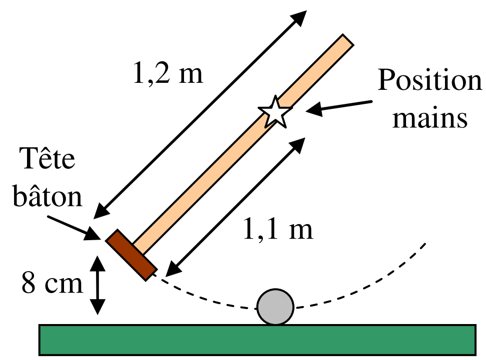
Problème de révision : Le putt

Un golfeur désire faire rouler sa balle de golf de 45 g et de 2,1 cm de rayon situé sur un vert (zone où le gazon est coupé très fin ce qui permet à la balle de rouler adéquatement) en direction du trou. Le trou est situé sur un plateau à 20 cm au-dessus de la balle.

Pour réaliser son coup, le golfeur utilise son putter (bâton utilisé pour réaliser ce type de coup) de la façon suivante :

On peut approximer le putter comme étant une tige homogène de 200 g et de 1,2 m de longueur dont l'extrémité est un bloc mince de 250 g pouvant être considéré comme un corps ponctuel lors du calcul du moment d'inertie. Il tient son bâton à 1,1 m de la tête du bâton et positionne la tête du bâton à 8 cm du sol. Par la suite, il laisse tomber son bâton en rotation autour de ses mains situées au-dessus de la balle tel qu'illustré sur le schéma ci-contre.



Évaluez la vitesse de la balle lorsqu'elle aura atteint la hauteur du plateau sachant que le bâton effectue une <u>collision élastique</u> sur la balle. On fait l'approximation qu'après la collision, la balle roule *sans glisser* instantanément sans perte d'énergie.

<u>Remarque :</u> Un joueur de golf expérimenté utilisera ses épaules comme axe de rotation plutôt que la position de ses mains sur le bâton, car la position verticale de l'axe sera plus facile à maintenir immobile. De plus, le mouvement du bâton est également influencé par d'autres forces qui ralenti le mouvement (forces musculaires).

Solution : Le putt

Évaluons le moment d'inertie de la tête du bâton à partir de l'expression d'une masse ponctuelle :

$$I = mr^2 \quad \Rightarrow \quad I = (0{,}250)(1{,}1)^2 \quad \boxed{I_{\text{tête}} = 0{,}3025 \ \text{kg}\cdot\text{m}^2}$$

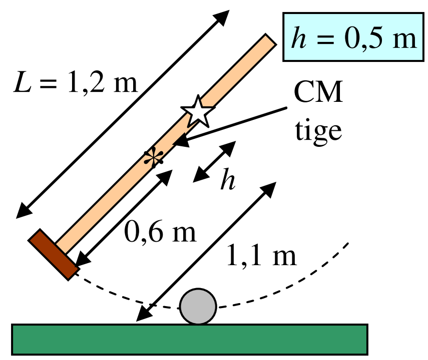
Évaluons le moment d'inertie de la tige B du bâton à partir de l'expression du moment d'inertie par rapport au centre de masse et du théorème des axes parallèles :

$$I = mh^2 + I_{CM}$$

$$\Rightarrow \quad I = mh^2 + \left(\frac{1}{12}mL^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad I = (0{,}200)(0{,}5)^2 + \frac{1}{12}(0{,}200)(1{,}2)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_{\text{tige}} = 0{,}074 \ \text{kg}\cdot\text{m}^2}$$



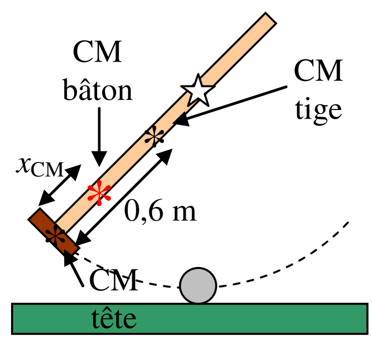
Évaluons la position du centre de masse du bâton par rapport à la tête du bâton :

$$x_{CM} = \frac{\sum m_i x_i}{m_{\text{tot}}}$$

$$\Rightarrow \quad x_{CM} = \frac{m_{\text{tête}}x_{\text{tête}} + m_{\text{tige}}x_{\text{tige}}}{m_{\text{tête}} + m_{\text{tige}}}$$

$$\Rightarrow \quad x_{CM} = \frac{(0{,}250)(0) + (0{,}200)(0{,}6)}{(0{,}250) + (0{,}200)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_{CM} = 0{,}2667 \ \text{m}}$$



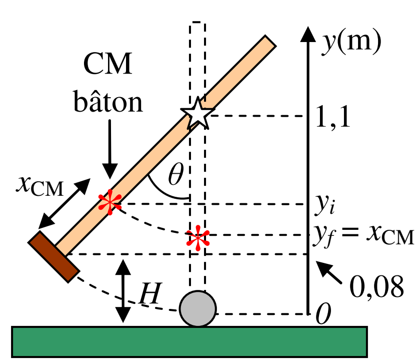
Évaluons l'angle d'inclinaison du bâton par rapport à la verticale initialement :

$$y = L(1 - \cos(\theta))$$

$$\Rightarrow \quad \cos(\theta) = 1 - \frac{y}{L}$$

$$\Rightarrow \quad \cos(\theta) = 1 - \frac{(0{,}08)}{(1{,}1)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta = 21{,}99°}$$



Évaluons la position <u>initiale</u> du centre de masse du bâton par rapport au sol avant de le laisser « tomber » :

$$y_i = H + x_{\text{CM}} \cos(\theta) \quad \Rightarrow \quad y_i = (0{,}08) + (0{,}2667)\cos(21{,}99°)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y_i = 0{,}3273 \text{ m}}$$

Évaluons la position <u>finale</u> du centre de masse du bâton par rapport au sol tout juste avant le contact avec la balle :

$$y_f = x_{\text{CM}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_f = 0{,}2667 \text{ m}}$$

Évaluons la masse totale du bâton :

$$m_{\text{B}} = m_{\text{tige}} + m_{\text{tête}} \quad \Rightarrow \quad m_{\text{B}} = (0{,}200) + (0{,}250)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{m_{\text{B}} = 0{,}450 \text{ kg}}$$

Évaluons le moment d'inertie total du bâton :

$$I_{\text{B}} = I_{\text{tige}} + I_{\text{tête}} \quad \Rightarrow \quad I_{\text{B}} = (0{,}3025) + (0{,}074)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_{\text{B}} = 0{,}3765 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$

Évaluons la vitesse angulaire par l'énergie cinétique du bâton avant la collision à l'aide de la conservation de l'énergie :

$$E_f = E_i + W_{nc} \quad \Rightarrow \quad K_{\text{B}f} + U_{\text{B}gf} = U_{\text{B}gi}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2} I_{\text{B}} \omega^2\right) + (m_{\text{B}} g y_{\text{B}f}) = (m_{\text{B}} g y_{\text{B}i})$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(0{,}3765)\omega^2 + (0{,}450)(9{,}8)(0{,}2667) = (0{,}450)(9{,}8)(0{,}3273)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_{\text{B}f} = 1{,}191 \text{ rad/s}}$$

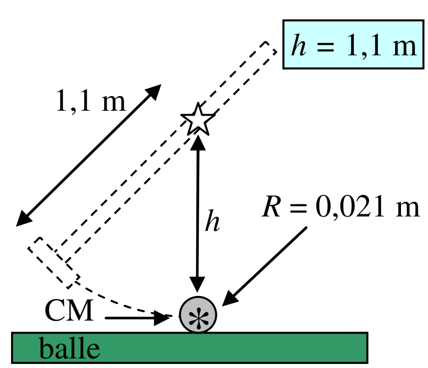
Évaluons le moment d'inertie de la balle par rapport à l'axe de rotation comme étant une sphère pleine homogène à l'aide du théorème des axes parallèles :

$$I = mh^2 + I_{\text{CM}}$$

$$\Rightarrow \quad I = m_{\text{b}} h^2 + \left(\frac{2}{5} m_{\text{b}} R^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad I = (0{,}045)(1{,}1)^2 + \frac{2}{5}(0{,}045)(0{,}021)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_{\text{b}} = 0{,}05446 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}$$



Puisque la collision est élastique, appliquons la conservation du moment cinétique par rapport aux mains du golfeur (car $\sum \tau_z = 0$ par rapport à ce point durant la collision) et la conservation de l'énergie cinétique lors de la collision : (B : bâton, b : balle)

Conservation du moment cinétique selon l'axe z :

$$\sum L_f = \sum L_i \quad \Rightarrow \quad L_{\mathrm{B}\,f} + L_{\mathrm{b}\,f} = L_{\mathrm{B}\,i} + L_{\mathrm{b}\,i}$$

$$\Rightarrow \quad I_{\mathrm{B}}\omega_{\mathrm{B}\,f} + I_{\mathrm{b}}\omega_{\mathrm{b}\,f} = I_{\mathrm{B}}\omega_{\mathrm{B}\,i} + I_{\mathrm{b}}\omega_{\mathrm{b}\,i}$$

$$\Rightarrow \quad I_{\mathrm{B}}\omega_{\mathrm{B}\,f} + I_{\mathrm{b}}\omega_{\mathrm{b}\,f} = I_{\mathrm{B}}\omega_{\mathrm{B}\,i} \qquad (\omega_{\mathrm{b}\,i} = 0)$$

$$\Rightarrow \quad (0{,}3765)\omega_{\mathrm{B}\,f} + (0{,}05446)\omega_{\mathrm{b}\,f} = (0{,}3765)(1{,}191)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{0{,}3765\omega_{\mathrm{B}\,f} + 0{,}05446\omega_{\mathrm{b}\,f} = 0{,}4484} \qquad \textbf{(1)}$$

Conservation de l'énergie cinétique :

$$\sum K_f = \sum K_i \quad \Rightarrow \quad K_{\mathrm{B}\,f} + K_{\mathrm{b}\,f} = K_{\mathrm{B}\,i} + K_{\mathrm{b}\,i}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}I_{\mathrm{B}}\omega_{\mathrm{B}\,f}^{\ 2} + \frac{1}{2}I_{\mathrm{b}}\omega_{\mathrm{b}\,f}^{\ 2} = \frac{1}{2}I_{\mathrm{B}}\omega_{\mathrm{B}\,i}^{\ 2} + \frac{1}{2}I_{\mathrm{b}}\omega_{\mathrm{b}\,i}^{\ 2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}I_{\mathrm{B}}\omega_{\mathrm{B}\,f}^{\ 2} + \frac{1}{2}I_{\mathrm{b}}\omega_{\mathrm{b}\,f}^{\ 2} = \frac{1}{2}I_{\mathrm{B}}\omega_{\mathrm{B}\,i}^{\ 2} \qquad (\omega_{\mathrm{b}\,i} = 0)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(0{,}3765)\omega_{\mathrm{B}\,f}^{\ 2} + \frac{1}{2}(0{,}05446)\omega_{\mathrm{b}\,f}^{\ 2} = \frac{1}{2}(0{,}3765)(1{,}191)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{0{,}18825\omega_{\mathrm{B}\,f}^{\ 2} + 0{,}02723\omega_{\mathrm{b}\,f}^{\ 2} = 0{,}2670} \qquad \textbf{(2)}$$

Puisque l'on cherche la vitesse de la balle b, isolons la vitesse angulaire du bâton B dans l'expression **(1)** et développons le résultat au carré :

$$0{,}3765\omega_{\mathrm{B}\,f} + 0{,}05446\omega_{\mathrm{b}\,f} = 0{,}4484 \qquad \text{(De } \textbf{(1)}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_{\mathrm{B}\,f} = 1{,}191 - 0{,}14465\omega_{\mathrm{b}\,f}} \qquad \text{(Isoler } \omega_{\mathrm{B}\,f}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \omega_{\mathrm{B}\,f}^{\ 2} = (1{,}191 - 0{,}14465\omega_{\mathrm{b}\,f})^2 \qquad \text{(Mettre au carré)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_{\mathrm{B}\,f}^{\ 2} = 1{,}4185 - 0{,}3446\omega_{\mathrm{b}\,f} + 0{,}02092\omega_{\mathrm{b}\,f}^{\ 2}} \qquad \textbf{(3)} \qquad \text{(Développer le carré)}$$

Remplaçons **(3)** dans **(2)** afin d'isoler la vitesse angulaire de la balle b :

$$0{,}18825\omega_{\mathrm{B}\,f}{}^{2} + 0{,}02723\omega_{\mathrm{b}\,f}{}^{2} = 0{,}2670 \qquad \text{(De (2))}$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}18825\left(1{,}4185 - 0{,}3446\omega_{\mathrm{b}\,f} + 0{,}02092\omega_{\mathrm{b}\,f}{}^{2}\right) + 0{,}02723\omega_{\mathrm{b}\,f}{}^{2} = 0{,}2670 \qquad \text{(Remplacer (3))}$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}2670 - 0{,}06487\omega_{\mathrm{b}\,f} + 0{,}003938\omega_{\mathrm{b}\,f}{}^{2} + 0{,}02723\omega_{\mathrm{b}\,f}{}^{2} = 0{,}2670 \qquad \text{(Distribution)}$$

$$\Rightarrow \quad -0{,}06487\omega_{\mathrm{b}\,f} + 0{,}03117\omega_{\mathrm{b}\,f}{}^{2} = 0 \qquad \text{(Simplifier)}$$

$$\Rightarrow \quad -0{,}06487 + 0{,}03117\omega_{\mathrm{b}\,f} = 0 \qquad \text{(Effet fantôme)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_{\mathrm{b}\,f} = 2{,}0812 \ \ \mathrm{rad/s}} \qquad \text{(Isoler } \omega_{\mathrm{b}\,f}\text{)}$$

<u>Solution algébrique (voir chapitre 3.11) :</u> $\omega_{\mathrm{b}\,f} = \dfrac{2}{1+I_{\mathrm{b/B}}}\omega_{\mathrm{B}\,i}\,, \quad I_{\mathrm{b/B}} = I_{\mathrm{b}} / I_{\mathrm{B}}$

Évaluons l'énergie cinétique de la balle lorsqu'elle aura atteint la hauteur de 20 cm par conservation de l'énergie. On utilise la vitesse angulaire et le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation précédent pour évaluer l'énergie cinétique initiale de la balle lors du mouvement :

$$E_f = E_i + W_{nc} \quad \Rightarrow \quad K_{\mathrm{b}\,f} + U_{\mathrm{b}\,gf} = K_{\mathrm{b}\,i}$$

$$\Rightarrow \quad K_{\mathrm{b}\,f} + \left(m_{\mathrm{b}}\, g y_{\mathrm{b}\,f}\right) = \left(\frac{1}{2} I_{\mathrm{b}} \omega_{\mathrm{b}\,i}{}^{2}\right) \qquad (\, y_{\mathrm{b}\,i} = 0\,)$$

$$\Rightarrow \quad K_{\mathrm{b}\,f} + (0{,}045)(9{,}8)(0{,}20) = \frac{1}{2}(0{,}05446)(2{,}0812)^2 \qquad (\, y_{\mathrm{b}\,f} = 0{,}20 \ \ \mathrm{m}\,)$$

$$\Rightarrow \quad K_{\mathrm{b}\,f} + 0{,}0882 = 0{,}1179$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K_{\mathrm{b}\,f} = 0{,}0297 \ \ \mathrm{J}}$$

<u>Remarque :</u> Après la collision, l'énergie cinétique totale de la balle se transforme en énergie cinétique de translation $K = ½ m v_{\mathrm{CM}}{}^{2}$ et de rotation $K = ½ I_{\mathrm{CM}} \omega^2$ (approximation de l'énoncé). On suppose ici qu'il n'y a pas de perte d'énergie dans le processus de transformation effectué par le frottement de contact au sol. Après ce processus, on peut affirmer que :

$$K = \frac{1}{2} m v_{\mathrm{CM}}{}^{2} + \frac{1}{2} I_{\mathrm{CM}} \omega^2 \qquad \text{et} \qquad v_{x\mathrm{b\,CM}} = r_{\mathrm{b}}\,\omega$$

Il est important de noter que la vitesse angulaire trouvée après la collision va diminuer après la transformation de l'énergie par le frottement statique. Ainsi :

$$\omega_{\text{après collision}} > \omega_{\text{balle qui roule}}$$

Évaluons la vitesse de translation de la balle sachant son énergie cinétique et qu'elle roule *sans glisser* : (rouler *sans glisser* $\Rightarrow \quad v_{\mathrm{CM}} = r\omega$)

$$K = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{CM}}^{2} + \frac{1}{2}I_{\mathrm{CM}}\omega^{2} \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{CM}}^{2} + \frac{1}{2}I_{\mathrm{CM}}\left(\frac{v_{\mathrm{CM}}}{r}\right)^{2} \qquad (v_{\mathrm{CM}} = r\omega)$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}v_{\mathrm{CM}}^{2}\left(m + \frac{I_{\mathrm{CM}}}{r^{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}v_{\mathrm{CM}}^{2}\left(m + \frac{\left(\frac{2}{5}mR^{2}\right)}{r^{2}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad K = \frac{1}{2}v_{\mathrm{CM}}^{2}\left(m + \frac{2}{5}m\right) \qquad (R = r)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{K = \frac{7}{10}mv_{\mathrm{CM}}^{2}}$$

$$\Rightarrow \quad (0{,}0297) = \frac{7}{10}(0{,}045)v_{\mathrm{CM}}^{2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{v_{\mathrm{CM}} = 0{,}9710 \ \mathrm{m/s}}$$

<u>Conclusion :</u>

Le golfeur a bien calculé son coup avec une élévation de 20 cm, car une vitesse finale de 0,9710 m/s est très adéquate pour faire rouler la balle dans le trou sans qu'elle passe au-dessus (scénario qui ce produit si la balle arrive trop vite au trou).