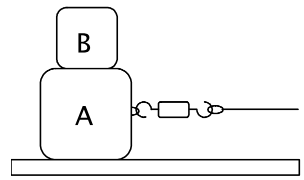
Exercice 2.5.11 *Un bloc sur un autre*

Un bloc **B** de 2 kg est posé sur un bloc **A** de 4 kg. Les deux blocs sont initialement au repos. Si on tire sur le bloc **A** avec une force horizontale *H* de 30 N, calculez les modules des accélérations des blocs **A** et **B** (pendant que le bloc **B** est encore sur le bloc **A**) dans les situations où les coefficients de frottement entre toutes les surfaces valent :

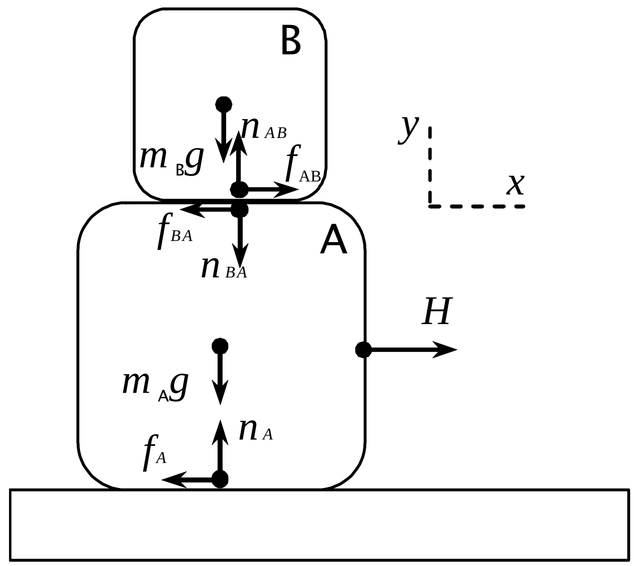


(a) $\mu_s = 0{,}8$ et $\mu_c = 0{,}6$

(b) $\mu_s = 0{,}4$ et $\mu_c = 0{,}3$

(c) $\mu_s = 0{,}2$ et $\mu_c = 0{,}1$

(d) $\mu_s = 0{,}0$ et $\mu_c = 0{,}0$



Solution :

Avec la 2ième loi de Newton : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$

Pour A : $\vec{H} + m_A\vec{g} + \vec{n}_A + \vec{n}_{BA} + \vec{f}_A + \vec{f}_{BA} = m_A\vec{a}_A$

Pour B : $m_B\vec{g} + \vec{n}_{AB} + \vec{f}_{AB} = m_B\vec{a}_B$

Décomposons nos forces dans le système d'axe *xy* classique :

Pour A : $\sum F_x = H - f_A - f_{BA} = m_A a_{xA} \quad \Rightarrow \quad H - f_A - f_{BA} = m_A a_{xA}$ **(1)**

$\sum F_y = -m_A g + n_A - n_{BA} = m_A a_{yA} = 0 \quad \Rightarrow \quad -m_A g + n_A - n_{BA} = 0$ **(2)**

Pour B : $\sum F_x = f_{AB} = m_B a_{xB} \quad \Rightarrow \quad f_{AB} = m_B a_{xB}$ **(3)**

$\sum F_y = -m_B g + n_{AB} = m_B a_{yB} = 0 \quad \Rightarrow \quad -m_B g + n_{AB} = 0$ **(4)**

Par la 3ième loi de Newton :

$$f_{AB} = f_{BA} \qquad n_{AB} = n_{BA}$$

On peut remplacer nos termes de friction par leur expression en fonction de la normale :

$$f_{AB} = \mu_B n_{AB} \qquad f_A = \mu_A n_A$$

Ceci nous donne les équations suivantes :

$$H - \mu_A n_A - \mu_B n_{AB} = m_A a_{xA} \qquad \mathbf{(1)}$$

$$-m_A g + n_A - n_{AB} = 0 \qquad \mathbf{(2)}$$

$$\mu_B n_{AB} = m_B a_{xB} \qquad \mathbf{(3)}$$

$$-m_B g + n_{AB} = 0 \qquad \mathbf{(4)}$$

On peut effectuer quelques manipulations sur l'équation (4) et (2) :

De **(4)** : $-m_B g + n_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{n_{AB} = m_B g}$

De **(2)** : $-m_A g + n_A - n_{AB} = 0 \quad \Rightarrow \quad n_A = n_{AB} + m_A g$

$$\Rightarrow \quad \boxed{n_A = m_B g + m_A g}$$

Évaluer les normales nous permet de réduire notre système d'équation à 2 équations :

De **(1)** : $H - \mu_A(m_B g + m_A g) - \mu_B m_B g = m_A a_{xA}$ (Remplacer n_{AB} et n_A)

De **(3)** : $\mu_B m_B g = m_B a_{xB}$ (Remplacer n_{AB})

Pour faire notre analyse, il sera préférable de faire la manipulation suivante :

$$H - \mu_A(m_B g + m_A g) - \mu_B m_B g = m_A a_{xA}$$

$\Rightarrow \quad H - \mu_A(m_B g + m_A g) - m_B a_{xB} = m_A a_{xA}$ (Remplacer $\mu_B m_B g = m_B a_{xB}$)

$\Rightarrow \quad H - \mu_A g(m_B + m_A) = m_A a_{xA} + m_B a_{xB}$ (Factoriser *g*)

Finalement, voici nos deux équations pour évaluer nos accélérations selon les différentes combinaisons de coefficient de frottement :

De **(1)**, mouvement pour A et B : $\boxed{H - \mu_A g(m_B + m_A) = m_A a_{xA} + m_B a_{xB}}$ **(5)**

De **(3)**, mouvement pour B : $\boxed{\mu_B g = a_{xB}}$ (Simplifier m_B) **(6)**

Voici les différents types de frottement que peuvent subir le bloc A et B :

Bloc A : (sol immobile, $a = 0$)

1) Frottement statique

Si : $H - \mu_s g(m_B + m_A) \le 0$ $(\mu_A = \mu_s,\ f_{s(\max)} > H)$

Accélération : $\boxed{a_{xA} = 0}$ et $\boxed{a_{xB} = 0}$

2) Frottement cinétique

Si : $H - \mu_s g(m_B + m_A) > 0$ $(\mu_A = \mu_s,\ f_{s(\max)} < H)$

Accélération : $\boxed{a_{xA} = \dfrac{H - \mu_c g(m_B + m_A) - m_B a_{xB}}{m_A}}$ (Isoler a_{xA} de **(5)** et $\mu_A = \mu_c$)

Bloc B : (sol accélère, $a = a_{xA}$)

Accélération statique maximale pour B ($\mu_B = \mu_s$) : $a_{xB\ \max} = \mu_s g$ (De **(6)**)

Accélération cinétique pour B ($\mu_B = \mu_c$) : $a_{xB\ cin} = \mu_c g$ (De **(6)**)

1) Frottement statique

Si : $a_{xA} < a_{xB\ \max}$ (Le bloc A n'accélère pas à un rythme trop élevé)

Accélération : $a_{xB} = a_{xA}$

et $H - \mu_A g(m_B + m_A) = m_A a_{xA} + m_B a_{xA}$ (Remplacer $a_{xB} = a_{xA}$ dans **(5)**)

$\Rightarrow$ $\boxed{a_{xA} = \dfrac{H - \mu_A g(m_B + m_A)}{m_A + m_B}}$ (Isoler *a*)

2) Frottement cinétique

Si : $a_{xA} > a_{xB\ \max}$ (Le bloc A accélère trop pour le frottement statique maximale de B)

Accélération : $\boxed{a_{xB} = a_{xB\ cin} = \mu_c g}$

Nous pouvons maintenant répondre aux questions :

a) $\mu_s = 0{,}8$ et $\mu_c = 0{,}6$

Le frottement statique maximal appliqué sur A est plus grand que la force H :

$$H - \mu_s g\left(m_B + m_A\right) \leq 0 \quad \text{car} \quad (30)-(0{,}8)(9{,}8)((2)+(4)) = -17{,}04 < 0$$

Analyse : La force de friction statique maximale domine la force H. Ainsi, rien ne bouge.

Réponse : $\boxed{a_A = 0 \text{ m/s}^2}$ et $\boxed{a_B = 0 \text{ m/s}^2}$

b) $\mu_s = 0{,}4$ et $\mu_c = 0{,}3$

Le frottement statique maximal appliqué sur A est plus petite que la force H :

$$H - \mu_s g\left(m_B + m_A\right) > 0 \quad \text{car} \quad (30)-(0{,}4)(9{,}8)((2)+(4)) = 6{,}48 > 0$$

Alors : $$a_{xA} = \frac{H - \mu_c g\left(m_B + m_A\right) - m_B a_{xB}}{m_A}$$

Évaluons les accélérations caractéristiques de B :

$$a_{xB\ \max} = \mu_s g = (0{,}4)(9{,}8) \quad \Rightarrow \quad a_{xB\ \max} = 3{,}92 \text{ m/s}^2$$
$$a_{xB\ cin} = \mu_c g = (0{,}3)(9{,}8) \quad \Rightarrow \quad a_{xB\ cin} = 2{,}94 \text{ m/s}^2$$

Évaluons l'accélération de A **si** le **frottement sur B était statique** :

$$a_{xA} = \frac{H - \mu_c g\left(m_B + m_A\right)}{m_A + m_B} = \frac{(30)-(0{,}3)(9{,}8)((4)+(2))}{(4)+(2)} \quad \Rightarrow \quad a_{xA} = 2{,}06 \text{ m/s}^2$$

Le frottement appliquée sur B est statique car : $a_{xA} < a_{xB\ \max}$ où $2{,}06 < 3{,}92$

Analyse : Le frottement sur A est cinétique et le frottement sur B est statique. Les deux bloques possèdent la même accélération.

Réponse : $\boxed{a_A = 2{,}06 \text{ m/s}^2}$ et $\boxed{a_B = 2{,}06 \text{ m/s}^2}$

c) $\mu_s = 0{,}2$ et $\mu_c = 0{,}1$

Le frottement statique maximal appliqué sur A est plus petite que la force H :

$H - \mu_s g(m_B + m_A) > 0$ car $(30) - (0{,}2)(9{,}8)((2) + (4)) = 18{,}24 > 0$

Alors : $$a_{xA} = \frac{H - \mu_c g(m_B + m_A) - m_B a_{xB}}{m_A}$$

Évaluons les accélérations caractéristiques de B :

$a_{xB\ \max} = \mu_s g = (0{,}2)(9{,}8) \quad \Rightarrow \quad a_{xB\ \max} = 1{,}96\ \text{m/s}^2$

$a_{xB\ cin} = \mu_c g = (0{,}1)(9{,}8) \quad \Rightarrow \quad a_{xB\ cin} = 0{,}98\ \text{m/s}^2$

Évaluons l'accélération de A **si** le **frottement sur B était statique** :

$$a_{xA} = \frac{H - \mu_c g(m_B + m_A)}{m_A + m_B} = \frac{(30) - (0{,}1)(9{,}8)((4) + (2))}{(4) + (2)} \quad \Rightarrow \quad a_{xA} = 4{,}02\ \text{m/s}^2$$

Le frottement appliquée sur B est cinétique statique car : $a_{xA} > a_{xB\ \max}$ où $4{,}02 < 1{,}96$

Analyse : Le frottement sur A est cinétique et le frottement sur B est cinétique. Les deux bloques possèdent des accélérations différentes.

Réponse : $\boxed{a_B = 0{,}98\ \text{m/s}^2}$

et $$a_{xA} = \frac{H - \mu_c g(m_B + m_A) - m_B a_{xB}}{m_A} = \frac{(30) - (0{,}1)(9{,}8)((2) + (4)) - (2)(0{,}98)}{(4)}$$

$\Rightarrow \quad \boxed{a_A = 5{,}54\ \text{m/s}^2}$

d) $\mu_s = 0{,}0$ et $\mu_c = 0{,}0$

Analyse : Sans frottement, le bloc B ne peut pas subir d'accélération. Le bloc A glisse sans l'influence de B.

Réponse : $\boxed{a_B = 0\ \text{m/s}^2}$

et $$a_{xA} = \frac{H - \mu_c g(m_B + m_A) - m_B a_{xB}}{m_A} = \frac{(30) - (0)(9{,}8)((2) + (4)) - (2)(0)}{(4)}$$

$\Rightarrow \quad \boxed{a_A = 7{,}5\ \text{m/s}^2}$