Chapitre 1.3 – Fonctions trigonométriques inverses

Fonction arcsinus et arccosinus

La fonction **arcsinus** (arcsin ou $\sin^{-1}$) permet d'évaluer un **arc de cercle** pour **obtenir** la **coordonnée *y*** d'un point situé sur un cercle trigonométrique. Cette fonction effectue exactement l'inverse de la fonction sinus :[1]

$$\theta = \arcsin(y) \quad \text{ou} \quad \theta = \sin^{-1}(y)$$

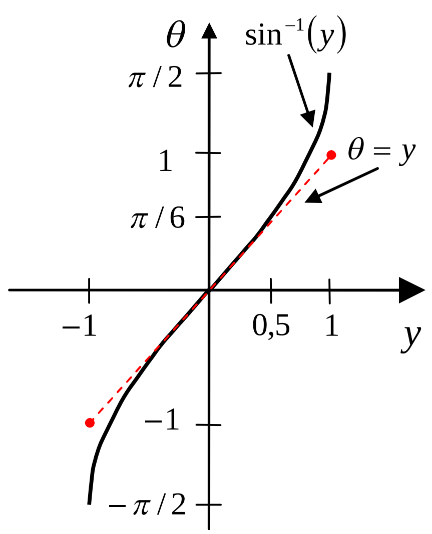
où $\arcsin(y)$: Fonction définissant l'arc de cercle pour obtenir la coordonnée y.
y : Coordonnée y du point sur le cercle trigonométrique.
θ : Arc de cercle trigonométrique.

La fonction **arccosinus** (arccos ou cos-1) permet d'évaluer un **arc de cercle** pour **obtenir** la **coordonnée *x*** d'un point situé sur un cercle trigonométrique. Cette fonction effectue exactement l'inverse de la fonction cosinus :

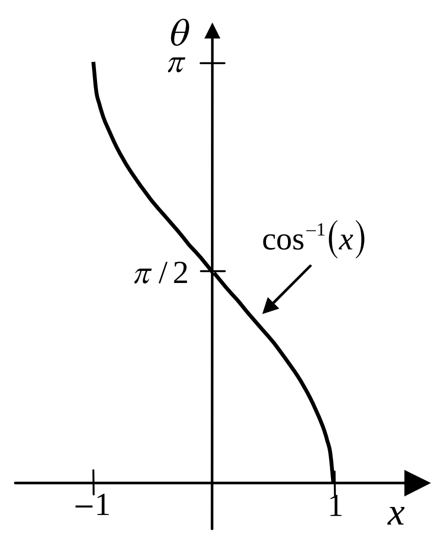
$$\theta = \arccos(x) \quad \text{ou} \quad \theta = \cos^{-1}(x)$$

où $\arccos(x)$: Fonction définissant l'arc de cercle pour obtenir la coordonnée x.
x : Coordonnée x du point sur le cercle trigonométrique.
θ : Arc de cercle trigonométrique.

<u>Voici la forme de la fonction :</u> $\sin^{-1}(y)$



<u>Voici la forme de la fonction :</u> $\cos^{-1}(x)$



N.B. Le domaine de ces deux fonctions se limite à [-1 … 1]

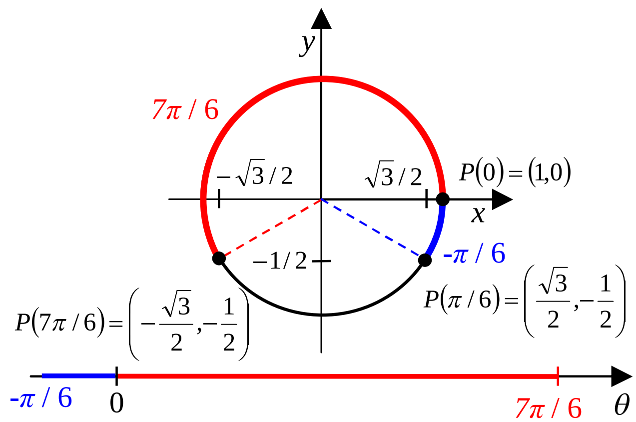
---

[1] Ne pas confondre la notation suivante : $\sin^{-1}(y) \neq \sin(y)^{-1} = [\sin(y)]^{-1} \neq \sin(y^{-1})$

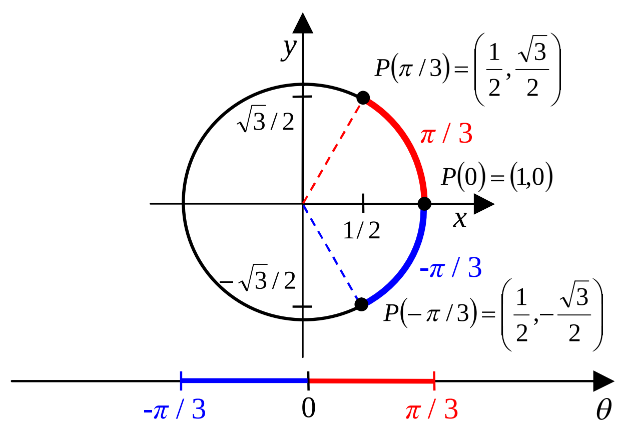
Solutions d’une fonction trigonométrique inverse

Lorsqu’on évalue une fonction trigonométrique inverse, la **calculatrice** nous donne **toujours** le **plus petit arc de cercle** (positif ou négatif) permettant de localiser la coordonnée fournie dans l’argument de la fonction. Cependant, il y a **plusieurs valeurs d’arc** menant à une même coordonnée. Il y a donc plusieurs solutions à une fonction trigonométrique inverse :

<u>Ex :</u> $\sin^{-1}(-1/2) = \{ \dots,\ -5\pi/6,\ -\pi/6,\ 7\pi/6,\ 11\pi/6,\ \dots \}$



$\cos^{-1}(1/2) = \{ \dots,\ -5\pi/3,\ -\pi/3,\ \pi/3,\ 5\pi/3,\ \dots \}$



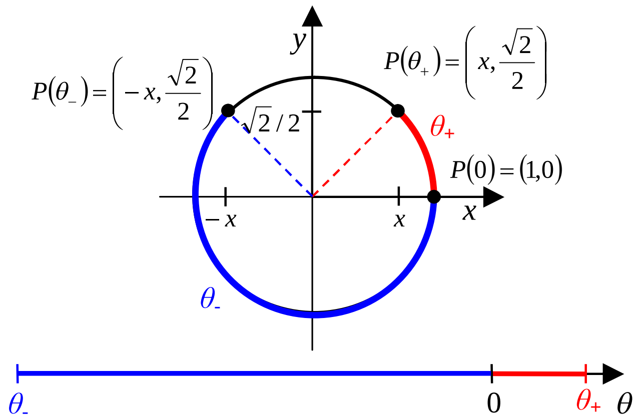
<u>Pour obtenir l’ensemble des solutions, il faut :</u> (exemple avec $\cos^{-1}(x)$)

1) Calculer l’arc de cercle positif ($\theta_+ > 0$) $\Rightarrow$ $\cos^{-1}(x) = \theta_+$
   Ajouter tous les multiples de 2π à cette solution. $\Rightarrow$ $\cos^{-1}(x) = \{\theta_+ + 2n\pi\}\ ,\ n \in Z$

2) Calculer l’arc de cercle négatif ($\theta_- < 0$) $\Rightarrow$ $\cos^{-1}(x) = \theta_-$
   Soustraire tous le multiple de 2π à cette solution. $\Rightarrow$ $\cos^{-1}(x) = \{\theta_- - 2n\pi\},\ n \in Z$

Situation A : *Solutions de la fonction arcsinus.* On désire trouver les six premières solutions de l'équation $\theta = \sin^{-1}\left(\sqrt{2}/2\right)$.

<u>Voici les positions sur le cercle trigonométrique représenté par la coordonnée :</u> $y = \sqrt{2}/2$



Avec la calculatrice, évaluons l'expression :

$$\sin^{-1}\left(\sqrt{2}/2\right) = 0{,}785 = \pi/4$$

Nous avons l'expression suivante : $\boxed{\theta_+ = \pi/4}$

Par symétrie, on peut réaliser que l'expression pour évaluer θ_- peut s'évaluer à l'aide d'un demi tour ce cercle pour l'angle θ_+ :

$$\theta_- = -\pi - \left|\theta_+\right| \quad \Rightarrow \quad \theta_- = -\pi - \left|\pi/4\right|$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\theta_- = -5\pi/4}$$

Voici les 3 premiers arcs calculés avec θ_+ : ($n \in \{-1, 0, 1\}$)

$$\sin^{-1}(x) = \{\theta_+ + 2n\pi\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lll} \theta = \pi/4 + 2(-1)\pi & \Rightarrow \quad \theta = -7\pi/4 & (n = -1) \\ \theta = \pi/4 + 2(0)\pi & \Rightarrow \quad \theta = \pi/4 & (n = 0) \\ \theta = \pi/4 + 2(1)\pi & \Rightarrow \quad \theta = 9\pi/4 & (n = 1) \end{array}$$

Voici les 3 premiers arcs calculés avec θ_- : ($n \in \{-1, 0, 1\}$)

$$\sin^{-1}(x) = \{\theta_- - 2n\pi\} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{lll} \theta = -5\pi/4 + 2(-1)\pi & \Rightarrow \quad \theta = -13\pi/4 & (n = -1) \\ \theta = -5\pi/4 + 2(0)\pi & \Rightarrow \quad \theta = -5\pi/4 & (n = 0) \\ \theta = -5\pi/4 + 2(1)\pi & \Rightarrow \quad \theta = 3\pi/4 & (n = 1) \end{array}$$

Nous avons dans l'ordre : $\boxed{\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\theta = \left\{-\frac{13\pi}{4}, -\frac{7\pi}{4}, -\frac{5\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{9\pi}{4}\right\}}$