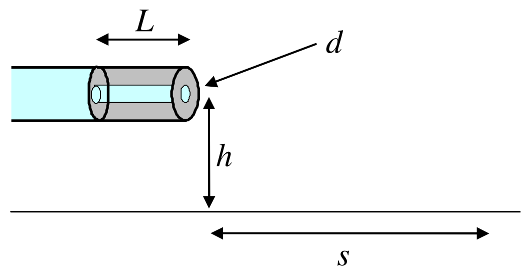
Problème de révision : Le boyau d'arrosage

Un boyau d'arrosage est aligné horizontalement à une hauteur $h = 0{,}8\ \text{m}$ du sol et à une distance $s = 1{,}5\ \text{m}$ d'un feu de bois. Une différence de pression $\Delta P = 22\ \text{Pa}$ est appliquée entre les deux extrémités du boyau et celui-ci est rempli d'eau de viscosité $\eta = 0{,}001\ \text{Ns/m}^2$.

Afin de régulariser la vitesse de sortie de l'eau pour arroser <u>exactement</u> à l'emplacement du feu de bois, le boyau possède une embouchure dont le diamètre est ajustable. L'embouchure possède une longueur $L = 5\ \text{cm}$ et un diamètre d variant entre 0 et 8 cm (0 cm correspond à la fermeture du boyau).



Évaluez le temps requis pour arroser le feu avec 2 litres d'eau. On suppose que l'écoulement de l'eau est laminaire[1] dont la loi de résistivité hydraulique de Poiseuille est valide et que la résistance du boyau (à l'exception de l'embouchure) est négligeable. (**Rép :** $\Delta t = 2{,}541\ \text{s}$)

[1]En réalité, ce type d'écoulement est turbulent selon le critère du nombre de Reynolds. Ainsi, la résistance hydraulique de Poiseuille n'est plus une bonne approximation.

Solution : Le boyau de pompier

Évaluons le temps chute de le d'une hauteur h :

$$y = y_0 + v_{y0}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \Rightarrow \quad (0) = (h) + (0)t + \frac{1}{2}(-g)t^2 \qquad \text{(Remplacer variables)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t = \sqrt{\frac{2h}{g}}} \qquad \text{(Isoler } t\text{))}$$

$$\Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2(0{,}8)}{(9{,}8)}} \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{t = 0{,}4041\ \text{s}} \qquad \text{(Temps de chute)}$$

Évaluons la vitesse initiale horizontale à partir du temps de chute t et de la distance horizontale s :

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \Rightarrow \quad (s) = (0) + v_{x0}t + \frac{1}{2}(0)t^2 \qquad \text{(Remplacer variables)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{x0} = \frac{s}{t}} \qquad \text{(Isoler } v_{x0}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v_{x0} = \frac{(1{,}5)}{(0{,}4041)} \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{x0} = 3{,}712\ \text{m}} \qquad \text{(Vitesse initiale)}$$

Évaluons l'expression du débit à partir de la vitesse initiale et de la section de surface du boyau de rayon toujours inconnu R : ($d = 2r$)

$$D = Av \qquad \Rightarrow \quad \boxed{D_{surface} = \pi r^2 v} \qquad \text{(Remplacer } A = \pi r^2\text{)}$$

Puisque le débit dépend du rayon du boyau, évaluons une autre expression du débit à partir de la loi de Poiseuille :

$$\Delta P = -RD \qquad \Rightarrow \quad \Delta P = -\left(\frac{8\eta L}{\pi r^4}\right)D \qquad \text{(Remplacer } R = \frac{8\eta L}{\pi r^4}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{D_{pression} = -\frac{\pi r^4 \Delta P}{8\eta L}} \qquad \text{(Isoler } D\text{)}$$

Évaluons le rayon du tuyau en égalisant nos deux expressions menant au débit.

$$D_{surface} = D_{pression} \quad \Rightarrow \quad \pi r^2 v = -\frac{\pi r^4 \Delta P}{8\eta L} \qquad \text{(Remplacer } D_{surface} \text{ et } D_{pression}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \pi v = \frac{\pi r^2 |\Delta P|}{8\eta L} \qquad \text{(Simplifier } r^2 \text{ et } \Delta P < 0\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r = \sqrt{\frac{8\eta L v}{|\Delta P|}}} \qquad \text{(Isoler } r\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad r = \sqrt{\frac{8(0{,}001)(0{,}05)(3{,}712)}{|22|}} \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{r = 8{,}215\times10^{-3}\ \text{m}} \qquad \text{(Évaluer } r,\ r = 0{,}822\ \text{cm)}$$

Évaluons le débit à partir du rayon de l'embouchure :

$$D = Av \quad \Rightarrow \quad D = (\pi r^2)v \qquad \text{(Remplacer } A = \pi r^2\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad D = \pi(8.215\times10^{-3})^2(3{,}712) \qquad \text{(Remplacer valeurs num.)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{D = 7{,}870\times10^{-4}\ \text{m}^3/\text{s}} \qquad \text{(Évaluer } D\text{)}$$

Changement d'unité de litre à m^3 :

$$2\ \text{L} = 2\ \text{L}\times\frac{1000\ \text{mL}}{1\ \text{L}}\times\frac{1\ \text{cm}^3}{1\ \text{mL}}\times\left(\frac{1\ \text{m}}{100\ \text{cm}}\right)^3 = 2\times10^{-3}\ \text{m}^3$$

Évaluons le temps requis pour arroser le feu avec 2 litres d'eau :

$$D = \frac{dV}{dt} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{\Delta V}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta t = \frac{\Delta V}{D}}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t = \frac{(2\times10^{-3})}{(7{,}870\times10^{-4})}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta t = 2{,}541\ \text{s}}$$

Remarque :

Le rayon influence la vitesse de sortie par la section de surface ($D = Av$), mais influence également le débit par la résistance hydraulique ($\Delta P = -RD$). Réduire le rayon réduit la surface (augmente la vitesse), mais augmente la résistance (réduit le débit et donc la vitesse).