Chapitre 2.5 – Les nombres complexes

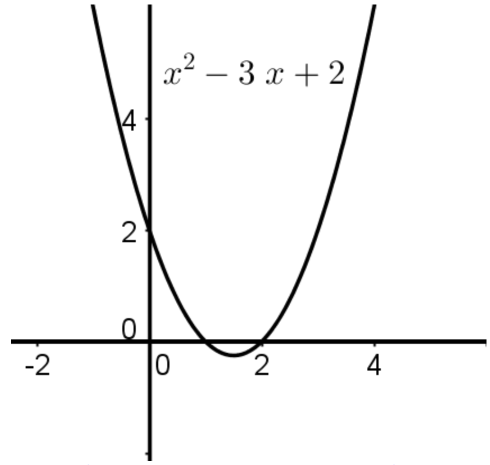
La créativité d'une solution

En mathématique, la détermination des racines à un polynôme du 2e degré (équation quadratique)

$$ax^2 + bx + c = 0$$

correspond à résoudre l'équation

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{où} \quad \Delta = b^2 - 4ac \ .$$



https://fr.serlo.org/mathematiques/170812/fonctions-quadratiques
L'exemple de l'équation quadratique $x^2 - 3x + 2 = 0$ admet les racines $x = \{\ 1, 2\}$.

Malheureusement, aucune solution réelle ($\Re$) n'est admissible si $\Delta < 0$ puisque

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{(-1)|\Delta|} = \sqrt{|\Delta|}\ \sqrt{-1}$$

et l'opération de racine carrée du nombre négatif tel que $\sqrt{-1}$ n'est pas définie pour les nombres réels.

Ainsi, le polynôme aussi simple que

$$x^2 + 1 = 0$$

n'admet pas de racine réelle.

Preuve :

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -1$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2} = \sqrt{-1}$$

$$\Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad \sqrt{-1} \notin \Re \quad \blacksquare$$

Par contre, en introduisant la définition

$$i = \sqrt{-1}$$

où i est élément des nombres imaginaires ($i \in \mathrm{Im}$), le polynôme $x^2 + 1 = 0$ admettra deux racines imaginaires

$$x^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm i$$

C'est ainsi que Jérôme Cadran[1] en 1545 permis d'introduire la notion de nombre imaginaire dans le but d'exprimer le nombre $\sqrt{-15} = i\sqrt{15}$ requis pour obtenir l'ensemble des racines d'un polynôme du 3e degré

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \, .$$

[1] Référence : https://fr.wikipedia.org/wiki/Nombre_imaginaire_pur

Le nombre imaginaire

À partir de la définition du nombre imaginaire

$$i = \sqrt{-1} \quad ,$$

nous pouvons établir les relations suivante :

Sans coefficient au nombre imaginaire	Avec coefficient $b \in \Re$
• $i = \sqrt{-1}$ • $i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$ • $i^3 = i\,i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)\left(-1\right) = -\sqrt{-1}$ • $i^4 = i^2\,i^2 = \left(-1\right)\left(-1\right) = 1$ • $i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{1}{i}\frac{i}{i} = \frac{i}{\left(-1\right)} = -i$ • $i^{-2} = \frac{1}{i^2} = \frac{1}{\left(-1\right)} = -1$ • $i^{-3} = \frac{1}{i^3} = \frac{1}{i}\frac{1}{i^2} = i$	• $bi = b\sqrt{-1}$ • $\left(bi\right)^2 = \left(b\right)^2\left(i\right)^2 = -b^2$ • $\left(bi\right)^3 = \left(b\right)^3\left(i\right)^3 = -b^3 i$ • $\left(bi\right)^4 = \left(b\right)^4\left(i\right)^4 = b^4$ • $\left(bi\right)^{-1} = \frac{1}{bi} = \frac{1}{bi}\frac{i}{i} = \frac{i}{b\left(-1\right)} = -\frac{i}{b}$ • $\left(bi\right)^{-2} = \frac{1}{\left(bi\right)^2} = \frac{1}{\left(b\right)^2}\frac{1}{\left(i\right)^2} = -\frac{1}{b^2}$ • $\left(bi\right)^{-3} = \frac{1}{\left(bi\right)^3} = \frac{1}{\left(b\right)^3\left(i\right)^3} = \frac{i}{b^3}$

Nous constatons que les puissances entières appliquées à un nombre complexe se traitent facilement et peuvent redonner des nombres réels ou des nombres imaginaires. Cependant, si l'on veut définir une puissance non entière (exemple : $\sqrt{i}$), nous devrons étendre notre compréhension du nombre imaginaire.

Le nombre complexe

En 1831, le mathématicien **Carl Friedrich Gauss** propose de définir un nouvel ensemble de nombre regroupant les nombres réels $\Re$ et les nombres imaginaire Im sous le nom de nombre complexe $\mathbb{C}$ tel que

$$\mathbb{C} = \Re \cup \text{Im} \quad .$$

Ainsi, nous pouvons définir un nombre complexe z comme ayant une partie réelle a et une partie imaginaire b tel que $a \in \Re$ et $b \in \Re$ sous la représentation mathématique de

$$z = a + bi$$

où

$$i = \sqrt{-1} \quad \text{tel que} \quad i^2 = -1 \quad .$$

https://fr.wikipedia.org/wiki/Carl_Friedrich_Gauss
Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

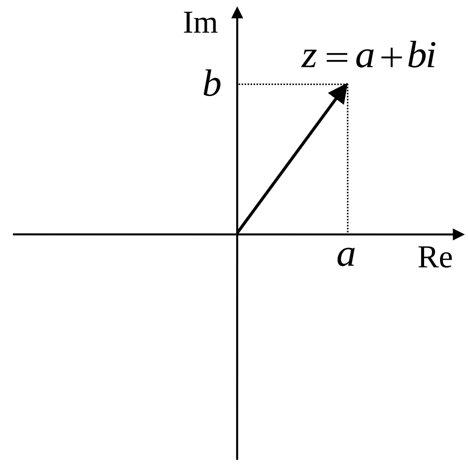
La fonction réelle Re et la fonction imaginaire Im

Soit $z = a + bi$, définissons la fonction réelle $\mathrm{Re}(z)$ tel que

$$\mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(a+bi) = a$$

et la fonction imaginaire $\mathrm{Im}(z)$ tel que

$$\mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(a+bi) = b \quad .$$



Représentation d'un nombre complexe dans le plan Réel-Imaginaire.

À partir de ces deux définitions, il est tout à fait raisonnable d'interpréter un nombre complexe comme étant un point dans un plan cartésien Réel-Imaginaire (Re-Im)

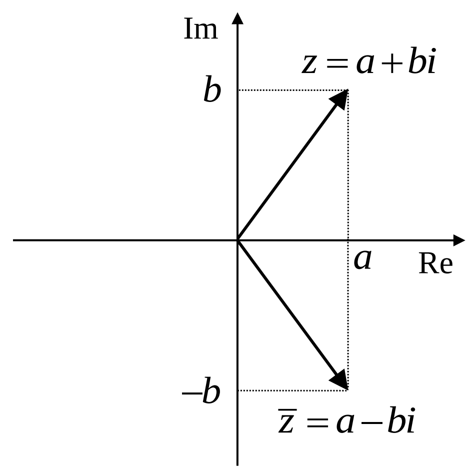
où a est la coordonnée réelle du nombre complexe z

b est la coordonnée imaginaire du nombre complexe z

Dans la littérature, puisqu'il y a beaucoup de similitudes entre les opérations mathématiques applicables sur les vecteurs en 2D et les nombres complexes, il est raisonnable de représenter également un nombre complexe comme un vecteur en 2D dans un plan cartésien (voir schéma ci-haut).

Le conjuguer d'un nombre complexe

Un nombre complexe $z = a + b\,i$ possède un niveau de symétrie avec le nombre complexe $a - b\,i$ en raison du fait que $i^2 = -1$. Cette propriété permettra de facilité la manipulation des nombres complexes comme par exemple lors de la division des nombres complexes.



Dans la représentation en plan cartésien Re-Im, un nombre complexe et son conjuguer possède un axe de symétrie avec l'axe réel.

Selon la préférence de l'utilisateur (mathématicien et physicien), on dénotera deux notations :

$$z \to \overline{z} \quad \text{et} \quad z \to z^*$$

Soit $z_1 = a_1 \pm b_1 i$, alors le conjuguer d'un nombre complexe correspond à

$$z = \overline{z}_1 = z_1^* = a_1 \mp b_1 i$$

À partir de la définition du conjuguer, nous pouvons rendre calculable les fonctions $\mathrm{Re}(z)$ et $\mathrm{Im}(z)$ de la façon suivante :

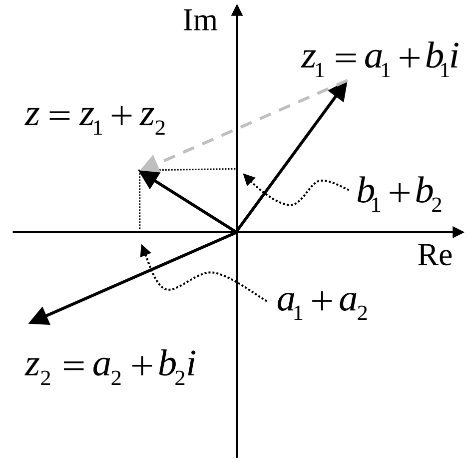
$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2} = a \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z + \overline{z}}{2i} = b$$

<u>Preuve :</u>

La preuve est laissée en exercice à ces notes de cours.

L'addition des nombres complexes

Les opérations mathématiques que l'on peut appliquer aux nombres complexes sont très variée et plus nombreuse que sur les nombres réels en raison des deux composantes (réelle et imaginaire) du nombre complexe. Les opérations les plus élémentaires sont l'addition et la soustraction qui s'effectuent comme des manipulations en algèbre de base où i se manipule tout simplement comme une variable.



Si l'on représente un nombre complexe comme étant une flèche dans le plan Re-Im, l'addition correspond à mettre les flèche bout-à-bout.

Soit $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$, alors l'addition de deux nombres complexe correspond à

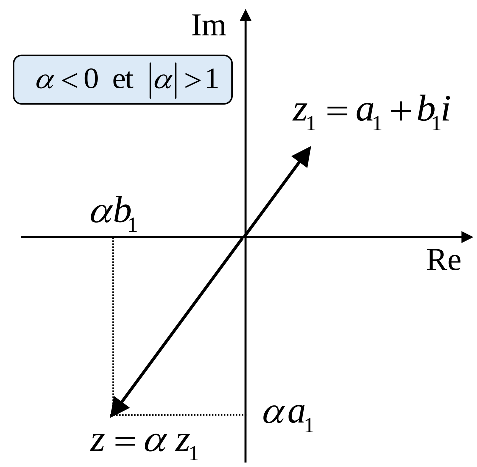
$$z = z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$$

et

$$z = z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2) i$$

La multiplication d'un nombre complexe par un nombre réel

La multiplication d'un nombre complexe par un nombre réel s'effectue par une simple distributivité (avec deux multiplications) du nombre réel sur les deux composantes réelles et imaginaires du nombre complexe. En comparaison avec les vecteurs en 2D, cette opération s'apparente à la multiplication d'un vecteur avec un scalaire.



La multiplication d'un nombre complexe par un nombre réel correspond à redimensionner la longueur de la flèche de la représentation du nombre complexe.

Soit $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $\alpha \in \Re$, alors la multiplication d'un nombre complexe avec un nombre réel correspond à

$$z = \alpha z_1 = \alpha a_1 + \alpha b_1 i$$

<u>Preuve :</u>

$z = \alpha z_1 \quad \Rightarrow \quad z = \alpha (a_1 + b_1 i) \qquad (z_1 = a_1 + b_1 i)$

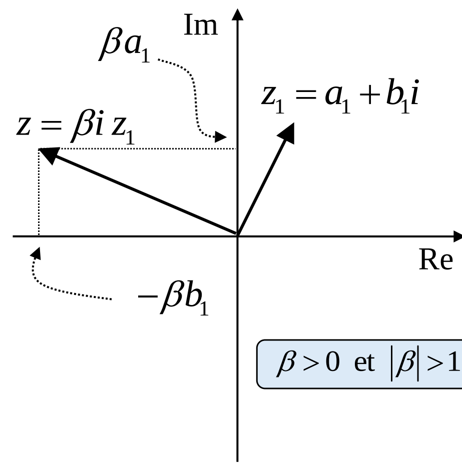
$\Rightarrow \quad z = \alpha a_1 + \alpha b_1 i \quad \blacksquare \qquad$ (Distributivité)

La multiplication d'un nombre complexe par un nombre imaginaire

La multiplication d'un nombre complexe par un nombre imaginaire s'effectue par une simple distributivité (avec deux multiplications) où il y aura inversion des composantes réelles et imaginaires qui auront été multipliées par la composante du nombre imaginaire avec un changement de signe.

Soit $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $\beta i \in \mathrm{Im}$, alors la multiplication d'un nombre complexe par un nombre imaginaire correspond à

$$z = \beta i \, z_1 = -\beta b_1 + \beta a_1 i$$



La multiplication d'un nombre complexe avec un nombre imaginaire réaliser une permutation dans les composantes réelles et imaginaire tout en réaliser un redimensionnement.

Preuve :

$z = \beta i \, z_1 \quad \Rightarrow \quad z = \beta i (a_1 + b_1 i) \quad (z_1 = a_1 + b_1 i)$

$\Rightarrow \quad z = \beta a_1 i + \beta b_1 i^2 \quad$ (Distributivité)

$\Rightarrow \quad z = \beta a_1 i + \beta b_1 (-1) \quad (i^2 = -1)$

$\Rightarrow \quad z = -\beta b_1 + \beta a_1 i \quad \blacksquare \quad$ (Réorganiser)

La multiplication de deux nombres complexes

La multiplication de deux nombres complexes ensemble s'effectue également par une simple distributivité (avec 4 multiplications) de deux composantes réelles et imaginaires du 1^{er} nombre complexe avec les deux composantes réelles et imaginaires du 2^e nombre complexe. En comparaison avec les vecteurs en 2D, cette opération n'est pas supportée prouvant ainsi que les vecteurs et les nombres complexes ne sont pas identiques, mais ayant une portion de leur algèbre en commun.

Soit $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$, alors la multiplication de ces deux nombres complexe correspond à

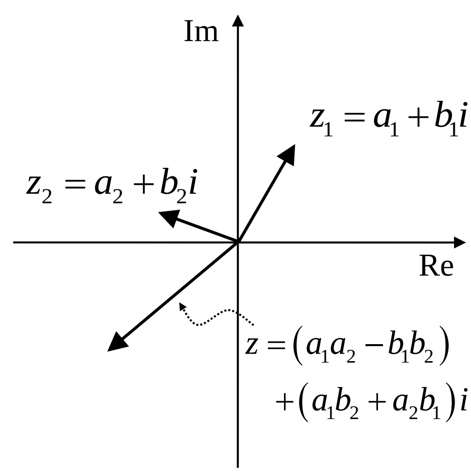
$$z = z_1 \, z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

(version standard)

et

$$z = z_1 \, \overline{z}_2 = (a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i$$

(version avec conjuguer)



La multiplication de deux nombres complexes génère un résultat où la longueur et l'orientation de la flèche change.

Preuve : (avec $z = z_1 z_2$)

$z = z_1 z_2$	$\Rightarrow$	$z = (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i)$	(Remplacer $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$)
	$\Rightarrow$	$z = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 i a_2 + b_1 i b_2 i$	(Distributivité)
	$\Rightarrow$	$z = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2$	(Réorganisation et simplification)
	$\Rightarrow$	$z = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i - b_1 b_2$	(Remplacer $i^2 = -1$)
	$\Rightarrow$	$z = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$ ■	(Factoriser i et regroupement Re et Im)

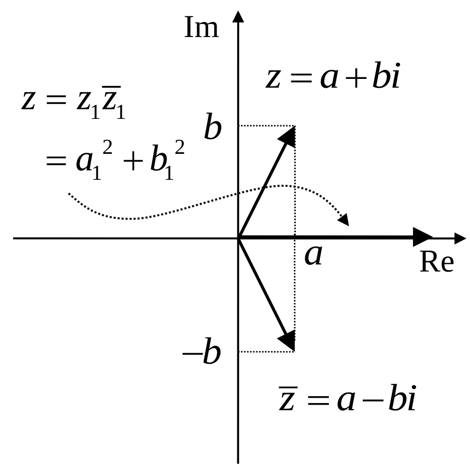
La multiplication d'un nombre complexe avec son conjuguer

Lorsque l'on manipule des nombres complexes, il est souvent pratique de manipuler ces nombres afin d'en retirer leur composante imaginaire. Ainsi, ces nouveaux nombres peuvent être associés à des grandeurs physiques observables.

Pour ce faire, si l'on multiplie un nombre complexe z par son propre conjuguer $\bar{z}$, nous retrouvons un nombre réel $z\bar{z}$.

Soit $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $\bar{z}_1 = a_1 - b_1 i$, alors la multiplication d'un nombre complexe par son conjuguer correspond à

$$z = z_1 \bar{z}_1 = a_1^{\,2} + b_1^{\,2}$$



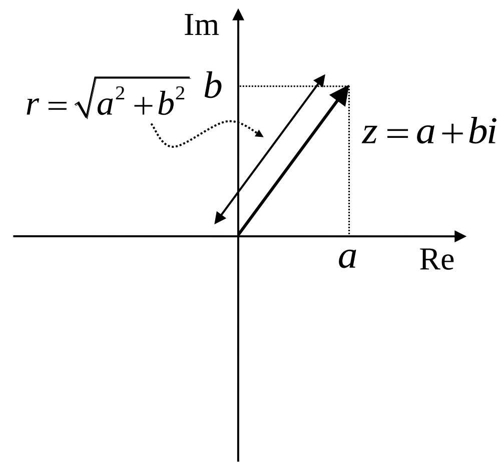
La multiplication d'un nombre complexe par son conjuguer génère un nombre réel dont la valeur correspond à une relation de Pythagore.

Preuve :

$z = z_1 \bar{z}_1$	$\Rightarrow$	$z = (a_1 + b_1 i)(a_1 - b_1 i)$	(Remplacer $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $\bar{z}_1 = a_1 - b_1 i$)
	$\Rightarrow$	$z = (a_1 a_1 - b_1(-b_1)) + (a_1(-b_1) + a_2 b_1) i$	($z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$)
	$\Rightarrow$	$z = a_1^{\,2} + b_1^{\,2}$ ■	(Simplifier)

Module d’un nombre complexe

Puisque la représentation d’un nombre complexe est associée à un système de coordonnée Re-Im dont les deux axes sont géométriquement alignés perpendiculairement, nous pouvons confirmer qu’une relation de Pythagore est admissible. Ainsi, un nombre complexe $z = a + bi$ peut être représenté à l’aide d’un triangle rectangle où a est le côté adjacent et b le côté opposé pour former une hypoténuse de longueur $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Le module d’un nombre complexe correspond à la longueur de l’hypoténuse d’un triangle rectangle.

Soit $z_1 = a_1 + b_1 i$, alors le module du nombre complexe correspond à

$$\left| z_1 \right| = \sqrt{z\,\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

<u>Preuve :</u>

$\left| z_1 \right| = \sqrt{z_1 \bar{z}_1}$ $\Rightarrow$ $\left| z_1 \right| = \sqrt{a_1^{\,2} + b_1^{\,2}}$ (Remplacer $z_1 \bar{z}_1 = a_1^{\,2} + b_1^{\,2}$)

Puisque le nombre dans la racine carrée est réel, alors l’expression est calculable. ■

L’inverse d’un nombre complexe

Soit $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_1 \neq 0$, alors l’inversion du nombre complexe z_1 correspond à

$$z = z_1^{-1} = \frac{1}{z_1} = \left\{ \begin{matrix} \dfrac{\bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1} \\ \\ \left(\dfrac{a_1}{a_1^{\,2} + b_1^{\,2}} \right) - \left(\dfrac{b_1}{a_1^{\,2} + b_1^{\,2}} \right) i \end{matrix} \right\}$$

<u>Preuve :</u>

$z = z_1^{-1}$ $\Rightarrow$ $z = \dfrac{1}{z_1}$ (Réécriture en fraction)

$\Rightarrow$ $z = \dfrac{1}{z_1} \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_1}$ (Mutiplier par $1 = \dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_1}$)

$\Rightarrow$ $z = \dfrac{\bar{z}_1}{z_1 \bar{z}_1}$ (Résultat en expression complexe)

$\Rightarrow$ $z = \left(\dfrac{a_1}{a_1^{\,2} + b_1^{\,2}} \right) - \left(\dfrac{b_1}{a_1^{\,2} + b_1^{\,2}} \right) i$ ■ (Remplacer $z_1 \bar{z}_1 = a_1^{\,2} + b_1^{\,2}$ et $\bar{z}_1 = a_1 - b_1 i$)

La division des nombres complexes

Soit $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$ tel que $z_2 \neq 0$, alors la division du nombre complexe z_1 par le nombre complexe z_2 correspond à

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \begin{cases} \dfrac{z_1 \overline{z}_2}{z_2 \overline{z}_2} \\ \left(\dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) + \left(\dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) i \end{cases}$$

Preuve :

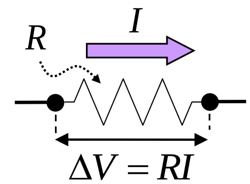
$z = \dfrac{z_1}{z_2}$	$\Rightarrow$	$z = z_1 \dfrac{1}{z_2}$	(Réécriture)
	$\Rightarrow$	$z = z_1 \left(\dfrac{\overline{z}_2}{z_2 \overline{z}_2} \right)$	(Remplacer $\dfrac{1}{z_2} = \dfrac{\overline{z}_2}{z_2 \overline{z}_2}$)
	$\Rightarrow$	$z = \dfrac{z_1 \overline{z}_2}{z_2 \overline{z}_2}$	(Résultat en expression complexe)
	$\Rightarrow$	$z = \dfrac{z_1 \overline{z}_2}{\left(a_2^2 + b_2^2 \right)}$	(Remplacer $z_2 \overline{z}_2 = a_2^2 + b_2^2$)
	$\Rightarrow$	$z = \dfrac{\left(\left(a_1 a_2 + b_1 b_2 \right) + \left(a_2 b_1 - a_1 b_2 \right) i \right)}{a_2^2 + b_2^2}$	($z_1 \overline{z}_2 = \left(a_1 a_2 + b_1 b_2 \right) + \left(a_2 b_1 - a_1 b_2 \right) i$)
	$\Rightarrow$	$z = \left(\dfrac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) + \left(\dfrac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} \right) i$ ■	(Réécriture)

L'impédance dans les circuits électriques et l'usage des nombres complexes

Dans l'étude des circuits, la loi d'Ohm

$$\Delta V = R\,I$$

permet d'associer à un composant électrique ohmique de résistance constante R une différence de potentiel ΔV lorsque qu'un courant I circule dans le composant. La résistance R équivalente dans un circuit peut être combiné en série et en parallèle grâce aux équations



La représentation de la loi d'Ohm.

$$R_{\text{série}} = \sum_{i=1}^{N} R_i \quad \text{et} \quad R_{\text{parallèle}} = \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}\right]^{-1}$$

Lorsqu'on étudie les circuits avec des courants alternatifs de forme sinusoïdale de fréquence angulaire ω, les composants subissent des différences de potentiel $\Delta V = \Delta V_0 \sin\left(\omega t + \phi_0\right)$ et des courant y circule de forme $I = I_0 \sin\left(\omega t + \phi_0\right)$. Puisque ces circuits sont constitués de résistance R (des résisteurs), de capacité C (des condensateurs) et d'inductance L (des bobines), il est proposé de définir une loi d'Ohm généralisée[2] $\Delta V = Z\,I$ à ce cas particulier (avec courant alternatif sinusoïdale) où l'on doit introduit une nouvelle grandeur physique correspondant à l'impédance Z.

Dans la représentation en impédance, tous les composants (résisteurs, condensateur et inductance) peuvent être combiné en série et en parallèle grâce aux équations

$$Z_{\text{série}} = \sum_{i=1}^{N} Z_i \quad \text{et} \quad Z_{\text{parallèle}} = \left[\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{Z_i}\right]^{-1}$$

avec les caractéristiques suivants pour l'impédance des composants :

- L'impédance d'une résistance idéale : $Z_R = R$ (le Z_R d'un résisteur est réel)
- L'impédance d'un condensateur idéal : $Z_C = \dfrac{1}{i\omega C}$ (le Z_C d'un condensateur est imaginaire)
- L'impédance d'une bobine idéale : $Z_L = i\omega L$ (le Z_L d'une bobine est imaginaire)

La justification des termes Z_R, Z_C et Z_L seront présentés lorsque la représentation des nombres complexes en exponentiel aura été réalisée.

[2] Référence : https://fr.wikipedia.org/wiki/Imp%C3%A9dance_(%C3%A9lectricit%C3%A9)

Situation 1 : *Le circuit RLC en série.* Un circuit *RLC* est composé d'un résisteur de résistance R, d'un condensateur de capacité R, d'une bobine d'inductance L et d'une une source alternative sinusoïdale de fréquence angulaire ω tous branché en série. On désire déterminer l'impédance du circuit sous la forme $Z = a + b\,i$ en précisant l'expression de a et b.

En appliquant la règle des impédances branché en série, regroupons nos termes afin de former le nombre complexe sous la forme $Z = a + b\,i$:

$$Z = Z_R + Z_C + Z_L \quad \Rightarrow \quad Z = (R) + \left(\frac{1}{i\omega C}\right) + (i\omega L) \qquad \left(Z_R = R,\ Z_C = \frac{1}{i\omega C},\ Z_L = i\omega L\right)$$

$$\Rightarrow \quad Z = R + \frac{1}{i\omega C}\left(\frac{i}{i}\right) + i\omega L \qquad \text{(Multiplier par 1)}$$

$$\Rightarrow \quad Z = R + \frac{i}{i^2\omega C} + i\omega L \qquad \text{(Simplifier)}$$

$$\Rightarrow \quad Z = R + \frac{i}{(-1)\omega C} + i\omega L \qquad (i^2 = -1)$$

$$\Rightarrow \quad Z = R + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)i \qquad \text{(Factoriser)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a = R} \text{ et } \boxed{b = \omega L - \frac{1}{\omega C}} \qquad (Z = a + b\,i)$$

Exercices

2.5.1 *Les fonctions* Re(z) *et* Im(z). À partir du nombre complexe $z = a + bi$ et de la définition du conjugué complexe $\bar{z} = a - bi$, démontrez que

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} = a \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2i} = b$$

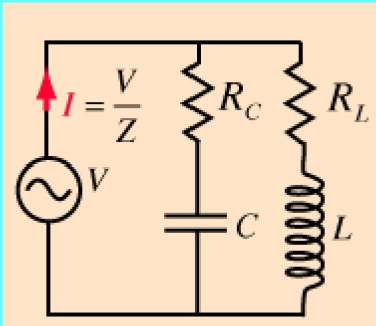
2.5.2 *La multiplication avec conjuguer.* À partir du nombre complexe $z_1 = a_1 + b_1 i$ et $z_2 = a_2 + b_2 i$, démontrez que

$$z = z_1 \bar{z}_2 = (a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i$$

2.5.3 *Le circuit RLC en parallèle.* Un circuit *RLC* est composé d'un résisteur de résistance R, d'un condensateur de capacité R, d'une bobine d'inductance L et d'une une source alternative sinusoïdale de fréquence angulaire ω tous branchés en parallèle. On désire déterminer l'impédance du circuit sous la forme $Z = a + bi$ en précisant l'expression de a et b.

2.5.4 *Un circuit RC et RL en parallèle.* Un circuit *RC et* RL en parallèle (voir schéma ci-contre) est composé d'une branche ayant une résistance R_C et une capacité C et d'une branche ayant une résistance R_L et une inductance L le tout branché en parallèle avec une source alternative sinusoïdale de fréquence angulaire ω. On désire déterminer l'impédance du circuit sous la forme $Z = a + bi$ en précisant l'expression de a et b.

Remarque : Pour simplifier la forme de votre expression, utiliser le changement de variable suivant : $U = \omega L - \dfrac{1}{\omega C}$



http://230nsc1.phy-astr.gsu.edu/hbase/electric/rlcpar.html

Réponses

2.5.1 ***Les fonctions* Re(*z*) *et* Im(*z*).** Puisque cet exercice est une démonstration, il n'y a pas de réponse suggérée.

2.5.2 ***La multiplication avec conjuguer.*** Puisque cet exercice est une démonstration, il n'y a pas de réponse suggérée.

2.5.3 ***Le circuit RLC en parallèle.***

Appliquons la règle de la combinaison des impédances en parallèle :

$$Z = \left[\frac{1}{Z_R} + \frac{1}{Z_C} + \frac{1}{Z_L}\right]^{-1} \quad \Rightarrow \quad Z = \left[\frac{1}{(R)} + \frac{1}{(1/i\omega C)} + \frac{1}{(i\omega L)}\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad Z = \left[\frac{1}{R} + i\omega C + \frac{1}{i\omega L}\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad Z = \left[\frac{1}{R}\left(\frac{i\omega L}{i\omega L}\right) + i\omega C\left(\frac{i\omega LR}{i\omega LR}\right) + \frac{1}{i\omega L}\left(\frac{R}{R}\right)\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad Z = \left[\frac{i\omega L + i^2\omega^2 RLC + R}{i\omega RL}\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad Z = \left[\frac{i\omega L - \omega^2 RLC + R}{i\omega RL}\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad Z = \frac{i\omega RL}{R - \omega^2 RLC + i\omega L}$$

$$\Rightarrow \quad Z = \frac{i\omega RL}{R - \omega^2 RLC + i\omega L}\left(\frac{R - \omega^2 RLC - i\omega L}{R - \omega^2 RLC - i\omega L}\right)$$

$$\Rightarrow \quad Z = \frac{i\omega RL\left(R - \omega^2 RLC\right) + i\omega RL\left(-i\omega L\right)}{\left(R - \omega^2 RLC\right)^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\Rightarrow \quad Z = \frac{\omega^2 RL^2 + \omega RL\left(R - \omega^2 RLC\right)i}{\left(R - \omega^2 RLC\right)^2 + \omega^2 L^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a = \frac{\omega^2 RL^2}{\left(R - \omega^2 RLC\right)^2 + \omega^2 L^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{b = \frac{\omega RL\left(R - \omega^2 RLC\right)}{\left(R - \omega^2 RLC\right)^2 + \omega^2 L^2}}$$

2.5.4 *Un circuit RC et RL en parallèle.*

L'impédance de la branche du condensateur est égale à l'expression suivante :

$$Z_{B-C} = Z_R + Z_C \quad \Rightarrow \quad Z_{B-C} = R_C + \frac{1}{i\omega C} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_{B-C} = R_C - \frac{i}{\omega C}}$$

L'impédance de la branche de la bobine est égale à l'expression suivante :

$$Z_{B-L} = Z_R + Z_L \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z_{B-L} = R_L + i\omega L}$$

Évaluons l'impédance des deux branches en parallèle :

$$Z = \left[\frac{1}{Z_{B-C}} + \frac{1}{Z_{B-L}}\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad Z = \left[\frac{1}{Z_{B-C}}\left(\frac{Z_{B-L}}{Z_{B-L}}\right) + \frac{1}{Z_{B-L}}\left(\frac{Z_{B-C}}{Z_{B-C}}\right)\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad Z = \left[\frac{Z_{B-L} + Z_{B-C}}{Z_{B-C} Z_{B-L}}\right]^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad Z = \frac{Z_{B-C}\ Z_{B-L}}{Z_{B-L} + Z_{B-C}}$$

$$\Rightarrow \quad Z = \frac{\left(R_C - \frac{i}{\omega C}\right)\left(R_L + i\omega L\right)}{\left(R_L + i\omega L\right) + \left(R_C - \frac{i}{\omega C}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Z = \frac{\left(R_C - \frac{i}{\omega C}\right)\left(R_L + i\omega L\right)}{R_L + R_C + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)i}} \qquad \text{(expression non sous la forme } Z = a + b\,i\text{)}$$

Pour simplifier l'expression, utilisons le changement de variable $U = \omega L - \frac{1}{\omega C}$:

$$Z = \frac{\left(R_C - \frac{i}{\omega C}\right)\left(R_L + i\omega L\right)}{R_L + R_C + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)i} \qquad \text{(équation précédente)}$$

$$\Rightarrow \quad Z = \frac{\left(R_C - \frac{i}{\omega C}\right)\left(R_L + i\omega L\right)}{R_L + R_C + Ui} \qquad \left(U = \omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$\Rightarrow \quad Z=\frac{\left(R_C-\frac{i}{\omega C}\right)\left(R_L+i\omega L\right)}{R_L+R_C+Ui}\left(\frac{R_L+R_C-Ui}{R_L+R_C-Ui}\right)$$

$$\Rightarrow \quad Z=\frac{\left(R_C-\frac{i}{\omega C}\right)\left(R_L+i\omega L\right)\left(R_L+R_C-Ui\right)}{\left(R_L+R_C\right)^2-U^2i^2}$$

$$\Rightarrow \quad Z=\frac{\left(R_L+R_C\right)\left(R_C-\frac{i}{\omega C}\right)\left(R_L+i\omega L\right)+\left(-Ui\right)\left(R_C-\frac{i}{\omega C}\right)\left(R_L+i\omega L\right)}{\left(R_L+R_C\right)^2+U^2}$$

$$\Rightarrow \quad Z=\frac{\left(R_L+R_C\right)\left(R_CR_L+R_Ci\omega L-\frac{i}{\omega C}R_L-\frac{i}{\omega C}i\omega L\right)+U\left(R_C-\frac{i}{\omega C}\right)\left(-iR_L-ii\omega L\right)}{\left(R_L+R_C\right)^2+U^2}$$

$$\Rightarrow \quad Z=\frac{\left(R_L+R_C\right)\left(R_CR_L+R_C\omega Li-\frac{R_L}{\omega C}i+\frac{L}{C}\right)+U\left(R_C-\frac{1}{\omega C}i\right)\left(\omega L-R_Li\right)}{\left(R_L+R_C\right)^2+U^2}$$

$$\Rightarrow \quad Z=\frac{\left(R_L+R_C\right)\left(R_CR_L+\frac{L}{C}+\left(\omega LR_C-\frac{R_L}{\omega C}\right)i\right)+U\left(R_C-\frac{1}{\omega C}i\right)\left(\omega L-R_Li\right)}{\left(R_L+R_C\right)^2+U^2}$$

$$\Rightarrow \quad Z=\frac{\left(R_L+R_C\right)\left(R_CR_L+\frac{L}{C}+\left(\omega LR_C-\frac{R_L}{\omega C}\right)i\right)+U\left(R_C\omega L-R_CR_Li-\frac{1}{\omega C}i\left(\omega L\right)+\left(-\frac{1}{\omega C}\right)i\left(-R_Li\right)\right)}{\left(R_L+R_C\right)^2+U^2}$$

$$\Rightarrow \quad Z=\frac{\left(R_L+R_C\right)\left(R_CR_L+\frac{L}{C}+\left(\omega LR_C-\frac{R_L}{\omega C}\right)i\right)+U\left(\omega R_CL-R_CR_Li-\frac{L}{C}i-\frac{R_L}{\omega C}\right)}{\left(R_L+R_C\right)^2+U^2}$$

$$\Rightarrow \quad Z=\frac{\left(R_L+R_C\right)\left(R_CR_L+\frac{L}{C}+\left(\omega LR_C-\frac{R_L}{\omega C}\right)i\right)+U\left(\omega R_CL-\frac{R_L}{\omega C}-\left(R_CR_L+\frac{L}{C}\right)i\right)}{\left(R_L+R_C\right)^2+U^2}$$

$$\Rightarrow \quad Z=\frac{\left(R_L+R_C\right)\left(R_CR_L+\frac{L}{C}\right)+U\left(\omega R_CL-\frac{R_L}{\omega C}\right)+\left[\left(R_L+R_C\right)\left(\omega R_CL-\frac{R_L}{\omega C}\right)-U\left(R_CR_L+\frac{L}{C}\right)\right]i}{\left(R_L+R_C\right)^2+U^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{a=\frac{\left(R_L+R_C\right)\left(R_CR_L+\frac{L}{C}\right)+U\left(\omega R_CL-\frac{R_L}{\omega C}\right)}{\left(R_L+R_C\right)^2+U^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{b=\frac{\left(R_L+R_C\right)\left(\omega LR_C-\frac{R_L}{\omega C}\right)-U\left(R_CR_L+\frac{L}{C}\right)}{\left(R_L+R_C\right)^2+U^2}}$$