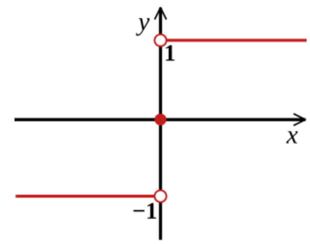
Chapitre 2.6 – Les nombres complexes en coordonnée polaire et forme exponentielle

La fonction signe

En mathématique, la fonction $\operatorname{sgn}(x)$, portant le nom de signe, est utilisée pour déterminer le signe d'un paramètre x. Cette fonction admet trois résultats possibles :

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{Bmatrix} 1 & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{si } x=0 \\ -1 & \text{si } x<0 \end{Bmatrix}$$



https://fr.wikipedia.org/wiki/Fonction_signe
Le graphique de la fonction sgn.

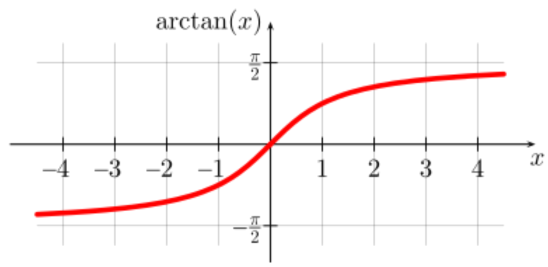
La fonction arctan2

En trigonométrie, la fonction $\arctan(x)$ admet plusieurs solutions dans l'intervalle

$$\theta=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\quad .$$

Cependant, lorsque l'argument de la fonction arc tangente correspond au rapport y/x associé à un cercle trigonométrique tel que

$$x=\cos(\theta) \text{ et } y=\sin(\theta) \quad ,$$



https://fr.vikidia.org/wiki/Arc_tangente
Le graphique de la fonction arctan.

alors $\theta=\arctan(y/x)$ s'interprète comme un arc de cercle dans le cercle trigonométrique et

$$\theta=\begin{Bmatrix} \arctan(y/x)+2\pi n \ , \\ \pi+\arctan(y/x)+2\pi n \end{Bmatrix} \text{ où } n\in\mathbb{N}$$

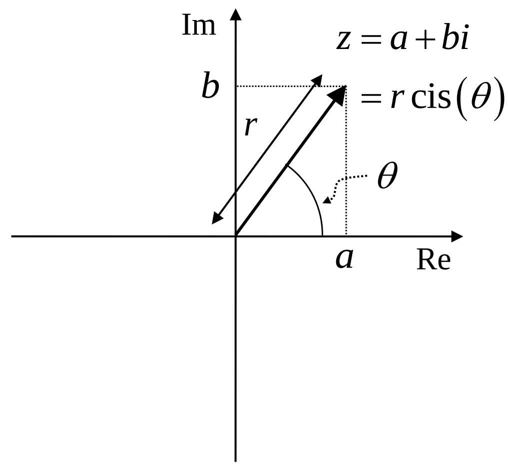
n'est pas une solution unique.

Afin de mieux faire correspondre le choix de l'arc de cercle θ en fonction du positionnement x et y dans l'un des 4 cadrans du cercle trigonométrique, la fonction $\arctan 2(y,x)$ à 2 paramètres a été développée afin de générer les solutions suivantes :

Si $y\neq 0$	Si $y=0$
$\arctan 2(y,x)=\begin{Bmatrix} \operatorname{sgn}(y)\arctan\left(\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert\right) & \text{si } x>0 \\ \operatorname{sgn}(y)\,\frac{\pi}{2} & \text{si } x=0 \\ \operatorname{sgn}(y)\left(\pi-\arctan\left(\left\lvert\frac{y}{x}\right\rvert\right)\right) & \text{si } x<0 \end{Bmatrix}$	$\arctan 2(0,x)=\begin{Bmatrix} 0 & \text{si } x>0 \\ \text{non défini} & \text{si } x=0 \\ \pi & \text{si } x<0 \end{Bmatrix}$

Le nombre complexe en représentation polaire

Dans un plan cartésien, nous pouvons exploiter la relation de Pythagore $c^2 = a^2 + b^2$ trigonométrique (relation sinus et cosinus) afin d'interpréter un nombre complexe $z = a + bi$ comme étant d'un triangle rectangle de côté a et b. Ainsi, la longueur de l'hypoténuse de ce triangle rectangle sera le module $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ du nombre complexe $z = a + bi$.



La représentation polaire d'un nombre complexe où θ est l'angle du nombre complexe.

Soit $z = a + bi$, alors la représentation de ce nombre complexe en coordonnée polaire de ce nombre complexe sera

$$z = r\ \text{cis}(\theta) = r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$$

où

$$a = r\cos(\theta) \qquad \text{et} \qquad b = r\sin(\theta)$$

avec les relations de module r et de phase θ

$$\underset{\text{(module)}}{r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}} \qquad \text{et} \qquad \underset{\text{(phase)}}{\theta = \arg(z) = \arctan 2(b, a)} \ .$$

Preuve :

$z = a + ib \quad \Rightarrow \quad z = \dfrac{|z|}{|z|}(a + ib)$ (Multiplier par $1 = \dfrac{|z|}{|z|}$)

$\Rightarrow \quad z = |z|\left(\dfrac{a}{|z|} + \dfrac{b}{|z|}i\right)$ (Distribuer $\dfrac{1}{|z|}$)

$\Rightarrow \quad z = \sqrt{a^2 + b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}i\right)$ ($|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$)

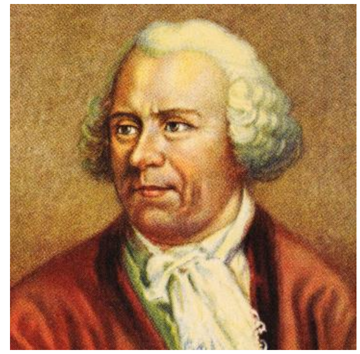
$\Rightarrow \quad z = r\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}i\right)$ (Pythagore : $r = \sqrt{a^2 + b^2}$)

$\Rightarrow \quad z = r\left(\cos(\theta) + \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}i\right)$ (Trigonométrie : $\cos(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$)

$\Rightarrow \quad z = r\left(\cos(\theta) + i\sin\theta\right) \quad \blacksquare$ (Trigonométrie : $\sin(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$)

Le nombre complexe en représentation exponentielle

En 1748, le mathématicien suisse Leonhard Euler[1] proposant une nouvelle représentation du nombre complexe $z = a + bi$ basée sur la représentation polaire $z = r\ cis(\theta)$.



https://www.biography.com/scientist/leonhard-euler
Leonhard Euler (1707-1783)

Soit $z = a + bi = r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$, alors la représentation de ce nombre complexe en exponentiel sera

$$z = re^{i\theta}$$

où

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \ .$$

Dans la littérature, nous retrouvons l'identité d'Euler sous l'expression

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

(l'identité d'Euler)

et la formule d'Euler sous l'expression

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta) \ .$$

(formule d'Euler)

<u>Preuve :</u>
Soit le nombre complexe $z = a + bi$ que l'on représente sous la forme $z = r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$. Appliquons la différentielle à cette représentation pour obtenir une nouvelle relation :

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial z}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}z = \frac{\partial}{\partial r}\left(r\left(\cos(\theta) + i\sin\theta\right)\right)\mathrm{d}r + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(r\left(\cos(\theta) + i\sin\theta\right)\right)\mathrm{d}\theta$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}z = \left(\cos(\theta) + i\sin\theta\right)\frac{\partial}{\partial r}(r)\mathrm{d}r + r\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\cos(\theta) + i\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}z = \left(\cos(\theta) + i\sin\theta\right)\mathrm{d}r + r\left(-\sin(\theta) + i\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}z = \frac{z}{r}\mathrm{d}r + r\left(-\sin(\theta) + i\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta \qquad \left(\frac{z}{r} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{d}z = \frac{z}{r}\mathrm{d}r + iz\,\mathrm{d}\theta \qquad \left(iz = r\left(i\cos(\theta) - \sin(\theta)\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{r}\mathrm{d}r + i\,\mathrm{d}\theta} \qquad (\text{Diviser par } z \neq 0)$$

[1] Référence : https://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_d%27Euler

Maintenant, appliquons une intégrale à cette relation afin de redéfinir le nombre complexe z :

$\Rightarrow$	$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \frac{1}{r}\mathrm{d}r + i\,\mathrm{d}\theta$	(Relation précédente)
$\Rightarrow$	$\int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int\left(\frac{1}{r}\mathrm{d}r + i\,\mathrm{d}\theta\right)$	(Appliquer l'intégrale)
$\Rightarrow$	$\int \frac{\mathrm{d}z}{z} = \int \frac{1}{r}\mathrm{d}r + \int i\,\mathrm{d}\theta$	(Distribuer l'intégrale)
$\Rightarrow$	$\ln(z) = \ln(r) + i\theta + C$	(C est la constante d'intégration)
$\Rightarrow$	$\ln(z) - \ln(r) = i\theta + C$	(Regrouper les logarithmes)
$\Rightarrow$	$\ln\left(\frac{z}{r}\right) = i\theta + C$	($\ln a - \ln b = \ln(a/b)$)
$\Rightarrow$	$\frac{z}{r} = e^{i\theta + C}$	(Mettre à l'exponentiel)
$\Rightarrow$	$\boxed{z = r\,e^{i\theta}e^{C}}$	($e^{a+b} = e^a e^b$ et isoler z)

Pour déterminer la constante C, établissons une égalité entre $z = r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$ et $z = r\,e^{i\theta}e^{C}$ où $\theta = 0$ et $r \in \Re\setminus\{0\}$:

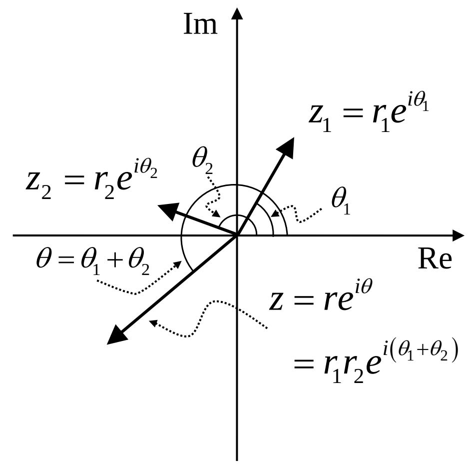
$z = r\,e^{i\theta}e^{C}$	$\Rightarrow$	$r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right) = r\,e^{i\theta}e^{C}$	($z = r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$)
	$\Rightarrow$	$\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}e^{C}$	(Diviser par $r \neq 0$)
	$\Rightarrow$	$\cos(0) + i\sin(0) = e^{i(0)}e^{C}$	(Remplacer $\theta = 0$)
	$\Rightarrow$	$1 + 0 = (1)e^{C}$	(Calcul)
	$\Rightarrow$	$\boxed{C = 0}$	(Exploiter $C = 0 \Rightarrow e^0 = 1$)

Ainsi, nous pouvons conclure qu'une représentation admissible du nombre complexe $z = r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$ est

$$z = re^{i\theta}. \qquad \blacksquare$$

La multiplication des nombres complexes en notation exponentielle

En représentation polaire ou exponentielle, la multiplication de deux nombres complexes prend tout un autre sens. En interprétant la phase θ du nombre complexe z comme étant une rotation du nombre dans le plan complexe, alors la multiplication de deux nombres complexes représente une addition de leur rotation avec un redimensionnement par le produit de leur module r.



La multiplication de deux nombres complexes en représentation exponentielle correspond à exécuter une somme de leur état de rotation θ tout en multipliant leur module r.

Soit $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, alors la multiplication de ces nombres complexes correspond à :

En représentation exponentielle
$z = z_1\, z_2 = r_1\, r_2\, e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
En représentation polaire
$z = z_1\, z_2 = r_1\, r_2\, \left(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right)$

Preuve :

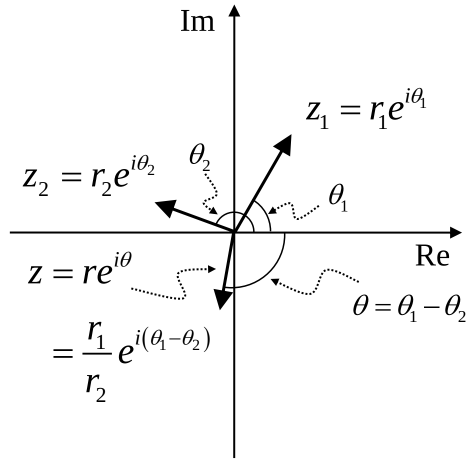
$z = z_1\, z_2$	$\Rightarrow$	$z = \left(r_1 e^{i\theta_1}\right)\left(r_2 e^{i\theta_2}\right)$		(Remplacer $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$)
	$\Rightarrow$	$z = r_1 r_2 e^{i\theta_1} e^{i\theta_2}$		(Réorganiser les termes)
	$\Rightarrow$	$z = r_1 r_2 e^{i\theta_1 + i\theta_2}$		($e^{a+b} = e^a e^b$)
	$\Rightarrow$	$z = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$	■	(Factoriser i)

La division des nombres complexes en notation exponentielle

En représentation polaire ou exponentielle, en interprétant la phase θ du nombre complexe z comme étant une rotation du nombre dans le plan complexe, alors la division de deux nombres complexes représente une soustraction de leur rotation avec un redimensionnement par la division de leur module r.

Soit $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, alors la division de ces nombres complexes correspond à :

En représentation exponentielle
$z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$
En représentation polaire
$z = z_1 \, z_2 = \dfrac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + i \sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right)$



La multiplication de deux nombres complexes en représentation exponentielle correspond à exécuter une somme de leur état de rotation θ tout en multipliant leur module r.

<u>Preuve :</u>

$z = \dfrac{z_1}{z_2} \quad \Rightarrow \quad z = \dfrac{\left(r_1 e^{i\theta_1}\right)}{\left(r_2 e^{i\theta_2}\right)}$ (Remplacer $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$)

$\Rightarrow \quad z = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i\theta_1} \left(e^{-i\theta_2}\right)$ ($\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$)

$\Rightarrow \quad z = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i\theta_1 - i\theta_2}$ ($e^{a-b} = e^a e^{-b}$)

$\Rightarrow \quad z = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$ ■ (Factoriser i)

La puissance entière d'un nombre complexe

En représentation exponentielle, la puissance en nombre naturel $n \in \mathbb{N}$ d'un nombre complexe z correspond à une succession de rotation identique θ provenant d'un même nombre complexe et d'un redimensionnement de valeur r^n.

Dans la littérature, lorsque le module du nombre complexe $z = e^{i\theta}$ est égal à 1 ($|z| = |e^{i\theta}| = 1$, la puissance correspond à la formule de De Moivre :

$$e^{in\theta} = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta) \quad \text{où} \quad n \in \mathbb{N}$$

(formule de De Moivre)

Soit $z = re^{i\theta}$ et $n \in \mathbb{N}$, alors la puissance avec nombre naturel n d'un nombre complexe z correspond à :

En représentation exponentielle ($n \in \mathbb{N}$)	En représentation polaire ($n \in \mathbb{N}$)
$z^n = r^n e^{in\theta}$	$z^n = r^n\left(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right)$

<u>Preuve :</u>

Soit $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$, démontrons que $z_1^{\ n} = \left(r_1 e^{i\theta_1}\right)^n = z_1^{\ n} e^{in\theta_1}$. En premier temps, nous validons que si $n = 1$, alors $z_1^{\ 1} = \left(r_1 e^{i\theta_1}\right)^1 = \left(r_1\right)^1\left(e^{i\theta_1}\right)^1 = r_1 e^{i\theta_1}$ ce qui revient à la définition de z_1. Par la suite, considérons que la relation $z_1^{\ n} = z_1^{\ n} e^{in\theta_1}$ est vrai pour $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Démontrons par induction que la relation $z_1^{\ n+1} = z_1^{\ n+1} e^{i(n+1)\theta_1}$ est également vraie :

$$z_1^{\ n+1} = z_1^{\ n} z_1 \quad \Rightarrow \quad z_1^{\ n+1} = \left(z_1^{\ n} e^{in\theta_1}\right)\left(z_1 e^{i\theta_1}\right)$$

$$\Rightarrow \quad z_1^{\ n+1} = z_1^{\ n}\, z_1\, e^{in\theta_1}\, e^{i\theta_1}$$

$$\Rightarrow \quad z_1^{\ n+1} = z_1^{\ n+1}\, e^{in\theta_1 + i\theta_1}$$

$$\Rightarrow \quad z_1^{\ n+1} = z_1^{\ n+1}\, e^{i(n+1)\theta_1} \qquad \blacksquare$$

La racine carrée d'un nombre complexe

Soit $z = a + ib$ où $b \neq 0$, alors

$$\sqrt{z} = \pm\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}} + \frac{b}{|b|}\sqrt{\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{2}}$$

En construction …

La racine n^{e} d'un nombre complexe

Soit $z = r\cos(\theta) + i\sin(\theta)$, alors

$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n}\right)\right)$ est la racine principale

et les autres racines admissibles sont

$$\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right) \quad \forall k \in \{0,1,2,...,n-2,n-1\}$$

En construction …

L'expression des impédances des résisteurs, condensateur et inductance

En construction …

$\Delta V = Z\,I$ où $I = I_0 e^{i\omega t+\phi_0}$ et $\Delta V = \Delta V_0 e^{i\omega t+\phi_0}$

Puisque

- $\Delta V_R = R\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = R\,I$
- $\Delta V_C = \dfrac{q}{C}$
- $\Delta V_L = L\dfrac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} = L\dfrac{\mathrm{d}\,I}{\mathrm{d}t}$

Nous pouvons établir les relations différentielles et intégrale suivantes sur la solution générale $I = I_0 e^{i\omega t+\phi_0}$:

- $q(t) = \int I(t)\,\mathrm{d}t = \int I_0 e^{i\omega t+\phi_0}\,\mathrm{d}t = \dfrac{I_0 e^{i\omega t+\phi_0}}{i\omega}$
- $\dfrac{\mathrm{d}\,I(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\,I_0 e^{i\omega t+\phi_0}}{\mathrm{d}t} = i\omega I_0 e^{i\omega t+\phi_0}$

Alors

- $\Delta V_R = R\,I = R\,I_0 e^{i\omega t+\phi_0}$
- $\Delta V_C = \dfrac{q}{C} = \dfrac{1}{C}\left(\dfrac{I_0 e^{i\omega t+\phi_0}}{i\omega}\right) = \dfrac{1}{i\omega C} I_0 e^{i\omega t+\phi_0}$
- $\Delta V_L = L\dfrac{\mathrm{d}\,I}{\mathrm{d}t} = L i\omega I_0 e^{i\omega t+\phi_0} = i\omega L\, I_0 e^{i\omega t+\phi_0}$