Chapitre 2.7 – Les quaternions

La structure du quaternion

Le quaternion[1] $\hat{q}$ est une structure mathématique à 4 composantes q_w, q_x, q_y et q_z regroupant un nombre réel et trois nombres hypercomplexes où la multiplication de ses nombres n'est plus commutative.

On peut représenter sous les formes suivantes :

En composante	Représentation complète
$\hat{q} = (q_w, q_x, q_y, q_z)$	$\hat{q} = q_w + q_x i + q_y j + q_z k$

Quaternion multiplication

×	1	*i*	*j*	*k*
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion

où q_w : Composante constante du quaternion.
q_x : Composante hypercomplexe 1 du quaternion.
i : Terme hypercomplexe 1 du quaternion (nombre hypercomplexe $i^2 = -1$).
q_y : Composante hypercomplexe 2 du quaternion.
j : Terme hypercomplexe 2 du quaternion (nombre hypercomplexe $j^2 = -1$).
q_z : Composante hypercomplexe 3 du quaternion.
k : Terme hypercomplexe 3 du quaternion (nombre hypercomplexe $k^2 = -1$).

Les termes hypercomplexes i, j et k se manipulent algébriquement comme des variables où toutes les simplifications sont réductibles à une expression de ± 1, $\pm i$, $\pm j$ ou $\pm k$ mais qui ne sont pas commutative. La multiplication de deux termes identique respecte la règle des nombres complexes et la multiplication de deux termes différents respecte la règle de la main droite[2] :

Produit à 2 termes			
$1 \cdot 1 = 1$	$i \cdot 1 = i$	$j \cdot 1 = j$	$k \cdot 1 = k$
$1 \cdot i = i$	$i \cdot i = i^2 = -1$	$j \cdot i = j\,i = -k$	$k \cdot i = k\,i = j$
$1 \cdot j = j$	$i \cdot j = i\,j = k$	$j \cdot j = j^2 = -1$	$k \cdot j = k\,j = -i$
$1 \cdot k = k$	$i \cdot k = i\,k = -j$	$j \cdot k = j\,k = i$	$k \cdot k = k^2 = -1$

Produit à 3 termes différents		
$i \cdot j \cdot k = i\,j\,k = -1$	$k \cdot i \cdot j \cdot = k\,i\,j = -1$	$j \cdot k \cdot i \cdot = j\,k\,i = -1$
$k \cdot j \cdot i = k\,j\,i = 1$	$i \cdot k \cdot j = i\,k\,j = 1$	$j \cdot i \cdot k = j\,i\,k = 1$

[1] Référence : https://web.cs.iastate.edu/~cs577/handouts/quaternion.pdf
[2] La règle de la main droite est utilisée lors du produit vectoriel entre deux vecteurs.

L'addition des quaternions

Soit deux quaternions $\hat{q}_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ et $\hat{q}_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$, alors l'addition $\hat{q}_1 + \hat{q}_2$ des deux quaternions sera égal à l'expression suivante :

$$\hat{q}_1 + \hat{q}_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k$$

<u>Propriété :</u>

- La somme de deux quaternions est commutative : $\hat{q}_1 + \hat{q}_2 = \hat{q}_2 + \hat{q}_1$

La multiplication d'un quaternion par un scalaire

Soit un quaternion $\hat{q} = (q_w, q_x, q_y, q_z)$ et un scalaire α, alors la multiplication par un scalaire $\alpha\,\hat{q}$ d'un scalaire avec un quaternion sera égal à l'expression suivante :

$$\alpha\,\hat{q} = \alpha\, q_w + \alpha\, q_x i + \alpha\, q_y j + \alpha\, q_z k$$

<u>Propriété :</u>

- La multiplication par un scalaire est distributive : $\alpha(\hat{q}_1 + \hat{q}_2) = \alpha\,\hat{q}_1 + \alpha\,\hat{q}_2$

La multiplication des quaternions

Soit deux quaternions $\hat{q}_1 = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ et $\hat{q}_2 = (a_2, b_2, c_2, d_2)$, alors la multiplication $\hat{q}_1 \cdot \hat{q}_2 = \hat{q}_1\,\hat{q}_2$ des deux quaternions sera égal à l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\hat{q}_1\,\hat{q}_2 = {} & a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 \\ & + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i \\ & + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j \\ & + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k\end{aligned}$$

<u>Propriété :</u>

- La multiplication de deux quaternions <u>n'est pas commutative</u> : $\hat{q}_1\,\hat{q}_2 \neq \hat{q}_2\,\hat{q}_1$
- La multiplication est associative : $(\hat{q}_1\,\hat{q}_2)\hat{q}_3 = \hat{q}_1(\hat{q}_2\,\hat{q}_3)$

Le conjugué d'un quaternion

Soit un quaternion $\hat{q} = (q_w, q_x, q_y, q_z)$, alors le conjugué $\hat{q}^*$ sera égal à l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\hat{q}^* &= (q_w, -q_x, -q_y, -q_z) \\ &= q_w - q_x i - q_y j - q_z k\end{aligned}$$

<u>Propriétés :</u>

- Le conjugué du conjugué : $(\hat{q}^*)^* = \hat{q}$
- L'addition du quaternion avec son conjugué : $\hat{q} + \hat{q}^* = 2q_w$
- La multiplication du quaternion avec son conjugué : $\hat{q}\,\hat{q}^* = \hat{q}^*\hat{q}$
- Le conjugué du produit de deux quaternions : $(\hat{q}_1\hat{q}_2)^* = \hat{q}_2^*\hat{q}_1^*$

Le module d'un quaternion (norme)

Soit un quaternion $\hat{q} = (q_w, q_x, q_y, q_z)$, alors le module $\|\hat{q}\|$ du quaternion sera égal à <u>un scalaire</u> correspondant à l'expression suivante :

$$\|\hat{q}\| = \sqrt{\hat{q}^*\hat{q}}$$

La normalisation d'un quaternion

Soit un quaternion $\hat{q} = (q_w, q_x, q_y, q_z)$ où $\|\hat{q}\| \neq 1$, alors ce quaternion pourra être normalisé (obtenir un module égal à 1) sous l'action du calcul suivant :

$$q_{nor} = \frac{\hat{q}}{\|\hat{q}\|}$$

L'inverse d'un quaternion

Soit un quaternion $\hat{q} = (q_w, q_x, q_y, q_z)$, alors l'inverse $\hat{q}^{-1}$ du quaternion sera égale à l'expression suivante :

$$\hat{q}^{-1} = \frac{\hat{q}^*}{\|\hat{q}\|}$$

<u>Propriétés :</u>

- La multiplication d'un quaternion avec son inverse : $\hat{q}\,\hat{q}^{-1} = \hat{q}^{-1}\hat{q} = 1$

<u>Cas particulier :</u>
Si $\hat{q}$ est unitaire ($\|\hat{q}\| = 1$), alors le quaternion inverse $\hat{q}^{-1}$ est également son conjugué $\hat{q}^*$ ce qui donne les propriétés suivante :

$$\|\hat{q}\| = 1 \quad \Rightarrow \quad \hat{q}^{-1} = q^* \quad \Rightarrow \quad q\,q^* = q^* q = 1$$

Le quaternion unitaire

Un quaternion $\hat{q} = (q_w, q_x, q_y, q_z)$ est unitaire si son module $\|\hat{q}\|$ est égal à 1 ($\|\hat{q}\| = 1$). Ainsi, le quaternion aura une structure mathématique particulière :

$$\|\hat{q}\| = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad q_w^{\,2} + q_x^{\,2} + q_y^{\,2} + q_z^{\,2} = 1$$

Preuve :

$$\|\hat{q}\| = \sqrt{\hat{q}^* \hat{q}} = 1 \qquad \Rightarrow \qquad 1 = \hat{q}^* \hat{q}$$

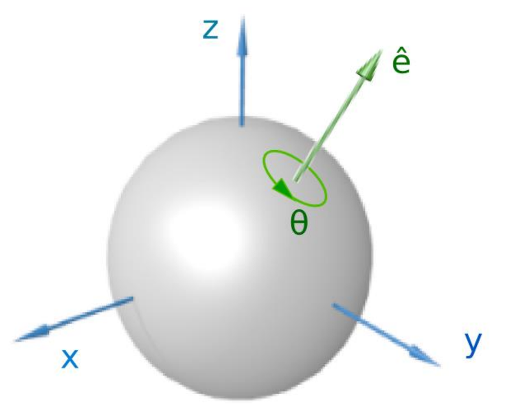
$$\Rightarrow \qquad 1 = (q_w - q_x i - q_y j - q_z k)(q_w + q_x i + q_y j + q_z k)$$

$$\Rightarrow \qquad \begin{aligned} 1 = {} & q_w q_w - (-q_x)q_x - (-q_y)q_y - (-q_z)q_z \\ & + \left(q_w q_x + (-q_x)q_w + (-q_y)q_z - (-q_z)q_y\right)i \\ & + \left(q_w q_y - (-q_x)q_z + (-q_y)q_w + (-q_z)q_x\right)j \\ & + \left(q_w q_z + (-q_x)q_y - (-q_y)q_x + (-q_z)q_w\right)k \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \qquad q_w^{\,2} + q_x^{\,2} + q_y^{\,2} + q_z^{\,2} = 1 \qquad \blacksquare$$

Le quaternion représentant une rotation dans O*xyz*

Un quaternion $\hat{q} = (q_0, q_x, q_y, q_z)$ peut représenter un état de rotation autour d'un origine O dans un système de coordonnée *xyz* (O*xyz*) si le quaternion $\hat{q}$ est unitaire ($\|\hat{q}\| = 1$).



https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternions_and_spatial_rotation
Quaternion de rotation autour d'un axe ê.

On peut construire une rotation autour d'un axe unitaire $\hat{u} = (u_x, u_y, u_z)$ tel que $\|\hat{u}\| = 1$ par rapport à l'origine de O*xyz* selon un angle θ à l'aide de la construction suivante :

$$\hat{q}_{rot} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + u_x \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) i + u_x \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) j + u_x \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) k$$

où
- $\hat{q}_{rot}$: Quaternion de rotation, doit être unitaire ($\|\hat{q}_{rot}\| = 1$).
- θ : Angle de rotation (radians).
- u_x : Composante *x* de l'axe de rotation ($\|\hat{u}\| = 1$).
- u_y : Composante *y* de l'axe de rotation ($\|\hat{u}\| = 1$).
- u_z : Composante *z* de l'axe de rotation ($\|\hat{u}\| = 1$).

En inverse, tout quaternion $\hat{q} = (q_0, q_x, q_y, q_z)$ unitaire représente également une rotation. Nous pouvons obtenir l'angle de rotation θ et l'axe de rotation $\hat{u} = (u_x, u_y, u_z)$ à partir des calculs suivant sur le quaternion :

$$\|\hat{q}\| = 1 \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} \theta = 2\arccos(\theta) \quad \text{P.S. l'angle n'est pas unique !} \\ \hat{u} = \left(\dfrac{q_x}{\sin(\theta/2)}, \dfrac{q_y}{\sin(\theta/2)}, \dfrac{q_z}{\sin(\theta/2)} \right) \end{array} \right\}$$

La rotation d'un vecteur position

Soit un quaternion de rotation $\hat{q}_{rot} = (q_0, q_x, q_y, q_z)$ où $\|\hat{q}_{rot}\| = 1$ et un vecteur position $\vec{r} = (r_x, r_y, r_z)$ dans $\mathrm{O}xyz$, alors le vecteur $\vec{r}$ subira une rotation sous l'effet du quaternion $\hat{q}_{rot}$ autour d'un axe $\hat{u} = (u_x, u_y, u_z)$ par rapport à l'origine O d'un angle θ à l'aide du calcul suivant :

$$\hat{r}_{rot} = \hat{q}_{rot}\, \hat{r}\, \hat{q}^*_{rot}$$

$$\text{avec} \quad \hat{r} = (0, \vec{r}) = (0, r_x, y_y, r_z) \quad \text{et} \quad \hat{r}_{rot} = (0, \vec{r}_{rot}) = (0, r_{x\,rot}, y_{y\,rot}, r_{z\,rot})$$

où $\hat{r}_{rot}$: Quaternion associé au vecteur position ayant subi la rotation du quaternion $\hat{q}_{rot}$.
$\hat{r}$: Quaternion associé au vecteur position initial ($\hat{r} = (0, \vec{r}) = (0, r_x, y_y, r_z)$).
$\hat{q}_{rot}$: Quaternion qui va appliquer la rotation sur le quaternion $\hat{r}$.
$\hat{q}^*_{rot}$: Le conjugué du quaternion $\hat{q}_{rot}$.

L'accumulation des rotations

Pour réaliser une séquence de rotation dans un ordre précis à l'aide de plusieurs quaternions, l'opération de l'addition n'est pas adaptée pour obtenir l'accumulation des rotations pour former une rotation globale puisque l'addition est commutative, mais qu'une séquence de rotation ne l'est pas. Ainsi, nous utiliserons la multiplication des quaternions pour accumuler une séquence de rotation puisque la multiplication n'est pas commutative.

Soit un quaternion de rotation $\hat{q}_1$ représentant une 1re rotation (rotation #1) et un quaternion de rotation $\hat{q}_2$ représentant une 2e rotation (rotation #2), alors le quaternion $\hat{q}_{12}$ représentant la rotation totale dans la séquence de rotation #1 et #2 sera obtenu par le calcul suivant :

$$\hat{q}_{12} = \hat{q}_2 \hat{q}_1$$

(séquence dans l'ordre de droite à gauche)

où $\hat{q}_{12}$: Quaternion de rotation dans la séquence #1 et #2.
$\hat{q}_1$: Quaternion de la 1re rotation.
$\hat{q}_2$: Quaternion de la 2e rotation.

La représentation matricielle d'un quaternion

Soit un quaternion $\hat{q} = (q_w, q_x, q_y, q_z)$ où $\|\hat{q}\| = 1$ permettant à celui-ci de représenter une rotation dans $Oxyz$, alors la représentation matricielle $R_{\hat{q}}$ en matrice 3 × 3 en multiplication gauche vers la droite sera égal à l'expression suivante[3] :

$$R_{\hat{q}} = \begin{pmatrix} 1-2{q_y}^2-2{q_z}^2 & 2(q_x q_y - q_w q_z) & 2(q_x q_z + q_w q_y) \\ 2(q_x q_y + q_w q_z) & 1-2{q_x}^2-2{q_z}^2 & 2(q_y q_z - q_w q_x) \\ 2(q_x q_z - q_w q_y) & 2(q_y q_z + q_w q_x) & 1-2{q_x}^2-2{q_y}^2 \end{pmatrix}$$

Soit un quaternion $\hat{q} = (q_w, q_x, q_y, q_z)$ où $\|\hat{q}\| = 1$ permettant à celui-ci de représenter une rotation dans $Oxyz$, alors la représentation matricielle $R_{\hat{q}}$ en matrice 4 × 4 en multiplication gauche vers la droite sera égal à l'expression suivante[4] :

$$R_{\hat{q}} = \begin{pmatrix} q_w & -q_x & -q_y & -q_z \\ q_x & q_w & -q_z & q_y \\ q_y & q_z & q_w & -q_x \\ q_z & -q_y & q_x & q_w \end{pmatrix}$$

[3] Référence : https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternions_and_spatial_rotation
[4] Référence : https://fr.wikipedia.org/wiki/Quaternion