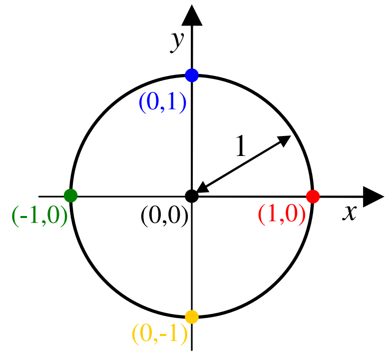
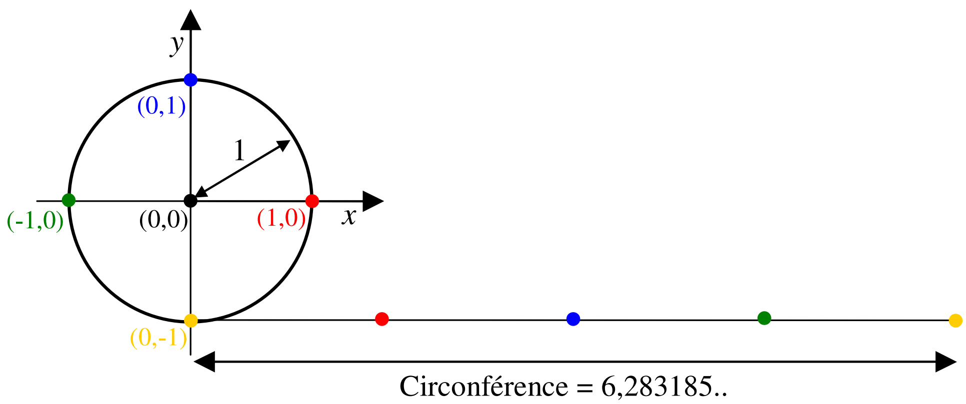
Chapitre 1.1 - Le cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique représente un cercle de « 1 » unité de rayon centré à l'origine d'un plan cartésien *xy* :



Si l'on fait rouler ce cercle sur une ligne droite, on peut mesurer la circonférence du cercle et retrouver les quatre points identifiés sur le cercle aux endroits suivants :



Le nombre π

Puisque la circonférence d'un cercle trigonométrique est un nombre irrationnel, on définit <u>exactement</u> la circonférence d'un cercle trigonométrique de la façon suivante :

$$C_{trigo} = 2\pi \approx 6{,}283185$$

où C_{trigo} : Circonférence du cercle trigonométrique.

π : Le nombre irrationnel Pi ($\pi = 3{,}141592654...$).

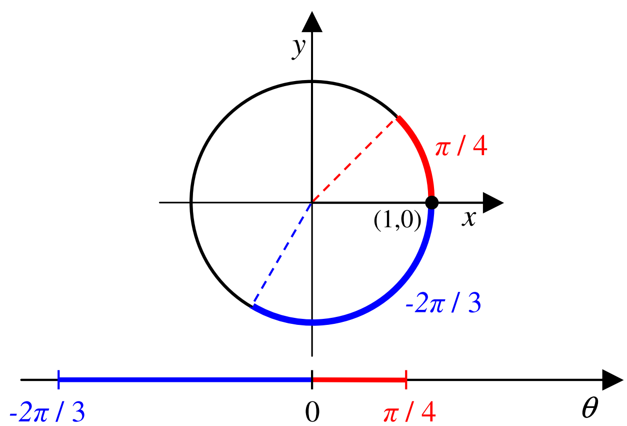
Le radian

Le **radian** est une unité de mesure permettant de mesurer la **longueur d'un arc de cercle trigonométrique**. Le synonyme « **angle** » est régulièrement utilisé pour nommer cette longueur d'arc de cercle. On utilise l'axe $\boldsymbol{\theta}$ pour définir cette longueur. On peut également faire une correspondance entre la longueur de l'arc de cercle et une longueur horizontale.

Définition : θ (arc de cercle d'un cercle trigonométrique)

<u>Conventions :</u>

- La mesure de l'arc de cercle débute toujours à la coordonnée (1,0) du plan *xy*.
- **L'arc** est **positif** si la rotation s'effectue dans le **sens antihoraire**.
- **L'arc** est **négatif** si la rotation s'effectue dans le sens **horaire**.



Coordonnée *xy* associée à un arc de cercle trigonométrique

Puisque l'arc de cercle est situé sur un cercle de « 1 » unité de rayon centré à l'origine d'un système d'axe *xy*, on peut associer une coordonnée (x,y) aux deux extrémités de l'arc de cercle. Par convention, l'arc de cercle débute à la coordonnée (1,0) et se termine à la coordonnée définie par la fonction $P(\theta)$:

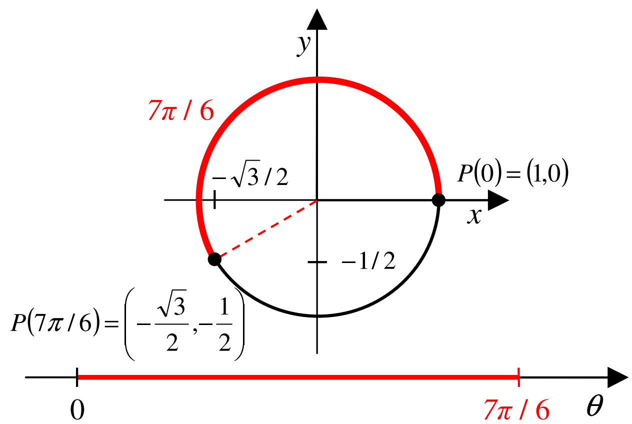
$$P(\theta) = (x, y)$$

où $P(\theta)$: Fonction définissant la coordonnée *xy* de l'extrémité de l'arc de cercle.

θ : Longueur de l'arc de cercle débutant à la coordonnée (1,0).

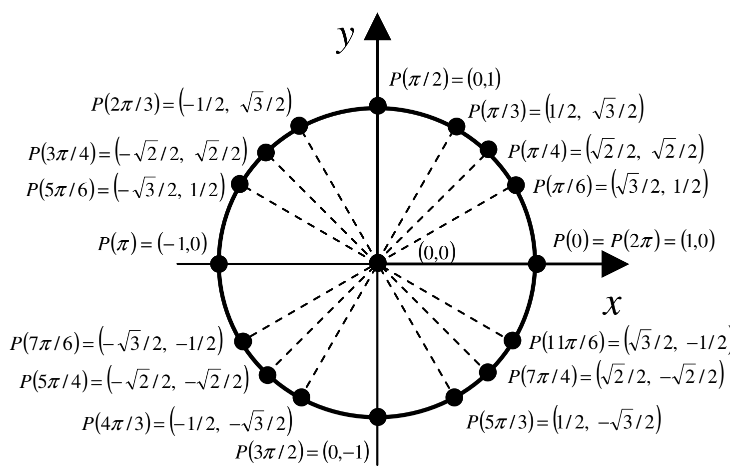
x : Coordonnée en abscisse de l'extrémité de l'arc de cercle.

y : Coordonnée en ordonnée de l'extrémité de l'arc de cercle.



Arc de cercle caractéristique

Puisque toutes les coordonnées (x,y) des points sur un cercle trigonométrique sont comprises dans l'intervalle [-1..1], plusieurs coordonnées ne peuvent être exprimées avec des expressions exactes, car ces coordonnées sont des nombres irrationnels. Par contre, quelques coordonnées peuvent être exprimées de façon exacte :



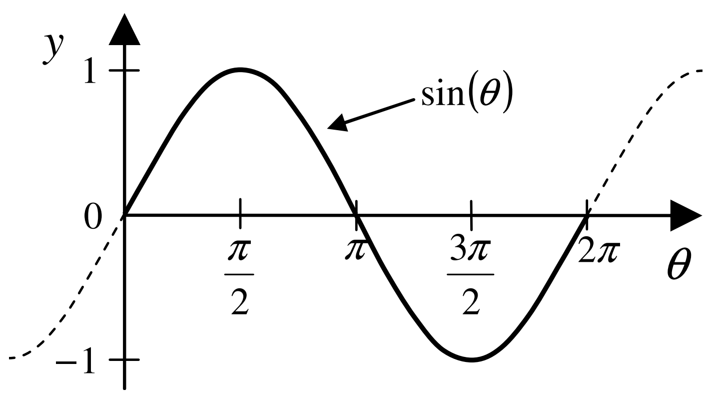
La fonction sinus et cosinus

La fonction **sinus** est une fonction mathématique périodique permettant d'évaluer la **coordonnée *y*** associée à l'extrémité d'un **arc** de **cercle trigonométrique *θ*** :

$$y = \sin(\theta)$$

où y : Coordonnée en ordonnée de l'extrémité de l'arc de cercle.
$\sin(\theta)$: Fonction définissant la coordonnée y de l'extrémité de l'arc de cercle.
θ : Longueur de l'arc de cercle débutant à la coordonnée (1,0).

<u>Voici la forme de la fonction :</u> $\sin(\theta)$

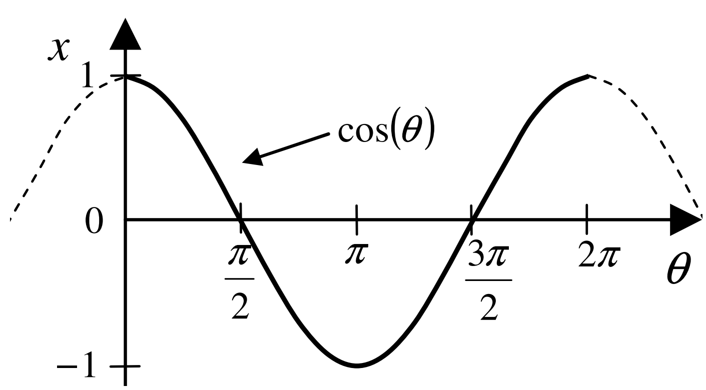


La fonction **cosinus** est une fonction mathématique périodique permettant d'évaluer la **coordonnée *x*** associée à l'extrémité d'un **arc** de **cercle trigonométrique *θ*** :

$$x = \cos(\theta)$$

où x : Coordonnée en abscisse de l'extrémité de l'arc de cercle.
$\cos(\theta)$: Fonction définissant la coordonnée y de l'extrémité de l'arc de cercle.
θ : Longueur de l'arc de cercle débutant à la coordonnée (1,0).

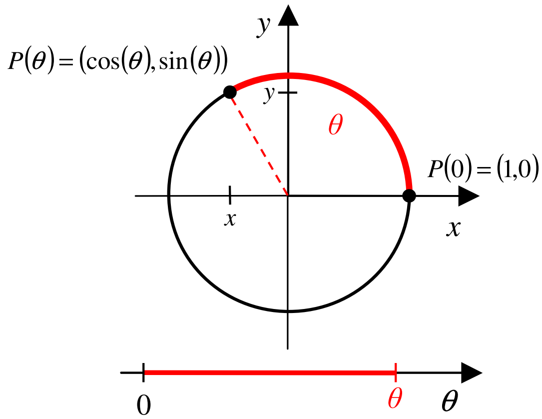
<u>Voici la forme de la fonction :</u> $\cos(\theta)$



Ainsi, la fonction $P(\theta)$ positionnant les points sur le cercle trigonométrique peut être exprimée de la façon suivante :

$$P(\theta)=\left(\cos(\theta),\ \sin(\theta)\right)$$

où $P(\theta)$: Fonction définissant la coordonnée (x,y) de l'extrémité de l'arc de cercle.
θ : Longueur de l'arc de cercle débutant à la coordonnée (1,0).
$\cos(\theta)$: Coordonnée en abscisse de l'extrémité de l'arc de cercle.
$\sin(\theta)$: Coordonnée en ordonnée de l'extrémité de l'arc de cercle.

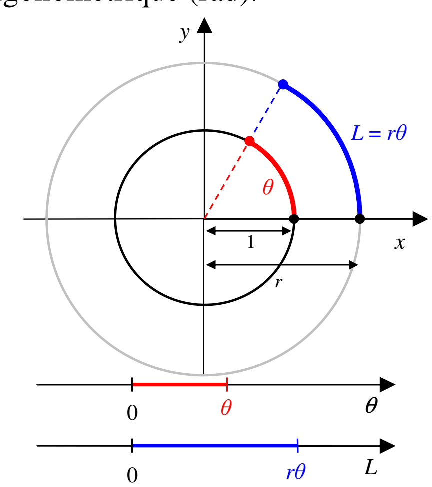


Arc de cercle de rayon quelconque

Soit un cercle de rayon ***r***, il est possible de démontrer que la longueur d'un arc ***L*** sur ce cercle est égale au rayon ***r*** de ce cercle multiplié par un arc d'ouverture ***θ*** associé à un cercle trigonométrique. L'arc ***θ*** doit obligatoirement être mesuré en radian :

$$L=r\theta$$

où L : Longueur de l'arc de cercle de rayon r.
r : Rayon du cercle.
θ : Arc de cercle trigonométrique (rad).



Circonférence d'un cercle

Avec la relation entre le rayon d'un cercle et son angle d'ouverture, nous pouvons mesurer la circonférence ***C*** de n'importe quel cercle en fonction de son rayon ***r*** :

$$C = 2\pi r$$

où C : Circonférence du cercle.

π : Le nombre irrationnel Pi ($\pi = 3{,}141592654...$).

r : Le rayon du cercle.

Coordonnée *xy* associée à un cercle quelconque

En construction …

Le degré

Le degré est une mesure d'arc de cercle basée sur une circonférence de 360 unités. On utilise régulièrement le mot « angle » pour définir la mesure en degré. Le **degré n'est pas** une **mesure réelle** d'un **arc de cercle trigonométrique**, mais cette mesure peut être convertie grâce à la relation suivante[1] :

$$360° \leftrightarrow 2\pi$$

Voici une table de correspondance entre une mesure en degré et une mesure en radian pour le premier quadrant :

Degré	Radian
0°	0
30°	$\pi / 6$
45°	$\pi / 4$
60°	$\pi / 3$
90°	$\pi / 2$

Pour faire des subdivisions de degré, on utilise des fractions de degré (ex : $6{,}3^{\circ}$) ou on utilise la minute et la seconde :

1 degré = 60 secondes : $1° = 60'$ et $1' = 0{,}01\overline{6}6°$

1 seconde = 60 minutes : $1' = 60''$ et $1'' = 0{,}00027\overline{7}°$

[1] Le « grade » est une autre unité de mesure d'arc de cercle basée sur une circonférence de 400 unités (gr).