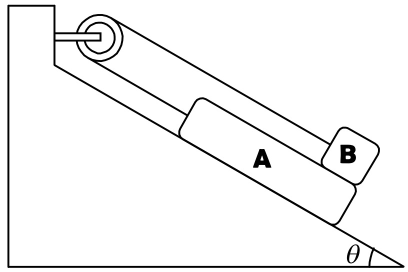
Exercice 2.5.12 *Une beau problème à demander en entrevue pour l'engagement d'un nouveau professeur de physique*

Soit la situation représentée sur le schéma ci-dessous.



Le bloc A, de forme rectangulaire, mesure 40 cm de longueur et a une masse de 1,6 kg. Il est placé sur un plan incliné à $\theta = 30^{o}$ par rapport à l'horizontale. Sur le bloc A, on place un bloc B de forme cubique qui mesure 10 cm de longueur et qui a une masse de 0,4 kg. On relie les blocs par une corde qui passe sur une poulie et on les lâche : on observe que le bloc A glisse vers le bas du plan incliné. Si le coefficient de frottement cinétique entre toutes les surfaces vaut 0,1, calculez le temps pendant lequel le bloc B demeure entièrement supporté par le bloc A. *Indice :* le bloc B doit se déplacer de 30 cm *par rapport* au bloc A, mais les deux blocs bougent en même temps…

Solution :

Avec la 2ième loi de Newton : ($\sum \vec{F} = m\vec{a}$)

Pour A : $\vec{T}_A + m_A\vec{g} + \vec{n}_A + \vec{n}_{BA} + \vec{f}_A + \vec{f}_{BA} = m_A\vec{a}_A$

Pour B : $\vec{T}_B + m_B\vec{g} + \vec{n}_{AB} + \vec{f}_{AB} = m_B\vec{a}_B$

Décomposons nos forces dans le système d'axe *xy* dont l'axe *x* est aligné sur le plan incliné (*x* positif vers la droite) :

Pour A :

$$\sum F_x = -T_A + m_A g\sin\theta - f_A - f_{BA} = m_A a_{xA} \quad \Rightarrow \quad -T_A + m_A g\sin\theta - f_A - f_{BA} = m_A a_{xA} \quad \textbf{(1)}$$

$$\sum F_y = -m_A g\cos\theta + n_A - n_{BA} = m_A a_{yA} = 0 \quad \Rightarrow \quad -m_A g\cos\theta + n_A - n_{BA} = 0 \quad \textbf{(2)}$$

Pour B :

$$\sum F_x = -T_B + m_B g\sin\theta + f_{AB} = m_B\left(-a_{xB}\right) \quad \Rightarrow \quad T_B - m_B g\sin\theta - f_{AB} = m_B a_{xB} \quad \textbf{(3)}$$

$$\sum F_y = -m_B g\cos\theta + n_{AB} = m_B a_{yB} = 0 \quad \Rightarrow \quad -m_B g\cos\theta + n_{AB} = 0 \quad \textbf{(4)}$$

Avec la 3[ième] loi de Newton et la règle des tensions dans la corde de masse négligeable :

$$n_{AB} = n_{BA} = n_B \qquad f_{AB} = f_{BA} \qquad T_A = T_B = T$$

On peut également remplacer le frottement par son expression en fonction de la force normale :

$$f_{AB} = \mu_c n_{AB} = \mu_c n_B \qquad \text{et} \qquad f_A = \mu_c n_A$$

Nos deux accélérations sont de même module :

$$a_{xA} = a_{xB} = a$$

Ceci nous donne les équations suivantes :

$$-T + m_A g \sin\theta - \mu_c n_A - \mu_c n_B = m_A a \qquad \textbf{(1)}$$

$$-m_A g \cos\theta + n_A - n_B = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

$$T - m_B g \sin\theta - \mu_c n_B = m_B a \qquad \textbf{(3)}$$

$$-m_B g \cos\theta + n_B = 0 \qquad \textbf{(4)}$$

On peut évaluer nos normales :

De **(4)** : $-m_B g \cos\theta + n_B = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{n_B = m_B g \cos\theta}$

De **(2)** : $-m_A g \cos\theta + n_A - n_B = 0 \quad \Rightarrow \quad n_A = m_A g \cos\theta + n_B$

$$\Rightarrow \quad n_A = m_A g \cos\theta + m_B g \cos\theta$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{n_A = g\cos\theta\left(m_A + m_B\right)}$$

Évaluons l'accélération de nos blocs en additionnant **(1)** et **(3)** :

$$\underbrace{\left[-T + m_A g \sin\theta - \mu_c n_A - \mu_c n_B\right]}_{\textbf{(1)}} + \underbrace{\left[T - m_B g \sin\theta - \mu_c n_B\right]}_{\textbf{(3)}} = \underbrace{\left[m_A a\right]}_{\textbf{(1)}} + \underbrace{\left[m_B a\right]}_{\textbf{(3)}}$$

$$\Rightarrow \quad m_A g \sin\theta - \mu_c n_A - 2\mu_c n_B - m_B g \sin\theta = \left(m_A + m_B\right)a \qquad \text{(Factoriser } a\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad m_A g \sin\theta - \mu_c g \cos\theta\left(m_A + m_B\right) - 2\mu_c m_B g \cos\theta - m_B g \sin\theta = \left(m_A + m_B\right)a \qquad \text{(Remplacer } n_A \text{ et } n_B\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad g\sin\theta\left(m_A - m_B\right) - \mu_c g \cos\theta\left(m_A + m_B + 2m_B\right) = \left(m_A + m_B\right)a \qquad \text{(Factoriser}$$

$$\Rightarrow \quad g\sin\theta\left(m_A - m_B\right) - \mu_c g \cos\theta\left(m_A + 3m_B\right) = \left(m_A + m_B\right)a \qquad g\sin\theta \text{ et } \mu_c g\cos\theta\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{\sin\theta\left(m_A - m_B\right) - \mu_c \cos\theta\left(m_A + 3m_B\right)}{\left(m_A + m_B\right)} g} \qquad \text{(Isoler } a\text{)}$$

Remplaçons maintenant les valeurs numériques afin d'obtenir l'accélération :

$$a = \frac{\sin\theta(m_A - m_B) - \mu_c \cos\theta(m_A + 3m_B)}{(m_A + m_B)} g$$

$\Rightarrow \quad a = \dfrac{\sin(30°)((1{,}6)-(0{,}4)) - (0{,}1)\cos(30°)((1{,}6)+3(0{,}4))}{((1{,}6)+(0{,}4))}(9{,}8)$ (Remplacer num.)

$\Rightarrow \quad \boxed{a = 1{,}752 \ \text{m/s}^2}$ (Évaluer a)

Avec une équation du MUA :

$$x = x_0 + v_{x0}t + \frac{1}{2}at^2$$

<u>Pour A :</u>

Extrémité gauche de A initiale : $x_{A0} = 0 \ \text{m}$

Extrémité gauche de A finale : $x_A = X$

Vitesse initiale : $v_{xA} = 0 \ \text{m/s}$

Accélération : $a_{xA} = 1{,}752 \ \text{m/s}^2$

Équation : $(X) = (0) + (0)t + \dfrac{1}{2}(1{,}752)t^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{X = 0{,}876t^2}$

<u>Pour B :</u>

Extrémité gauche de B initiale : $x_{B0} = 0{,}4 - 0{,}1 = 0{,}3 \ \text{m}$ (Considération des longueurs)

Extrémité gauche de B finale : $x_B = X$

Vitesse initiale : $v_{xB} = 0 \ \text{m/s}$

Accélération : $a_{xB} = -1{,}752 \ \text{m/s}^2$

Équation : $(X) = (0{,}3) + (0)t + \dfrac{1}{2}(-1{,}752)t^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{X = 0{,}3 - 0{,}876t^2}$

On peut égaliser nos deux équations et résoudre pour t :

$0{,}876t^2 = 0{,}3 - 0{,}876t^2 \quad \Rightarrow \quad 1{,}752t^2 = 0{,}3$

$\Rightarrow \quad t^2 = \dfrac{0{,}3}{1{,}752} = 0{,}171$

$\Rightarrow \quad t = \pm 0{,}414$

$\Rightarrow \quad \boxed{t = 0{,}414 \ \text{s}}$