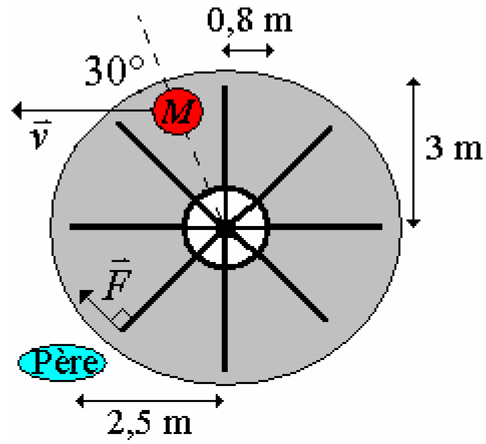
Problème de révision : Le gros tourniquet

Un enfant de 28 kg avec une roche M de 2 kg est situé à 2 m du centre d'un tourniquet tournant à une vitesse angulaire de 0,10 rad/s dans le sens horaire. On approxime l'enfant et la roche comme étant des corps ponctuels.



Le tourniquet est construit de la façon suivante :

Le tourniquet est un disque de bois (σ = 20 kg/m^2) de 3 m de rayon dont un centre de 0,8 m de rayon a été retiré. Il est également muni de 8 tiges d'acier (λ = 10 kg/m) de 2,5 m de longueur et d'un anneau les reliant tous d'un rayon de 0,8 m.

Afin d'augmenter la vitesse de rotation du tourniquet, l'enfant lance la roche avec une vitesse $\vec{v}$ de 30 km/h selon un angle de 30^o tel qu'illustré sur le schéma ci-haut.

a) Évaluez la vitesse angulaire du tourniquet après avoir lancé la roche.

Par la suite, le père de l'enfant applique une force constante de 15 N sur une extrémité d'une tige du tourniquet perpendiculairement à l'axe de la tige sur un demi-tour en courant sur le bord du tourniquet au rythme de la rotation.

b) Évaluez la vitesse angulaire du tourniquet après la poussée du père.

Solution : Le gros tourniquet

<u>Convention :</u> Le sens horaire est le sens positif de la rotation autour de l'axe *z*.

Évaluons la vitesse de la roche en m/s :

$$v = 30\ \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1000}{\text{k}} \times \frac{\text{h}}{60\,\text{min}} \times \frac{\text{min}}{60\,\text{s}} = 8{,}333\ \text{m/s}$$

Évaluons les moments d'inertie de l'enfant et de la roche comme étant des corps ponctuels :

$$I = mr^2 \qquad \Rightarrow \qquad I_{\text{enfant}} = (28)(2)^2 = 112\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{\text{roche}} = (2)(2)^2 = 8\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Évaluons l'expression du moment d'inertie d'un disque à partir de sa masse surfacique σ :

$$I_{\text{disque}} = \frac{1}{2}mR^2 \qquad \Rightarrow \qquad I_{\text{disque}} = \frac{1}{2}(\sigma A)R^2$$

$$\Rightarrow \qquad I_{\text{disque}} = \frac{1}{2}\sigma\left(\pi R^2\right)R^2$$

$$\Rightarrow \qquad I_{\text{disque}} = \frac{1}{2}\sigma\pi R^4$$

Évaluons le moment d'inertie du disque représentant le tourniquet et le trou au centre du tourniquet :

$$I_{\text{disque}} = \frac{1}{2}\sigma\pi R^4 \qquad \Rightarrow \qquad I_{\text{disque sans trou}} = \frac{1}{2}(20)\pi(3)^4 = 2544{,}7\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{\text{trou}} = \frac{1}{2}(-20)\pi(0{,}8)^4 = -12{,}87\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

Évaluons le moment d'inertie des tiges du tourniquet :

$$I_{\text{tige}} = \frac{1}{3}mL^2 \qquad \Rightarrow \qquad I_{\text{tige}} = \frac{1}{3}(\lambda L)L^2$$

$$\Rightarrow \qquad I_{\text{tige}} = \frac{1}{3}\lambda L^3$$

$$\Rightarrow \qquad I_{\text{tige}} = \frac{1}{3}(10)(2{,}5)^2$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{I_{\text{tige}} = 52{,}08\ \text{kg}\cdot\text{m}^2}$$

$$I_{\text{anneau}} = MR^2 \quad \Rightarrow \quad I_{\text{anneau}} = (\lambda 2\pi R)R^2$$

$$\Rightarrow \quad I_{\text{anneau}} = 2\pi\lambda R^3$$

$$\Rightarrow \quad I_{\text{anneau}} = 2\pi(10)(0{,}8)^3$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_{\text{anneau}} = 32{,}17\ \ \text{kg}\cdot\text{m}^2}$$

Évaluons le moment d'inertie du tourniquet :

$$I_{\text{tourniquet}} = I_{\text{disque sans tour}} + I_{\text{trou}} + 8I_{\text{tige}} + I_{\text{anneau}}$$

$$\Rightarrow \quad I_{\text{tourniquet}} = (2544{,}7) + (-12{,}87) + 8(52{,}08) + (32{,}17)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_{\text{tourniquet}} = 2980{,}64\ \ \text{kg}\cdot\text{m}^2}$$

Évaluons le moment d'inertie du tourniquet avec l'enfant :

$$I_{\text{T+E}} = I_{\text{tourniquet}} + I_{\text{enfant}} \Rightarrow \quad I_{\text{T+E}} = (2980{,}64) + (112)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{I_{\text{T+E}} = 3092{,}64\ \ \text{kg}\cdot\text{m}^2}$$

À partir de la conservation du moment cinétique selon l'axe z, évaluons la vitesse angulaire du tourniquet avec enfant (E+T) après avoir lancé la roche :

$$L_f = L_i \quad \Rightarrow \quad L_{\text{T+E}\ f} + L_{\text{roche}\ f} = L_{\text{T+E}\ i} + L_{\text{roche}\ i}$$

$$\Rightarrow \quad (I_{\text{T+E}}\omega_f) + (-r\, p_{\text{roche}\ f}\ \sin(\theta)) = (I_{\text{T+E}}\omega_i) + (I_{\text{roche}}\omega_i)$$

$$\Rightarrow \quad I_{\text{T+E}}\omega_f - r\, m_{\text{roche}} v_{\text{roche}} \sin(\theta) = (I_{\text{T+E}} + I_{\text{roche}})\omega_i$$

$$\Rightarrow \quad (3092{,}64)\omega_f - (2)(2)(8{,}333)\sin(30°) = ((3092{,}64) + (8))(0{,}1)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_f = 0{,}10565\ \ \text{rad/s}} \quad \textbf{(a)}$$

Évaluons le moment de force appliqué par le père sur le tourniquet :

$$\tau_{\text{père}} = \pm r F \sin\theta \quad \Rightarrow \quad \tau_{\text{père}} = +(2{,}5)(15)\sin(90°)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tau_{\text{père}} = 37{,}5\ \ \text{N}\cdot\text{m}}$$

À partir de la conservation de l'énergie, évaluons la vitesse angulaire après l'application du travail effectué par le père sur un arc de cercle de π radians (demi-tour):

$$E_f = E_i + W_{nc} \quad \Rightarrow \quad K_f = K_i + W_{\text{père}}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2} I_{T+E}\omega_f^{\ 2}\right) = \left(\frac{1}{2} I_{T+E}\omega_i^{\ 2}\right) + (\tau_{\text{père}}\Delta\theta)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}(3092{,}64)\omega_f^{\ 2} = \frac{1}{2}(3092{,}64)(0{,}10565)^2 + (37{,}5)(\pi)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\omega_f = 0{,}29555\ \ \text{rad/s}} \quad \textbf{(b)}$$