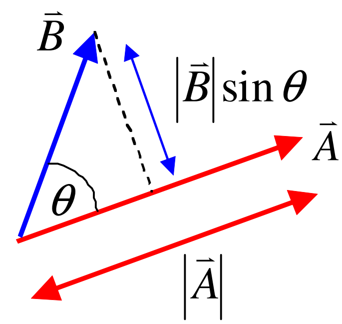
# Chapitre 2.3 – Le produit vectoriel

## La définition du produit vectoriel

Le produit vectoriel est une autre opération algébrique entre deux vecteurs dont le résultat est un vecteur. On utilise l'opérateur « $\times$ » pour désigner le produit vectoriel.

En géométrie euclidienne[1], le produit vectoriel entre une vecteur $\vec{A}$ et $\vec{B}$ correspond au produit des modules des composantes perpendiculaires entre les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ dont l'orientation du vecteur résultant se doit d'être perpendiculaire à $\vec{A}$ et $\vec{B}$ simultanément. On utilise la fonction sinus et l'angle $\theta$ entre les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ pour obtenir les composantes perpendiculaires d'un vecteur par rapport à l'autre :

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin(\theta)$$




où $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|$ : Module du produit vectoriel entre le vecteur $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

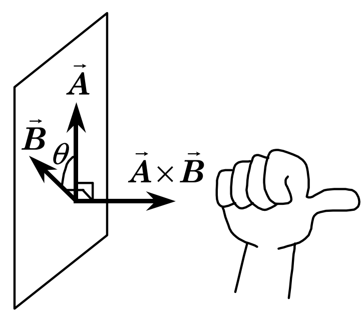
$\left|\vec{A}\right|$ : Module du vecteur $\vec{A}$ ($\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2} + A_z^{\ 2}}$)

$\left|\vec{B}\right|$ : Module du vecteur $\vec{B}$ ($\left|\vec{B}\right| = \sqrt{B_x^{\ 2} + B_y^{\ 2} + B_z^{\ 2}}$)

$\theta$ : Angle entre le vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

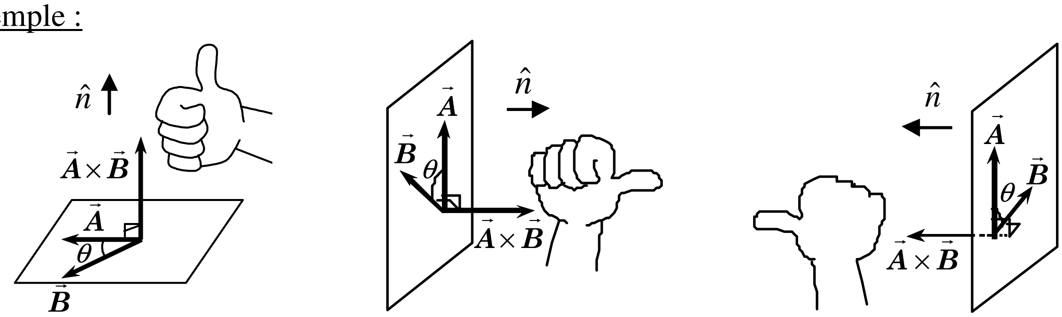
Pour identifier l'orientation du l'orientation du vecteur $\vec{A}\times\vec{B}$, il suffit d'identifier un plan formé à l'aide du vecteur $\vec{A}$ et $\vec{B}$ et de trouver un vecteur perpendiculaire à ce plan. Puisqu'il y a deux choix possibles, la **règle de la main droite** choisie l'orientation pointant dans la direction tel qu'illustré sur le schéma ci-contre. On utilise le vecteur unitaire $\hat{n}$ pour désigner l'orientation du produit vectoriel :

$$\hat{n} = \frac{\vec{A}\times\vec{B}}{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|}$$




Orientation du produit vectoriel $\vec{A}\times\vec{B}$ à l'aide de la main droite.

Exemple :




[1] L'espace euclidien permet d'évaluer les distances par le théorème de Pythagore ($d = \sqrt{x^2 + y^2}$).

En algèbre vectorielle euclidienne dans un plan cartésien $xyz$ en trois dimensions, on définit le produit vectoriel de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\vec{A}\times\vec{B} &= \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin(\theta)\hat{n} \\ &= \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\vec{i} - \left(A_xB_z - A_zB_x\right)\vec{j} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\vec{k}\end{aligned}$$

où $\vec{A}\times\vec{B}$ : Produit vectoriel entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

$\left|\vec{A}\right|$ : Module du vecteur $\vec{A}$

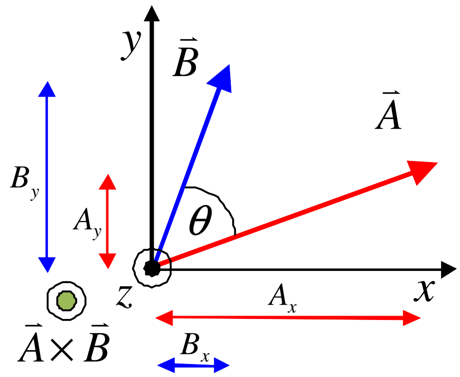
$\left|\vec{B}\right|$ : Module du vecteur $\vec{B}$

$\theta$ : Angle entre le vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

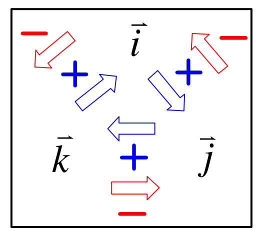
$\hat{n}$ : Vecteur unitaire orientation

et $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$

$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$




## Propriétés du produit vectoriel




Voici quelques propriétés du produit scalaire :

- Distributif $\quad \vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \left(\vec{A}\times\vec{B}\right)+\left(\vec{A}\times\vec{C}\right)$
- Anticommutatif $\quad \vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$
- Produit unitaire : $\quad \vec{i}\times\vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i} = \vec{j}$ (sens horaire)

  $\vec{j}\times\vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{j} = -\vec{i}$, $\vec{i}\times\vec{k} = -\vec{j}$ (sens anti-horaire)
- Produit nul : $\quad \vec{i}\times\vec{i} = 0$, $\vec{j}\times\vec{j} = 0$, $\vec{k}\times\vec{k} = 0$, $\hat{n}\times\hat{n} = 0$

**Situation A : *Le vecteur perpendiculaire*.** À partir de la définition du produit vectoriel, trouvez un vecteur perpendiculaire au vecteur $\vec{A} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$ et au vecteur $\vec{B} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ simultanément.

Évaluons le produit vectoriel entre le vecteur $\vec{A}$ et $\vec{B}$ afin d'obtenir un vecteur perpendiculaire à $\vec{A}$ et $\vec{B}$ simultanément :

$$\vec{A}\times\vec{B} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\vec{i} - \left(A_xB_z - A_zB_x\right)\vec{j} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A}\times\vec{B} = \left[(6)(5) - (-2)(2)\right]\vec{i} - \left[(3)(5) - (-2)(-1)\right]\vec{j} + \left[(3)(2) - (6)(-1)\right]\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A}\times\vec{B} = (30 \; - \; -4)\vec{i} - (15 \; - \; 2)\vec{j} + (6 \; - \; -6)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{A}\times\vec{B} = 34\vec{i} - 13\vec{j} + 12\vec{k}}$$

# Exercice

**Exercice 1 :** ***Le calcul du produit vectoriel.*** À partir du vecteur $\vec{A} = 5\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ et du vecteur $\vec{B} = -2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$, on désire évaluer (a) le produit $\vec{A} \times \vec{B}$ et (b) l'angle $\theta$ entre le vecteur $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

# Solution

**Exercice 1 :** ***Le calcul du produit vectoriel.***

a) Évaluons le produit vectoriel $\vec{A} \times \vec{B}$ :

$$\vec{A} \times \vec{B} = \left(A_y B_z - A_z B_y\right)\vec{i} - \left(A_x B_z - A_z B_x\right)\vec{j} + \left(A_x B_y - A_y B_x\right)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A} \times \vec{B} = \left[\,(3)(1) - (-2)(4)\,\right]\vec{i} - \left[\,(5)(1) - (-2)(-2)\,\right]\vec{j} + \left[\,(5)(4) - (3)(-2)\,\right]\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{A} \times \vec{B} = (3 \;-\; -8)\vec{i} - (5 \;-\; 4)\vec{j} + (20 \;-\; -6)\vec{k}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{A} \times \vec{B} = 11\vec{i} - \vec{j} + 26\vec{k}}$$

b) Évaluons l'angle $\theta$ entre le vecteur $\vec{A}$ et $\vec{B}$ :

- $\left|\vec{A}\right| = \sqrt{(5)^2 + (3)^2 + (-2)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left|\vec{A}\right| = \sqrt{38}}$
- $\left|\vec{B}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (4)^2 + (1)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left|\vec{B}\right| = \sqrt{21}}$
- $\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \sqrt{(11)^2 + (-1)^2 + (26)^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \sqrt{798}}$
- $\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| = \left(\sqrt{38}\right)\left(\sqrt{21}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| = \sqrt{798}}$

À partir de la définition du module du produit vectoriel :

$$\left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin(\theta) \quad \Rightarrow \quad \sin(\theta) = \frac{\left|\vec{A} \times \vec{B}\right|}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|}$$

$$\Rightarrow \quad \sin(\theta) = \frac{\left(\sqrt{798}\right)}{\left(\sqrt{798}\right)}$$

$$\Rightarrow \quad \sin(\theta) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta = 90°}$$