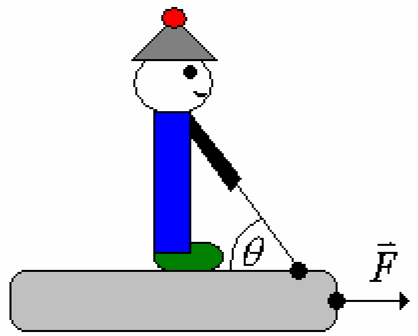
Problème de révision : La luge

Albert fait de la luge sur neige avec ses bottes antidérapantes. La masse d'Albert est de 60 kg et la masse de la luge est de 10 kg. Le coefficient de frottement statique existant entre les bottes d'Albert et la luge est de 0,45 et le coefficient de frottement cinétique existant entre la luge et la neige est de 0,1. Puisque la luge subit une force $\vec{F}$ de 400 N, Albert doit tirer sur une corde avec un angle de $\theta = 60^{o}$ afin de ne pas glisser sur la luge.



a) Évaluez la tension minimale que doit exercer Albert sur la corde afin de ne pas glisser sur la luge.

b) Refaire (a) avec un coefficient de frottement statique $\mu_s = 0,5$.

Solution : La luge

Voici la 2ième loi de Newton appliquée à nos deux corps :

$$\sum \vec{F}_A = m_A \vec{a}_A \qquad \Rightarrow \qquad \vec{T}_A + \vec{n}_{LA} + m_A \vec{g} + \vec{f}_{LA} = m_A \vec{a}_A$$

$$\sum \vec{F}_L = m_L \vec{a}_L \qquad \Rightarrow \qquad \vec{T}_L + \vec{n}_{AL} + m_L \vec{g} + \vec{f}_{AL} + \vec{f}_c + \vec{n} + \vec{F} = m_L \vec{a}_L$$

Décomposons nos forces dans le système d'axe *xy* : (*x* positif (droite), *y* positif (haut))

Pour A :

$$T_A \cos\theta + f_{LA} = m_A a_{xA}$$

$$-T_A \sin\theta + n_{LA} - m_A g = 0 \qquad (a_{yA} = 0)$$

Pour L :

$$-T_L \cos\theta - f_{AL} - f_c + F = m_L a_{xL}$$

$$T_L \sin\theta - n_{AL} - m_L g + n = 0 \qquad (a_{yL} = 0)$$

Avec les relations suivantes :

$T_A = T_L = T$ (Tension égale partout dans une corde de masse négligeable)

$n_{AL} = n_{LA}$ (Action-réaction de la force normale)

$a_{xA} = a_{xL} = a$ (Accélération commune aux deux corps)

$f_{AL} = f_{LA}$ (Action-réaction de la force de frottement statique)

Nous obtenons les équations suivantes :

$$T \cos\theta + f_{AL} = m_A a \qquad (1)$$

$$-T \sin\theta + n_{AL} - m_A g = 0 \qquad (2)$$

$$-T \cos\theta - f_{AL} - f_c + F = m_L a \qquad (3)$$

$$T \sin\theta - n_{AL} - m_L g + n = 0 \qquad (4)$$

À partir de (2) + (4), on peut évaluer la normale *n* :

(2) + (4) $\Rightarrow$ $\left[-T \sin\theta + n_{AL} - m_A g\right] + \left[T \sin\theta - n_{AL} - m_L g + n\right] = [0] + [0]$

$\Rightarrow$ $-m_A g - m_L g + n = 0$

$\Rightarrow$ $n = m_A g + m_L g$ (Isoler *n*)

$\Rightarrow$ $\boxed{n = (m_A + m_L) g}$

À partir de (2), on peut évaluer la normale n_{AL} en fonction de la tension T :

$$-T\sin\theta + n_{AL} - m_A g = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{n_{AL} = m_A g + T\sin\theta}$$

À partir de (1) + (3), on peut évaluer l'accélération du système :

$$(1) + (3) \quad \Rightarrow \quad \left[T\cos\theta + f_{AL}\right] + \left[-T\cos\theta - f_{AL} - f_c + F\right] = \left[m_A a\right] + \left[m_L a\right]$$

$$\Rightarrow \quad -f_c + F = \left(m_A + m_L\right)a$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{-f_c + F}{\left(m_A + m_L\right)} \qquad \text{(Isoler } a\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{-\left(\mu_c n\right) + F}{\left(m_A + m_L\right)} \qquad (f_c = \mu_c n)$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{-\mu_c\left(\left(m_A + m_L\right)g\right) + F}{\left(m_A + m_L\right)} \qquad \text{(Remplacer } n\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{-\mu_c\left(m_A + m_L\right)g + F}{\left(m_A + m_L\right)}}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{-(0{,}1)\left((60) + (10)\right)(9{,}8) + (400)}{\left((60) + (10)\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a = 4{,}734 \ \text{m/s}^2}$$

À partir de (1), nous pouvons évaluer la tension T :

$$T\cos\theta + f_{AL} = m_A a \quad \Rightarrow \quad T\cos\theta + \mu_s n_{AL} = m_A a \qquad (f_{AL} = \mu_s n_{AL})$$

$$\Rightarrow \quad T\cos\theta + \mu_s\left(m_A g + T\sin\theta\right) = m_A a \qquad \text{(Remplacer } n_{AL}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad T\cos\theta + \mu_s m_A g + \mu_s T\sin\theta = m_A a \qquad \text{(Distribuer } \mu_s\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad T\left(\cos\theta + \mu_s\sin\theta\right) = m_A a - \mu_s m_A g \qquad \text{(Factoriser } T\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{m_A a - \mu_s m_A g}{\cos\theta + \mu_s\sin\theta}} \qquad \text{(Isoler } T\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad T = \frac{(60)(4{,}734) - (0{,}45)(60)(9{,}8)}{\cos(60°) + (0{,}45)\sin(60°)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{T = 21{,}85 \ \text{N}} \qquad \text{(a)}$$

Pour répondre à (b), on réalise qu'avec ce coefficient de friction statique, Albert <u>n'a pas besoin de la corde</u> pour garder son équilibre, car la force de friction statique maximale peut permettre une telle accélération.