && L_z - L_{z0} = \int_{t=0}^t \tau_z dt && \text{(Évaluer l'intégrale selon } L_z \text{)} \\ &&& \Rightarrow && \boxed{L_z = \int_{t=0}^t \tau_z dt} && \text{(Toupie immobile à } t=0 : L_{z0} = 0 \text{)} \end{aligned}$$

Ce calcul nous permet de réaliser que :

$$\Delta L_z = \int_{t=t_i}^t \tau_z dt = \text{aire sous la courbe du graphique } \tau_z(t)$$

Évaluons l'aire sous la courbe du graphique  $\tau_z(t)$  :

Aire sous la courbe : $A = \frac{(h + H)}{2} B$	Rappel du graphique $\tau_z(t)$ :
<p>1<sup>ière</sup> poussée :  <math>\Delta L_{z1} = \frac{((0,15) + (0,2))}{2} (0,5) = 0,0875 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}</math></p> <p>2<sup>ième</sup> poussée :  <math>\Delta L_{z2} = \frac{((0,1) + (0,015))}{2} (0,75) = 0,09375 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}</math></p> <p>3<sup>ième</sup> poussée :  <math>\Delta L_{z3} = (0,3)(0,25) = 0,075 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}</math></p>	

Évaluons le moment cinétique finale  $L_z$  à partir de l'équation démontrée précédemment :

$$L_z = \int_{t=0}^t \tau_z dt \quad \Rightarrow \quad L_z = \Delta L_{z1} + \Delta L_{z2} + \Delta L_{z3} \quad (\text{Évaluer aire sous la courbe})$$

$$\Rightarrow \quad L_z = (0,0875) + (0,09375) + (0,075) \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_z = 0,25625 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}} \quad (\text{Évaluer } L_z)$$

Évaluons la vitesse angulaire finale à partir de la définition du moment cinétique d'un corps :

$$L_z = I\omega_z \quad \Rightarrow \quad (0,25625) = (0,006)\omega_z \quad (\text{Remplacer valeurs num.})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_z = 42,71 \text{ rad/s}} \quad (\text{Évaluer } \omega_z = 6,80 \text{ tours/s})$$

## Exercices

**4.9.3 Un enfant saute sur un tourniquet.** Dans un parc pour enfants, un enfant de 30 kg court à 4 m/s vers un immobile et saute tangentiellement sur le rebord. On assimile l'enfant à une particule et le tourniquet à un disque (cylindre) homogène de 3 m de rayon dont la masse vaut 150 kg. **(a)** Quelle est l'énergie cinétique initiale de l'enfant? **(b)** Quelle est la vitesse angulaire finale du tourniquet? **(c)** Quelle est l'énergie cinétique finale du système composé du tourniquet et de l'enfant?

**4.9.4 Un enfant saute sur un tourniquet, prise 2.** Dans la situation de l'exercice 4.9.3, une fois que l'enfant a sauté sur le rebord du tourniquet, il se déplace vers le centre du tourniquet et se met debout en plein centre. **(a)** Quelle est la nouvelle vitesse angulaire du système? **(b)** Quelle est désormais l'énergie cinétique du système? **(c)** D'où provient la différence entre les énergies cinétiques trouvées en 4.9.3(c) et 4.9.4(b)?

## Solutions

### 4.9.3 Un enfant saute sur un tourniquet.

a) Énergie cinétique initiale de l'enfant :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}(30)(4)^2 \Rightarrow \boxed{K = 240 \text{ J}}$$

b) Évaluer la vitesse angulaire finale du tourniquet :

L'enfant possède par rapport au centre du tourniquet une vitesse angulaire tel que :

$$v = r\omega \Rightarrow \omega_{e i} = \frac{v}{r} = \frac{(4)}{(3)} = 1,\bar{3} \text{ rad/s}$$

Évaluons le moment d'inertie de l'enfant et du tourniquet par rapport au centre du tourniquet :

$$I_e = mr^2 \Rightarrow I_e = (30)(3)^2 \Rightarrow \boxed{I_e = 270 \text{ kg m}^2}$$

$$I_t = \frac{1}{2}MR^2 \Rightarrow I_t = \frac{1}{2}(150)(3)^2 \Rightarrow \boxed{I_t = 675 \text{ kg m}^2}$$

Avec la conservation du moment cinétique, évaluons la vitesse angulaire finale du tourniquet :

$$\left(\sum \vec{\tau}_{ext} = 0\right)$$

$$\begin{aligned} L_f = L_i &\Rightarrow L_{e f} + L_{t f} = L_{e i} + L_{t i} \\ &\Rightarrow I_e \omega_{e f} + I_t \omega_{t f} = I_e \omega_{e i} + I_t \omega_{t i} \\ &\Rightarrow (I_e + I_t)\omega_f = I_e \omega_{e i} \quad (\omega_{t i} = 0, \omega_{e f} = \omega_{t f} = \omega_f) \\ &\Rightarrow \omega_f = \frac{I_e \omega_{e i}}{(I_e + I_t)} = \frac{(270)(1,\bar{3})}{(270) + (675)} \\ &\Rightarrow \boxed{\omega_f = 0,381 \text{ rad/s}} \end{aligned}$$

Énergie cinétique totale du système composé de l'enfant de du tourniquet :

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{2}I\omega^2 &\Rightarrow K = \frac{1}{2}(I_e + I_t)\omega^2 = \frac{1}{2}((270) + (675))(0,381)^2 \\ &\Rightarrow \boxed{K = 68,59 \text{ J}} \end{aligned}$$

#### 4.9.4 Un enfant saute sur un tourniquet, prise 2.

Rappel :  $I_e = 270 \text{ kg m}^2$  et  $I_t = 675 \text{ kg m}^2$

a) Après déplacement de l'enfant, quelle est la nouvelle vitesse angulaire :

Appliquons la conservation du moment cinétique, car :  $\sum \vec{\tau}_{ext} = 0$

$$\begin{aligned}L_f &= L_i &\Rightarrow & L_{ef} + L_{tf} = L_{ei} + L_{ti} \\& &\Rightarrow & I_{ef} \omega_{ef} + I_{tf} \omega_{tf} = I_{ei} \omega_{ei} + I_{ti} \omega_{ti} \\& &\Rightarrow & I_t \omega_{tf} = (I_{ei} + I_t) \omega_i \quad (I_{ef} = 0, I_{ti} = I_{tf} = I_t, \omega_{ei} = \omega_{ti} = \omega_i) \\& &\Rightarrow & \omega_{tf} = \frac{(I_{ei} + I_t) \omega}{I_t} \\& &\Rightarrow & \omega_{tf} = \frac{((270) + (675))(0,381)}{(675)} \\& &\Rightarrow & \boxed{\omega_{tf} = 0,533 \text{ rad/s}}\end{aligned}$$

b) Nouvelle énergie cinétique du système :

$$\begin{aligned}K &= \frac{1}{2} I \omega^2 &\Rightarrow & K = \frac{1}{2} (I_{ef} + I_{tf}) \omega_f^2 = \frac{1}{2} ((0) + (675))(0,533)^2 \\& &\Rightarrow & \boxed{K = 95,88 \text{ J}}\end{aligned}$$

c) Énergie P2. c)  $K = 68,59 \text{ J}$   
Énergie P3. b)  $K = 95,88 \text{ J}$

L'enfant effectue un travail avec ses muscles pour se déplacer vers le centre du tourniquet. Cette force est dans le sens de l'accélération centripète.











