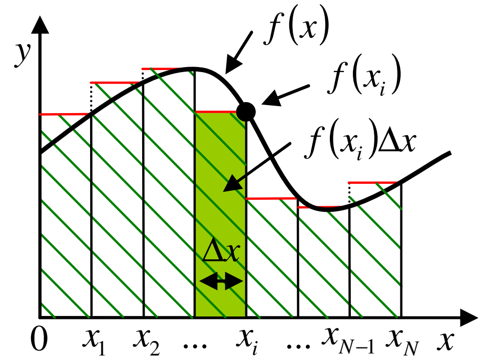
Chapitre 3.3 – L'intégrale d'un polynôme

L'intégrale

L'intégrale $F(x)$ d'une fonction $f(x)$ est égale à l'aire sous la courbe de la fonction $f(x)$ entre $x=0$ et une valeur x arbitraire. Pour évaluer cette aire sous la courbe[1], il suffit de découper la surface en éléments infinitésimaux de surface $f(x)dx$ ($f(x)$: hauteur, dx : largeur) et d'en faire la somme :



$$F(x)=\int f(x)dx$$

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ N\to\infty}}\sum_{i=1}^{N} f(x_i)\Delta x$$

où $F(x)$: Fonction qui donne la valeur de l'aire sous la courbe en tout point de la fonction $f(x)$ entre $x=0$ et x (la somme des aires de tous les rectangles).

$f(x)$: Fonction à intégrer (hauteur du rectangle).

x : Paramètre libre de la fonction $f(x)$ et $F(x)$.

Δx : Variation infinitésimale du paramètre x (largeur des rectangles).

N : Nombre d'élément infinitésimaux de surface $f(x_i)\Delta x$ (nombre de rectangle).

$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ N\to\infty}}$: Expression Δx tend vers zéro et N tend vers l'infini.

N.B. Le symbole ($\int$) désigne une sommation sur un nombre infini de termes de taille infinitésimal.

L'opération inverse de l'intégrale

La dérivée est l'opération inverse de l'intégrale. Ainsi, nous pouvons donner la définition suivante à l'opération de l'intégrale :

$$F(x)=\int f(x)dx \iff f(x)=\frac{d\,F(x)}{dx}$$

où $F(x)$: Fonction primitive de $f(x)$.

$f(x)$: Fonction à intégrer.

[1] Il y a plusieurs variantes de la définition mathématique de l'intégrale d'une fonction $f(x)$.

L'intégrale du polynôme x^2

L'intégrale de la fonction $f(x) = x^2$ est égale à $F(x) = \frac{x^3}{3}$:

$$F(x) = \int f(x)dx = \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3}$$

<u>Preuve :</u>

Appliquons la dérivée à la fonction $F(x) = x^3/3$ et vérifions que le résultat est bel et bien égal à $f(x) = x^2$:

$f(x) = \frac{d\,F(x)}{dx} \quad \Rightarrow \quad f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3}\right)$ (Remplacer $F(x) = \frac{x^3}{3}$)

$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{3}\frac{d}{dx}\left(x^3\right)$ (Factoriser la constante)

$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{1}{3}\left(3x^2\right)$ (Appliquer la dérivée)

$\Rightarrow \quad f(x) = x^2 \quad \blacksquare$ (Simplifier)

Situations concrètes avec l'intégrale

Puisque la dérivée correspond au taux de variation d'une fonction, voici quelques exemples concret où le concept de dérivée peut être pertinent à utiliser :

Situation	Fonction de base	Dérivée de la fonction
Économie 	$R(t)$ en dollar/s Rendement d'un placement en fonction du temps	$\$(t) = \int R(t)dt$ en dollar L'actif du placement.
Génie civil 	$H(s)$ en m La hauteur d'un édifice en fonction de sa surface au sol.	$V(s) = \int H(s)ds$ en m^3 Le volume des édifices.
Cinématique 	$v_x(t)$ en m/s La vitesse d'un objet en fonction du temps	$x(t) = \int v_x(t)dt$ en m La position de l'objet

L'intégrale d'un polynôme

Lorsque la fonction $f(x)$ est purement un polynôme, il existe des trucs de calcul pouvant accélérer le traitement de la fonction. Voici les règles à suivre :

1) **Distributivité** ($A(x+y) = Ax + Ay$)

Théorème : L'intégrale d'une somme est égale à la somme des intégrales.

Exemple : Soit $f(x) = 3x^4 + 2x^6$

Alors $F(x) = \int (3x^4 + 2x^6)dx = \int 3x^4 dx + \int 2x^6 dx$

2) **Multiplication par un scalaire** ($Axy = A(xy)$)

Théorème : L'intégrale d'une fonction multipliée par un scalaire est égale à l'intégrale de la fonction que l'on multiplie par la suite par le scalaire.

Exemple : Soit $f(x) = 7x^3$ $\quad f(x) = -2x^{-7}$

Alors $F(x) = \int 7x^3 dx = 7\int x^3 dx$ $\quad F(x) = \int -2x^{-7} dx = -2\int x^{-7} dx$

3) **Règle du polynôme** ($\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$)

Théorème : Le résultat de l'intégrale d'un polynôme x^n est égal à $\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Exemple : Soit $f(x) = x^{12}$ $\quad f(x) = x^{-2}$

Alors $F(x) = \int x^{12} dx = \frac{x^{13}}{13}$ $\quad F(x) = \int x^{-2} dx = \frac{x^{-1}}{-1}$

4) **Cas particulier** $1/x$ ($\int \frac{1}{x} dx = \ln|x|$)

Théorème : Le résultat de l'intégrale de la fonction $1/x$ (x^{-1}) est égal à $\ln|x|$.

Situation A : ***Mon premier polynôme à intégrer.*** Effectuez l'intégrale du polynôme suivant : $f(x)=4x^2+\dfrac{5}{x^3}+\dfrac{6}{x}+8$.

Effectuons une reformulation du polynôme :

$$f(x)=4x^2+5x^{-3}+6x^{-1}+8x^0$$

Étape 1 : $F(x)=\int 4x^2dx+\int 5x^{-3}dx+\int 6x^{-1}dx+\int 8x^0$

Étape 2 : $F(x)=4\int x^2dx+5\int x^{-3}dx+6\int x^{-1}dx+8\int x^0dx$

Étape 3 : $F(x)=4\left[\dfrac{x^3}{3}\right]+5\left[\dfrac{x^{-2}}{-2}\right]+6\int x^{-1}dx+8\left[\dfrac{x^1}{1}\right]$

Étape 4 : $F(x)=\dfrac{4}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^{-2}+6\left[\ln|x|\right]+8x$

Réponse : $\boxed{F(x)=\dfrac{4}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^{-2}+6\ln|x|+8x}$

Exercices

Exercice A : ***L'intégrale d'un polynôme à une variable.*** Évaluez l'intégrale par rapport à x des fonctions suivantes :

a) $f(x)=5x^4$ b) $f(x)=4x^2+7x^6$

Exercice B : ***L'intégrale d'un polynôme à deux variables.*** Évaluez l'intégrale suivante :

a) $\int 4x^2y\,dx$ b) $\int\left(\dfrac{6}{x^3}-\dfrac{8y^2}{x^2}+7x^4y^2\right)dx$

P.S. Lors d'une intégrale par rapport à x ($\int f\,dx$), tous les paramètres sauf x sont des constante.

Solutions

Exercice A : ***L'intégrale d'un polynôme à une variable.***

a) $F(x) = x^5$ b) $F(x) = \frac{4}{3}x^3 + x^7$

Exercice B : ***L'intégrale d'un polynôme à deux variables.***

a) Soit $f(x, y) = 4x^2 y$:

$F(x, y) = \int f(x, y) dx$ (Intégrale à évaluer)

$\Rightarrow$ $F(x, y) = \int 4x^2 y \, dx$ (Remplacer $f(x, y) = 4x^2 y$)

$\Rightarrow$ $F(x, y) = 4y \int x^2 \, dx$ (Factoriser les constantes)

$\Rightarrow$ $F(x, y) = 4y \left[\frac{x^3}{3} \right]$ (Évaluer l'intégrale)

$\Rightarrow$ $\boxed{F(x, y) = \frac{4}{3}x^3 y}$ (Simplifier l'expression)

b) Soit $f(x, y) = \frac{6}{x^3} - \frac{8y^2}{x^2} + 7x^4 y^2$:

$F(x, y) = \int f(x, y) dx$ (Intégrale à évaluer)

$\Rightarrow$ $F(x, y) = \int \left(\frac{6}{x^3} - \frac{8y^2}{x^2} + 7x^4 y^2 \right) dx$ (Remplacer $f(x, y) = \frac{6}{x^3} - \frac{8y^2}{x^2} + 7x^4 y^2$)

$\Rightarrow$ $F(x, y) = \int \frac{6}{x^3} dx + \int -\frac{8y^2}{x^2} dx + \int 7x^4 y^2 dx$ (Distribuer l'intégrale)

$\Rightarrow$ $F(x, y) = 6 \int \frac{1}{x^3} dx - 8y^2 \int \frac{1}{x^2} dx + 7y^2 \int x^4 dx$ (Factoriser les constantes)

$\Rightarrow$ $F(x, y) = 6 \left[\frac{x^{-2}}{-2} \right] - 8y^2 \left[\frac{x^{-1}}{-1} \right] + 7y^2 \left[\frac{x^5}{5} \right]$ (Évaluer l'intégrale)

$\Rightarrow$ $\boxed{F(x, y) = -3\frac{1}{x^2} + 8\frac{y^2}{x} + \frac{7}{5}x^5 y^2}$ (Simplifier l'expression)