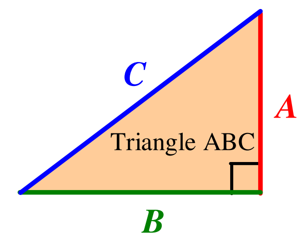
Chapitre 1.2 – Identités trigonométriques

Le théorème de Pythagore

Le théorème de Pythagore démontre que dans un triangle rectangle ABC quelconque, le carré de l'hypoténuse (côté opposé à l'angle droit, C) est égal à la somme des carrés des deux autres côtés (A et B) :

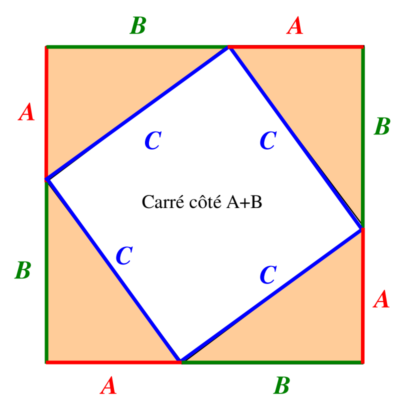
$$A^2 + B^2 = C^2$$



où A : Longueur du côté « A » du triangle rectangle.
B : Longueur du côté « B » du triangle rectangle.
C : Longueur du côté « C » (hypoténuse) du triangle rectangle.

Preuve[1] :

À l'aide de 4 triangles rectangles ABC identiques quelconque, construisons un carré dont chaque côté possède une largeur de A+B :



L'aire du triangle ABC est égale à :

$$Aire_{\text{triangle ABC}} = \frac{AB}{2}$$

L'aire du carré de côté A+B est égale à :

$$\begin{aligned} Aire_{\text{carré A+B}} &= (A+B)^2 \\ &= A^2 + 2AB + B^2 \end{aligned}$$

L'aire du carré de côté C est égale à :

$$Aire_{\text{carré C}} = C^2$$

L'aire du carré de côté C peut être également calculée de la façon suivante :

$$Aire_{\text{carré C}} = Aire_{\text{carré A+B}} - 4Aire_{\text{triangle ABC}} \quad \Rightarrow \quad Aire_{\text{carré C}} = \left(A^2 + 2AB + B^2\right) - 4\left(\frac{AB}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad Aire_{\text{carré C}} = A^2 + B^2$$

$$\Rightarrow \quad C^2 = A^2 + B^2 \;\blacksquare$$

[1] Cette preuve est une référence du site : http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Pythagore

Le théorème de Pythagore dans le cercle trigonométrique

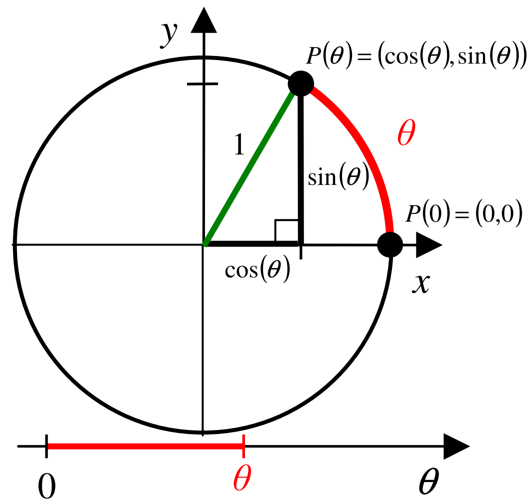
Puisque le cercle trigonométrique possède un rayon de « 1 » unité, tous les points situés sur le cercle peuvent former un triangle rectangle dont l'hypoténuse vaut « 1 » unité. Avec la fonction cosinus qui mesure la base du triangle (axe x) et la fonction sinus qui mesure la hauteur du triangle (axe y), nous pouvons affirmer avec le théorème de Pythagore que :

$$\cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1$$

où θ : Arc de cercle trigonométrique.

$\cos(\theta)$: Base du triangle (axe x).

$\sin(\theta)$: Hauteur du triangle (axe y).



Autres fonctions trigonométriques

Voici d'autres fonctions trigonométriques associées à des opérations entre les fonctions sinus et cosinus :

	Fonction		
Tangente :	$\tan(\theta)=\dfrac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$	et	$\tan(\theta)^{-1}=1/\tan(\theta)=\cot(\theta)$
Cotangente :	$\cot(\theta)=\dfrac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}$	et	$\cot(\theta)^{-1}=1/\cot(\theta)=\tan(\theta)$
Sécante :	$\sec(\theta)=\dfrac{1}{\cos(\theta)}$	et	$\sec(\theta)^{-1}=1/\sec(\theta)=\cos(\theta)$
Cosécante :	$\csc(\theta)=\dfrac{1}{\sin(\theta)}$	et	$\csc(\theta)^{-1}=1/\csc(\theta)=\sin(\theta)$

Identités trigonométriques

Il est parfois agréable de transformer une fonction trigonométrique sous une autre forme afin de mieux l'analyser. Voici quelques identités trigonométriques très pratiques :

Pythagore :

$$\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)=1$$
$$\tan^2(\theta)+1=\sec^2(\theta)$$
$$1+\cot^2(\theta)=\csc^2(\theta)$$

Inversion de l'arc :

$$\cos(-\theta)=\cos(\theta)$$
$$\sin(-\theta)=-\sin(\theta)$$
$$\tan(-\theta)=-\tan(\theta)$$

Ajout d'une phase $\pi/2$:

$$\cos(\theta+\pi/2)=-\sin(\theta)$$
$$\sin(\theta+\pi/2)=\cos(\theta)$$
$$\tan(\theta+\pi/2)=-\cot(\theta)$$

Expression au carré :

$$\sin^2(\theta)=\frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$
$$\cos^2(\theta)=\frac{1+\cos(2\theta)}{2}$$

Ajout d'une phase π :

$$\sin(\pi-\theta)=\sin(\theta)$$
$$\sin(\pi+\theta)=-\sin(\theta)$$
$$\cos(\pi-\theta)=-\cos(\theta)$$
$$\cos(\pi+\theta)=-\cos(\theta)$$

Addition de deux arcs :

$$\cos(\theta\pm\phi)=\cos(\theta)\cdot\cos(\phi)\mp\sin(\theta)\cdot\sin(\phi)$$
$$\sin(\theta\pm\phi)=\sin(\theta)\cdot\cos(\phi)\pm\cos(\theta)\cdot\sin(\phi)$$
$$\tan(\theta\pm\phi)=\frac{\tan(\theta)\pm\tan(\phi)}{1\mp\tan(\theta)\tan(\phi)}$$

Multiplication d'arc par 2 :

$$\cos(2\theta)=\cos^2(\theta)-\sin^2(\theta)$$
$$\sin(2\theta)=2\sin(\theta)\cdot\cos(\theta)$$

Produit de sinus et cosinus :

$$\sin(\theta)\cdot\cos(\phi)=\frac{1}{2}\left[\sin(\theta-\phi)+\sin(\theta+\phi)\right]$$
$$\sin(\theta)\cdot\sin(\phi)=\frac{1}{2}\left[\cos(\theta-\phi)-\cos(\theta+\phi)\right]$$
$$\cos(\theta)\cdot\cos(\phi)=\frac{1}{2}\left[\cos(\theta-\phi)+\cos(\theta+\phi)\right]$$

Factorisation de sinus et cosinus :

$$\cos(A)+\cos(B)=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\cos(A)-\cos(B)=-2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\sin(A)+\sin(B)=2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$
$$\sin(A)-\sin(B)=2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

Formule de l'arc moitié :

Soit : $t=\tan(A/2)$

$$\sin(A)=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos(A)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$
$$\tan(A)=\frac{2t}{1-t^2}$$

Loi des sinus

Équation : $\frac{A}{\sin(\theta_A)} = \frac{B}{\sin(\theta_B)} = \frac{C}{\sin(\theta_C)}$

Preuve : En construction …

Théorème d'Al-Kashi ou Loi des cosinus

Équation : $A^2 = B^2 + C^2 - 2BC\cos(\theta)$

Preuve : En construction …