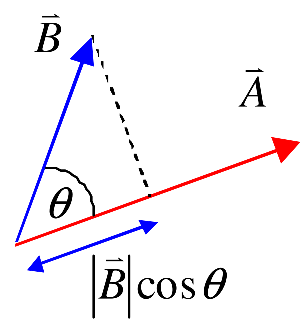
Chapitre 2.2 – Le produit scalaire

La définition du produit scalaire

Le produit scalaire est une autre opération algébrique entre deux vecteurs dont le résultat est un scalaire. On utilise l'opérateur « $\cdot$ » pour désigner le produit scalaire.

En géométrie euclidienne[1], le produit scalaire entre une vecteur $\vec{A}$ et $\vec{B}$ correspond au produit des modules des composantes parallèles des vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$. On utilise la fonction cosinus et l'angle θ entre les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ pour obtenir les composantes parallèles d'un vecteur par rapport à l'autre :

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos(\theta)$$



où $\vec{A}\cdot\vec{B}$: Produit scalaire entre le vecteur $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

$\left|\vec{A}\right|$: Module du vecteur $\vec{A}$ ($\left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_x^{\,2} + A_y^{\,2} + A_z^{\,2}}$)

$\left|\vec{B}\right|$: Module du vecteur $\vec{B}$ ($\left|\vec{B}\right| = \sqrt{B_x^{\,2} + B_y^{\,2} + B_z^{\,2}}$)

θ : Angle entre le vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

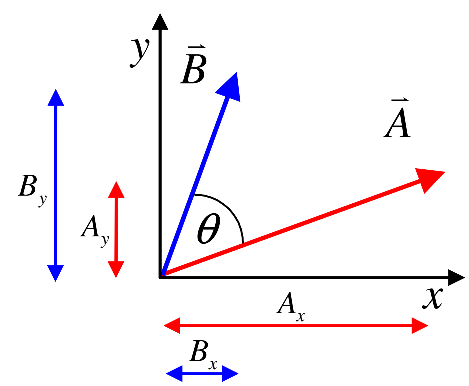
En algèbre vectorielle euclidienne, le produit scalaire entre un vecteur $\vec{A}$ et $\vec{B}$ correspond à la somme des produits des composantes parallèles entre les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$. En coordonnée cartésienne *xyz* en trois dimensions, on définit le produit scalaire de la façon suivante :

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

où $\vec{A}\cdot\vec{B}$: Produit scalaire entre le vecteur $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

et $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$

$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$



[1] L'espace euclidien permet d'évaluer les distances par le théorème de Pythagore ($d = \sqrt{x^2 + y^2}$).

Propriétés du produit scalaire

Voici quelques propriétés du produit scalaire :

- Distributif $\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = (\vec{A}\cdot\vec{B}) + (\vec{A}\cdot\vec{C})$
- Commutatif $\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}$
- Produit unitaire : $\vec{i}\cdot\vec{i}=1$, $\vec{j}\cdot\vec{j}=1$, $\vec{k}\cdot\vec{k}=1$, $\hat{n}\cdot\hat{n}=1$
- Produit nul : $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$, $\vec{i}\cdot\vec{k}=0$, $\vec{j}\cdot\vec{k}=0$, $\hat{n}\cdot\hat{o}=0 \ si\ \hat{n}\perp\hat{o}$
- Module au carré d'un vecteur : $\vec{A}\cdot\vec{A} = |\vec{A}||\vec{A}| = |\vec{A}|^2$
- Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\vec{A}\cdot\vec{B} \le |\vec{A}||\vec{B}|$, car $\cos(\theta) \in [-1..1]$

Situation A : ***L'angle entre deux vecteurs*.** À partir des deux définitions du produit scalaire, évaluez l'angle entre le vecteur $\vec{A} = 3\vec{i} + 6\vec{j} - 2\vec{k}$ et le vecteur $\vec{B} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$.

Évaluons le produit scalaire entre $\vec{A}$ et $\vec{B}$ à partir de la définition vectorielle :

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \quad\Rightarrow\quad \vec{A}\cdot\vec{B} = (3)(-1)+(6)(2)+(-2)(5)$$

$$\Rightarrow\quad \vec{A}\cdot\vec{B} = -3+12+-10$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = -1}$$

Évaluons le module du vecteur $\vec{A}$ et $\vec{B}$:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^{\ 2} + A_y^{\ 2} + A_z^{\ 2}} \quad\Rightarrow\quad |\vec{A}| = \sqrt{(3)^2 + (6)^2 + (-2)^2}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{|\vec{A}| = 7}$$

$$|\vec{B}| = \sqrt{B_x^{\ 2} + B_y^{\ 2} + B_z^{\ 2}} \quad\Rightarrow\quad |\vec{B}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (5)^2}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{|\vec{B}| = \sqrt{30}}$$

Évaluons l'angle entre le vecteur $\vec{A}$ et $\vec{B}$ à partir de la définition géométrique du produit scalaire :

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos(\theta) \quad\Rightarrow\quad (-1) = |\vec{A}||\vec{B}|\cos(\theta)$$ (Résultat du calcul vectoriel)

$$\Rightarrow\quad \cos(\theta) = \frac{-1}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$ (Isoler $\cos(\theta)$)

$$\Rightarrow\quad \cos(\theta) = \frac{-1}{(7)(\sqrt{30})}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\theta = 91{,}49°}$$

Exercices

Exercice 1 : ***Le produit scalaire avec la définition géométrique.*** On désire évaluer le produit $\vec{A}\cdot\vec{B}$ sachant que $|\vec{A}|=4$, $|\vec{B}|=6$ et qu'il y a un angle $\theta=30°$ entre le vecteur $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Exercice 2 : ***Le produit scalaire avec la définition vectorielle.*** On désire **(a)** évaluer le produit $\vec{A}\cdot\vec{B}$ sachant que $\vec{A}=5\vec{i}+3\vec{j}-2\vec{k}$ et $\vec{B}=-2\vec{i}+4\vec{j}+\vec{k}$ puis **(b)** évaluer l'angle θ entre les deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$.

Solutions

Exercice 1 : ***Le produit scalaire avec la définition géométrique.***

Évaluons le produit scalaire à partir de la définition géométrique :

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos(\theta) \quad\Rightarrow\quad \vec{A}\cdot\vec{B}=(4)(6)\cos(30°)=20{,}78$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=20{,}78}$$

Exercice 2 : ***Le produit scalaire avec la définition vectorielle.***

Évaluons le produit scalaire à partir de la définition vectorielle :

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z \quad\Rightarrow\quad \vec{A}\cdot\vec{B}=(5)(-2)+(3)(4)+(-2)(1)$$

$$\Rightarrow\quad \vec{A}\cdot\vec{B}=-10+12+-2$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=0} \qquad \textbf{(a)}$$

Évaluons le produit scalaire à partir de la définition géométrique en utilisant le résultat précédent :

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos(\theta) \quad\Rightarrow\quad \cos(\theta)=\frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

$$\Rightarrow\quad \cos(\theta)=\frac{(0)}{|\vec{A}||\vec{B}|}$$

$$\Rightarrow\quad \cos(\theta)=0$$

$$\Rightarrow\quad \cos(\theta)=\left\{\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{2}\right\}=\{90°,-90°\} \qquad \textbf{(b)}$$