Chapitre 0.4 – Le polynôme du 4e degré

Les racines d'un polynôme du 4e degré

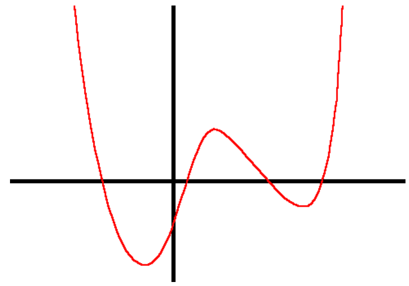
Soit un polynôme du 4e degré

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$$

où $a \neq 0$, b, c, d et e sont des réels, alors les racines x_1, x_2, x_3 et x_4 de cette équation donnant l'expression

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0$$

peuvent être obtenus par l'algorithme suivant :



Équation du quatrième degré/Fonctions polynômes du quatrième degré — Wikiversité (wikiversity.org)

1) Définir les paramètres suivants d'un polynôme du 3e degré $P(Y) = AY^3 + BY^2 + CY + D = 0$ à partir des paramètres a, b, c, d et e du polynôme $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$:

$$A = 1$$

$$B = -\left(3b^2 - 8ac\right)$$

$$C = 3b^4 + 16a^2c^2 + 16a^2bd - 16ab^2c - 64a^3e$$

$$D = -\left(-b^3 + 4abc - 8a^2d\right)^2$$

2) Calculer les trois racines Y_1, Y_2 et Y_3 du polynôme $P(Y)$ à partir de la formule cubique des racines.

3) À partir de la relation $Y_1 = y_1{}^2$, $Y_2 = y_2{}^2$ et $Y_3 = y_3{}^2$, obtenir les six racines de Y_1, Y_2 et Y_3 tel que :

$$y_{1(+)} = \sqrt{y_1{}^2}\ ,\quad y_{1(-)} = -\sqrt{y_1{}^2}$$
$$y_{2(+)} = \sqrt{y_2{}^2}\ ,\quad y_{2(-)} = -\sqrt{y_2{}^2}$$
$$y_{3(+)} = \sqrt{y_3{}^2}\ ,\quad y_{3(-)} = -\sqrt{y_3{}^2}$$

4) À partir des six racines, choisir <u>une combinaison</u> de solutions parmi <u>8 possibilités</u> tel que

$$y_{1(+\text{ou}-)}\,y_{2(+\text{ou}-)}\,y_{3(+\text{ou}-)} = -b^3 + 4abc - 8a^2d\ .$$

5) Évaluer les quatre racines du polynôme $P(x)$ à partir du système d'équation linéaire suivant :

$$x_1 = (y_1 + y_2 + y_3 - b)/4a$$
$$x_2 = (y_1 - y_2 - y_3 - b)/4a$$
$$x_3 = (-y_1 + y_2 - y_3 - b)/4a$$
$$x_4 = (-y_1 - y_2 + y_3 - b)/4a$$

Référence : http://www.curtisbright.com/quartic/quartic-derivation.html

Note de cours rédigée par : Simon Vézina

Preuve :

Soit le polynôme

$$P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \ .$$

Ce polynôme peut être écrit sous la forme

$$a\left(x^4 + \frac{b}{a}x^3 + \frac{c}{a}x^2 + \frac{d}{a}x + \frac{e}{a}\right) = 0$$

et sous une forme en factorisation tel que

$$a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) = 0$$

où x_1 , x_2, x_3 et x_4 sont les racines du polynôme $P(x)$.

En développant notre version factorisée du polynôme et en associant les termes x, x^2, x^3 et x^4 avec leur coefficient respectif, nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{gathered} b = -a(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \\ c = a(x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4) \\ d = -a(x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4) \\ e = a\, x_1x_2x_3x_4 \end{gathered}$$

Pour déterminer les racines x_1 , x_2, x_3 et x_4, introduisons trois nouvelles variables y_1 , y_2 et y_3 dont leurs définitions correspondront aux l'identités suivantes :

$$\begin{gathered} y_1 = a(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) \\ y_2 = a(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \\ y_3 = a(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) \end{gathered}$$

C'est ce choix hautement créatif[1] qui nous permettra de trouver nos racines.

À partir de ces trois nouvelles définitions y_1 , y_2 et y_3, nous pouvons introduire l'équation

$$b = -a(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

obtenue du polynôme $P(x)$ dans ce système à 3 équations pour former un système de 4 équations et 4 inconnus pour ainsi associer ce système d'équation de termes x_1 , x_2, x_3 et x_4 en fonction de y_1 , y_2, y_3 et b.

[1] Cette stratégie est au coeur de la démonstration disponible au lien suivant : http://www.curtisbright.com/quartic/quartic-derivation.html

Après une représentation matricielle $I\,y = aM\,x$ de notre système d'équation, nous pouvons appliquer la réduction de Gauss-Jordan pour exprimer cette équation sous la forme $Ix = \frac{1}{4a}Ny$ ce qui donnera les système d'équations suivants :

(Une preuve de cette affirmation vous sera présentée dans la section suivante de ce document.)

Système d'équation $I\,y = aM\,x$ où y_i est isolé	Système d'équation $Ix = \frac{1}{4a}Ny$ où x_i est isolé
$y_1 = a(x_1 + x_2 - x_3 - x_4)$ $y_2 = a(x_1 - x_2 + x_3 - x_4)$ $y_3 = a(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$ $b = -a(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$	$x_1 = (y_1 + y_2 + y_3 - b)/4a$ $x_2 = (y_1 - y_2 - y_3 - b)/4a$ $x_3 = (-y_1 + y_2 - y_3 - b)/4a$ $x_4 = (-y_1 - y_2 + y_3 - b)/4a$

(Système d'équation reliant x_i à y_j où $i \in \{1,2,3,4\}$ et $j \in \{1,2,3\}$)

En forçant ces définitions entre x_i et y_i, nous obtenons « magiquement » ces trois identités :

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = 3b^2 - 8ac$$
$$y_1^2 y_2^2 + y_1^2 y_3^2 + y_2^2 y_3^2 = 3b^4 + 16a^2c^2 + 16a^2bd - 16ab^2c - 64a^3e$$
$$y_1 y_2 y_3 = -b^3 + 4abc - 8a^2d$$

Il sera <u>difficile de valider ces trois identités</u>, car la tâche requise sera de remplacer les définitions de y_i en fonction de x_i dans le côté gauche de ces définitions et de remplacer par la suite les termes x_i qui eux sont remplaçable en combinaisons complexe pour obtenir des références à a, b, c, d et e.

La beauté de cette <u>initiative inusitée</u> sera de construire un nouveau polynôme du 3[e] degré en utilisant les racine des termes y_1^2, y_2^2 et y_3^2 tel que

$$P(y) = (y - y_1^2)(y - y_2^2)(y - y_3^2) = 0$$

En développant ce polynôme, nous obtiendrons le résultat

$$P(y) = y^3 - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)y^2 + (y_1^2 y_2^2 + y_1^2 y_3^2 + y_2^2 y_3^2)y - (y_1 y_2 y_3)^2$$

qui contient des expressions justement associables aux paramètres a, b, c, d et e ce qui nous donnera le polynôme

$$P(y) = y^3 - (3b^2 - 8ac)y^2 + (3b^4 + 16a^2c^2 + 16a^2bd - 16ab^2c - 64a^3e)y - (-b^3 + 4abc - 8a^2d)^2$$

À partir du polynôme $P(y)$, nous pouvons obtenir les trois racines $y_1^{\,2}$, $y_2^{\,2}$ et $y_3^{\,2}$ à partir de la formule cubique des racines.

Par la suite, nous appliquons la racine carrée à $y_1^{\,2}$, $y_2^{\,2}$ et $y_3^{\,2}$ tel que

$$\begin{gathered} y_{1(+)} = \sqrt{y_1^{\,2}}\ ,\ \ y_{1(-)} = -\sqrt{y_1^{\,2}} \\ y_{2(+)} = \sqrt{y_2^{\,2}}\ ,\ \ y_{2(-)} = -\sqrt{y_2^{\,2}} \\ y_{3(+)} = \sqrt{y_3^{\,2}}\ ,\ \ y_{3(-)} = -\sqrt{y_3^{\,2}} \end{gathered}$$

Nous rencontrons ici est un problème de choix de solution, mais qui doit satisfaire la restriction de l'identité

$$y_1 y_2 y_3 = -b^3 + 4abc - 8a^2 d\,.$$

Puisqu'il y a trois termes y_1 , y_2 et y_3 à choisir parmi deux choix par terme, il y a 8 possibilités admissibles.

Une méthode naïve sera de choisir les trois solutions $y_{1(+)}$, $y_{2(+)}$ et $y_{3(+)}$ et de vérifier l'identité

$$y_{1(+)} y_{2(+)} y_{3(+)} = -b^3 + 4abc - 8a^2 d$$

qui donne un un nombre strictement réel.

Si nous n'obtenons pas l'égalité, nous prenons la combinaison $y_{1(+)}$, $y_{2(+)}$ et $y_{3(-)}$ et ainsi de suite jusqu'à obtenir l'égalité. Un algorithme de choix peut être développé, mais n'est pas disponible dans ces notes de cours. Vous pouvez consulter le lien suivant pour plus d'information :

http://www.curtisbright.com/quartic/principalroots.html

Après avoir choisi adéquatement les solutions y_1 , y_2 et y_3, nous pouvons utiliser les relations suivantes entre x_i et y_i pour calculer les quatre racines x_i du polynôme $P(x)$:

$$\begin{aligned} x_1 &= (y_1 + y_2 + y_3 - b)/4a \\ x_2 &= (y_1 - y_2 - y_3 - b)/4a \\ x_3 &= (-y_1 + y_2 - y_3 - b)/4a \\ x_4 &= (-y_1 - y_2 + y_3 - b)/4a \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi les 4 racines réelles et/ou imaginaires d'un polynôme du 4e degré. ■

La preuve de la relation des systèmes d'équations linéaires entre x_i et y_j

Dans cette section, nous proposons de démonter la relation d'équations des systèmes d'équation reliant x_i à y_j où $i \in \{1,2,3,4\}$ et $j \in \{1,2,3\}$:

$$\begin{matrix} y_1 = a(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) \\ y_2 = a(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \\ y_3 = a(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) \\ b = -a(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \end{matrix} \quad \text{correspond à} \quad \begin{matrix} x_1 = (y_1 + y_2 + y_3 - b)/4a \\ x_2 = (y_1 - y_2 - y_3 - b)/4a \\ x_3 = (-y_1 + y_2 - y_3 - b)/4a \\ x_4 = (-y_1 - y_2 + y_3 - b)/4a \end{matrix}$$

Preuve :

Soit le système d'équation

$$\begin{aligned} y_1 &= a(x_1 + x_2 - x_3 - x_4) \\ y_2 &= a(x_1 - x_2 + x_3 - x_4) \\ y_3 &= a(x_1 - x_2 - x_3 + x_4) \\ b &= -a(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \end{aligned}$$

que l'on peut écrire sous forme matricielle $aM\,x = I\,y$. Développons l'égalité matricielle afin de transformer la matrice M en matrice identité par des opérations de ligne pour former l'équation matricielle $a\,I\,x = Ny$ où N donnera accès aux coefficients de notre relation pour nos x_i :

$$aM\,x = I\,y$$

$$\Rightarrow \quad a\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ b \end{pmatrix} \quad \text{(Développer la relation matricielle } aM\,x = I\,y\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad a\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & | & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Écriture condensée)}$$

$$\Rightarrow \quad a\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & | & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & | & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & | & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Opération de ligne sur la ligne 1)}$$

$$\Rightarrow \quad a\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & | & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & | & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & | & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & | & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{(Diviser la ligne 2 par 2)}$$

$$\Rightarrow \quad a\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(Opération de ligne sur la ligne 2)

$$\Rightarrow \quad a\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(Diviser la ligne 3 par -2)

$$\Rightarrow \quad a\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

(Opération de ligne sur la ligne 3)

$$\Rightarrow \quad a\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \end{array}\right)$$

(Diviser la ligne 4 par -4)

$$\Rightarrow \quad a\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/4 & 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/4 & -1/4 & 1/4 & -1/4 \end{array}\right)$$

(Opération de ligne de la ligne 4)

$$\Rightarrow \quad a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ b \end{pmatrix}$$

(Écriture sous la forme $a\,I\,x = Ny$)

De cette équation, nous pouvons réaliser les produits entre nos matrices et nos vecteurs de paramètres et ainsi obtenir le système d'équation

$$x_1 = (y_1 + y_2 + y_3 - b)/4a$$
$$x_2 = (y_1 - y_2 - y_3 - b)/4a$$
$$x_3 = (-y_1 + y_2 - y_3 - b)/4a$$
$$x_4 = (-y_1 - y_2 + y_3 - b)/4a$$

correspondant à ce que nous voulions démontrer. ■