Chapitre 0.3 – Le polynôme du 3e degré

Les racines d'un polynôme du 3e degré

Soit un polynôme du 3e degré de la forme

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

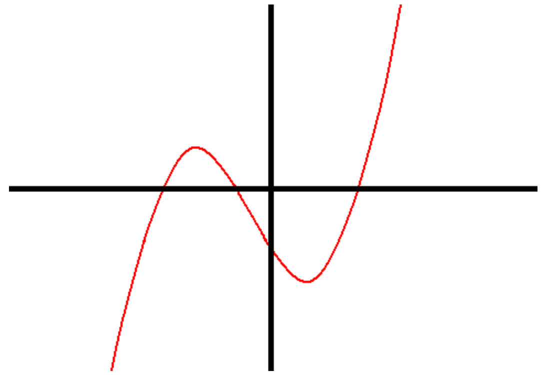
où $a \neq 0$, b, c et d sont des réels, alors les racines x_1, x_2 et x_3 de cette équation donnant l'expression

$$(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 0$$

dépendent du discriminant Δ étant égale à

$$\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

où



Équation du troisième degré/Fonctions polynômes du troisième degré — Wikiversité (wikiversity.org)

$$p = \frac{3ah^2 + 2bh + c}{a} \quad \text{et} \quad q = -\frac{ah^3 + bh^2 + ch + d}{a} \quad \text{avec} \quad h = -\frac{b}{3a} .$$

- Si $\Delta > 0$, les termes supplémentaires

$$T_1 = \left(\frac{q - \sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3} , \quad T_2 = \left(\frac{q + \sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3} , \quad R_1 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right) \text{ et } R_2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$

devront être calculés pour obtenir les racines réelles et imaginaire.

- Si $\Delta \leq 0$, les termes supplémentaires

$$A = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} \quad \text{et} \quad \phi_1 = \arccos\left(\frac{q\sqrt{27}}{2\sqrt{-p^3}}\right)$$

devront être calculés pour obtenir les racines réelles.

	Solutions		
$\Delta > 0$	$x_1 = T_1 + T_2 + h$	$x_2 = R_1 T_1 + R_2 T_2 + h$ (imaginaire)	$x_3 = R_2 T_1 + R_1 T_2 + h$ (imaginaire)
$\Delta = 0$	$x_1 = 2A^{\frac{1}{3}} + h$	$x_{2,3} = -A^{\frac{1}{3}} + h$	
$\Delta < 0$	$x_1 = 2A^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{\phi_1}{3}\right) + h$	$x_2 = 2A^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{\phi_1 + 2\pi}{3}\right) + h$	$x_3 = 2A^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{\phi_1 + 4\pi}{3}\right) + h$

Preuve :

Soit

$$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,,$$

Effectuons le changement de variable

$$x = z + h$$

que l'on remplace dans notre équation $P(x)$ pour obtenir l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
& P(x) = 0 \\
\Rightarrow\quad & P(z+h) = 0 \\
\Rightarrow\quad & P(z+h) = a(z+h)^3 + b(z+h)^2 + c(z+h) + d = 0 \\
\Rightarrow\quad & P(z+h) = a(z+h)\left(z^2 + 2hz + h^2\right) + b\left(z^2 + 2hz + h^2\right) + c(z+h) + d = 0 \\
\Rightarrow\quad & P(z+h) = a\left(z^3 + 2hz^2 + h^2 z + hz^2 + 2h^2 z + h^3\right) + b\left(z^2 + 2hz + h^2\right) + c(z+h) + d = 0 \\
\Rightarrow\quad & P(z+h) = \left(az^3 + 2ahz^2 + ah^2 z + ahz^2 + 2ah^2 z + ah^3\right) + \left(bz^2 + 2bhz + bh^2\right) + (cz + ch) + d = 0 \\
\Rightarrow\quad & P(z+h) = az^3 + (2ah + ah + b)z^2 + \left(ah^2 + 2ah^2 + 2bh + c\right)z + \left(ah^3 + bh^2 + ch + d\right) = 0 \\
\Rightarrow\quad & P(z+h) = az^3 + (3ah + b)z^2 + \left(3ah^2 + 2bh + c\right)z + \left(ah^3 + bh^2 + ch + d\right) = 0
\end{aligned}$$

Posons

$$h = -\frac{b}{3a}$$

ce qui nous donne

$$\begin{aligned}
& P(z+h) = az^3 + (3ah + b)z^2 + \left(3ah^2 + 2bh + c\right)z + \left(ah^3 + bh^2 + ch + d\right) = 0 \\
\Rightarrow\quad & P(z+h) = az^3 + \left(3a\left(-\frac{b}{3a}\right) + b\right)z^2 + \left(3ah^2 + 2bh + c\right)z + \left(ah^3 + bh^2 + ch + d\right) = 0 \\
\Rightarrow\quad & P(z+h) = az^3 + \left(3ah^2 + 2bh + c\right)z + \left(ah^3 + bh^2 + ch + d\right) = 0 \\
\Rightarrow\quad & P(z+h) = z^3 + \frac{\left(3ah^2 + 2bh + c\right)}{a}z + \frac{\left(ah^3 + bh^2 + ch + d\right)}{a} = 0\,.
\end{aligned}$$

Nous allons écrire cette équation sous la forme

$$P(z+h) = z^3 + p\,z - q = 0$$

où

$$p = \frac{3ah^2 + 2bh + c}{a} \quad \text{et} \quad q = -\frac{ah^3 + bh^2 + ch + d}{a}$$

À remarquer que nous faisons apparaître le terme $-q$ avec une définition avec un signe négatif, car il sera intéressant algébriquement de traiter $-q$ plutôt que q dans l'expression de $P(z+h)$.

Nous avons maintenant une équation

$$P(z+h) = z^3 + p\,z - q = 0$$

ce qui nous donne

$$z^3 + p\,z = q \quad .$$

Posons un autre changement de variable

$$z = u + v$$

ce qui nous donnera l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
z^3 + p\,z = q \quad &\Rightarrow \quad (u+v)^3 + p(u+v) = q \\
&\Rightarrow \quad (u+v)(u^2 + 2uv + v^2) + p(u+v) = q \\
&\Rightarrow \quad u^3 + 2u^2v + uv^2 + u^2v + 2uv^2 + v^3 + p(u+v) = q \\
&\Rightarrow \quad u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) = q \\
&\Rightarrow \quad u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) = q \\
&\Rightarrow \quad \boxed{u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) = q}
\end{aligned}$$

En posant

$$uv = -\frac{p}{3}\,,$$

on obtient l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
u^3 + v^3 + (3uv + p)(u+v) = q \quad &\Rightarrow \quad u^3 + v^3 + \left(3\left(-\frac{p}{3}\right) + p\right)(u+v) = q \\
&\Rightarrow \quad \boxed{u^3 + v^3 = q}
\end{aligned}$$

En développant $uv = -\frac{p}{3}$ au cube, nous obtenons

$$u^3v^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = -\frac{p^3}{27} \quad .$$

Si l'on analyse notre système d'équation en terme de u^3 et v^3, nous avons les équations

$$u^3 + v^3 = q \qquad \text{et} \qquad u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \ .$$

Nous pouvons les réécrire sous la forme d'un système somme-produit où l'on fait le changement de variable $Q_1 = u^3$ et $Q_2 = v^3$:

$$\begin{aligned}
S = u^3 + v^3 = q \quad &\Leftrightarrow \quad S = Q_1 + Q_2 = -\frac{B}{A} \\
M = u^3v^3 = -\frac{p^3}{27} \quad &\Leftrightarrow \quad M = Q_1Q_2 = \frac{C}{A}
\end{aligned}$$

Avec ces relations, nous avons

$$q = -\frac{B}{A} \qquad \text{et} \qquad -\frac{p^3}{27} = \frac{C}{A}$$

et une solution admissible simple pour A, B et C serait

$$A = 1 \quad , \quad B = -q \quad \text{et} \quad C = -\frac{p^3}{27} \quad .$$

Si l'on suppose que Q_1 et Q_2 sont les solutions d'un polynôme du 2[ième] degré

$$AQ^2 + BQ + C = 0$$

puisque les racines Q_1 et Q_2 admettent une relation somme-produit, alors on peut affirmer que

$$Q_1 = \frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A} \qquad \text{et} \qquad Q_2 = \frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A} \qquad \text{où} \qquad \Delta = B^2 - 4AC\,.$$

Développons l'expression de Δ :

$$\Delta = B^2 - 4AC \qquad \Rightarrow \qquad \Delta = (-q)^2 - 4(1)\left(-\frac{p^3}{27}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}}$$

À partir des racines Q_1 et Q_2 du polynôme du 2[ième] degré en Q, nous avons l'expression suivante pour u et v :

$$Q_1 = u^3 \qquad \Rightarrow \qquad u = \sqrt[3]{Q_1}$$

$$\Rightarrow \qquad u = \left(\frac{-B - \sqrt{\Delta}}{2A}\right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow \qquad u = \left(\frac{-(-q) - \sqrt{\Delta}}{2(1)}\right)^{1/3} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{u = \left(\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^{1/3}}$$

$$Q_2 = v^3 \qquad \Rightarrow \qquad v = \sqrt[3]{Q_2}$$

$$\Rightarrow \qquad v = \left(\frac{-B + \sqrt{\Delta}}{2A}\right)^{1/3}$$

$$\Rightarrow \qquad v = \left(\frac{-(-q) + \sqrt{\Delta}}{2(1)}\right)^{1/3} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v = \left(\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^{1/3}}$$

Pour retourner au polynôme du 3ième degré en z, nous revenons à notre changement de variable

$$z = u + v$$

et pour obtenir notre 1ière racine x_1 de notre polynôme du 3ième degré en x d'origine, nous revenons à notre changement de variable

$$x = z + h \quad \text{avec} \quad h = -\frac{b}{3a}$$

ce qui donne

$$x_1 = u + v + h$$

où

$$u = \left(\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^{1/3} \quad \text{et} \quad v = \left(\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^{1/3} \quad \text{avec} \quad \Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$$

et

$$p = \frac{3ah^2 + 2bh + c}{a} \quad \text{et} \quad q = -\frac{ah^3 + bh^2 + ch + d}{a}$$

(changement de variable précédent)

ce qui donne l'expression générale

$$x_1 = \left(\frac{q - \sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3} + \left(\frac{q + \sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3} + h$$

(expression de la racine principale d'un polynôme du 3ième degré)

Pour calculer x, nous avons trois scénarios possibles

$$\Delta > 0, \quad \Delta = 0 \quad \text{et} \quad \Delta < 0.$$

Scénario : $\Delta > 0$

Dans ce scénario, il n'y a qu'une seule solution réelle qui se calcul directement.

Une solution réelle
$x_1 = \left(\frac{q - \sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3} + \left(\frac{q + \sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3} + h$

où

$$p = \frac{3ah^2 + 2bh + c}{a}, \quad q = -\frac{ah^3 + bh^2 + ch + d}{a}, \quad \Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} \quad \text{et} \quad h = -\frac{b}{3a}.$$

Pour obtenir les deux autres solutions, il faut être <u>très créatif</u>. Pour ce faire, nous allons débuter par chercher trois solutions distinctes à l'expression

$$x = \sqrt[3]{1} \qquad \Leftrightarrow \qquad x^3 = 1$$

portant le nom de la **racine cubique unitaire**.

Nous pouvons réécrire la dernière expression comme étant un polynôme du 3ième degré qui pourra être factorisé par l'expression $x-1$ puis que $x = \sqrt[3]{1}$ possède $x = 1$ comme 1ière solution simple :

$$x^3 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x^3 - 1 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (x-1)(x^2 + x + 1) = 0$$

Maintenant, utilisons les solutions du polynôme du 2ième degré de l'expression $x^2 + x + 1 = 0$ pour mieux factoriser l'expression précédente :

$$x^2 + x + 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_{1,2} = \frac{-(1) \pm \sqrt{(1)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} \qquad \text{(Solution : } x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\text{)}$$

$$\Rightarrow \qquad x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{-3}}{2} \qquad \text{(Simplification)}$$

$$\Rightarrow \qquad x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{(-1)(3)}}{2} \qquad \text{(Séparer les produits)}$$

$$\Rightarrow \qquad x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2} \qquad \text{(Simplifier la racine d'un produit)}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i} \qquad \text{(Remplacer } i = \sqrt{-1}\text{)}$$

Notre expression devient alors

$$(x-1)\left(x - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right)\left(x - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\right) = 0$$

Ce qui permet de conclure les solutions suivantes :

$$x = \sqrt[3]{1} \qquad \Rightarrow \qquad x = \left\{1,\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i,\ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right\}$$

Pour introduire ce calcul à notre recherche de racine à notre polynôme $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, nous devons reculer dans notre démonstration à l'étape des termes $Q_1 = u^3$ et $Q_2 = v^3$ étant les solutions au polynôme

$$AQ^2 + BQ + C = 0$$

justifiées par les relations

$$u^3 + v^3 = q \qquad \text{et} \qquad u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27}$$

en lien avec nos changements de variable.

Ainsi, nous pouvons maintenant affirmer plusieurs solutions possibles :

$$Q_1 = u^3 \quad \Rightarrow \quad u = \sqrt[3]{Q_1}$$

$$\Rightarrow \quad u = \sqrt[3]{(1)Q_1}$$

$$\Rightarrow \quad u = \sqrt[3]{1}\ \sqrt[3]{Q_1}$$

$$\Rightarrow \quad u = \sqrt[3]{1}\left(\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^{1/3} \qquad \text{(Calcul précédent obtenu : } u = \left(\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^{1/3}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad u = \left\{(1)\left(\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^{1/3}, \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^{1/3}, \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^{1/3}\right\}$$

$$Q_2 = v^3 \quad \Rightarrow \quad \ldots$$

$$\Rightarrow \quad v = \sqrt[3]{1}\left(\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^{1/3} \qquad \text{(Calcul précédent obtenu : } v = \left(\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^{1/3}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad v = \left\{(1)\left(\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^{1/3}, \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^{1/3}, \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^{1/3}\right\}$$

À partir de ces différentes solutions, il faut retenir les combinaisons u et v qui puissent satisfaire

$$uv = -\frac{p}{3} \qquad \text{où} \qquad p = \frac{3ah^2 + 2bh + c}{a} \ \text{ et } \ h = -\frac{b}{3a}$$

qui correspond à une solution purement réelle puisque p est réelle. Pour retirer les composantes imaginaires, nous devons nous restreindre aux combinaisons suivantes :

Solution 1 (déjà analysée)	$u_1 = \left(\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^{1/3}$	$v_1 = \left(\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^{1/3}$
Solution 2	$u_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^{1/3}$	$v_2 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^{1/3}$
Solution 3	$u_3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^{1/3}$	$v_3 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^{1/3}$

Puisque dans la solution 2, le terme en u possède une référence en $+i$ et que le terme en v possède une référence en $-i$ identique entre eux, leur produit ne provoquera pas de terme croisé en i et puisque

$$i^2 = -1,$$

le produit de uv concrétisé $u_2 v_2$ en sera nécessairement réel. On peut déduire le même argument pour la solution 3.

Puisque nous avons démontré que la première solution

$$x_1 = u + v + h$$

permettait d'obtenir

$$x_1 = \left(\frac{q - \sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3} + \left(\frac{q + \sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3} + h \, ,$$

nous pouvons en déduire les solutions x_2 et x_3 sous les formes

Forme des solutions	Détail des solutions imaginaires
$x_2 = u_2 + v_2 + h$	$x_2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(\frac{q - \sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(\frac{q + \sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3} + h$
$x_3 = u_3 + v_3 + h$	$x_3 = \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(\frac{q - \sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(\frac{q + \sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3} + h$

où

$$p = \frac{3ah^2 + 2bh + c}{a} \; , \; q = -\frac{ah^3 + bh^2 + ch + d}{a} \, , \; \Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27} \; \text{ et } \; h = -\frac{b}{3a} \, . \quad \blacksquare \; (1)$$

<u>Scénario :</u> $\Delta < 0$

Dans ce scénario, il y a trois solutions réelles que l'on peut obtenir en transformant notre expression en nombre complexe $i = \sqrt{-1}$. Débutons par faire apparaître ce nombre dans notre expression de x_1 :

$$x_1 = u + v + h$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \left(\frac{q - \sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3} + \left(\frac{q + \sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3} + h \qquad \left(u = \left(\frac{q}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^{1/3} \text{ et } v = \left(\frac{q}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta}\right)^{1/3} \right)$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \left(\frac{q - \sqrt{(-1)(-1)\Delta}}{2}\right)^{1/3} + \left(\frac{q + \sqrt{(-1)(-1)\Delta}}{2}\right)^{1/3} + h \qquad \text{(Multiplier par 1)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_1 = \left(\frac{q - i\sqrt{(-\Delta)}}{2}\right)^{1/3} + \left(\frac{q + i\sqrt{(-\Delta)}}{2}\right)^{1/3} + h} \qquad (i = \sqrt{-1})$$

Puisque $\Delta < 0$, alors le terme $\sqrt{(-\Delta)}$ devient calculable. Nous pouvons réécrire les expressions de *u* et *v* sous la forme

$$u = \left(\frac{q - i\sqrt{(-\Delta)}}{2}\right)^{1/3} \quad \text{et} \quad v = \left(\frac{q + i\sqrt{(-\Delta)}}{2}\right)^{1/3}$$

que l'on peut mettre au cube ce qui nous donne

$$u^3 = \frac{q - i\sqrt{(-\Delta)}}{2} \qquad \text{et} \qquad v^3 = \frac{q + i\sqrt{(-\Delta)}}{2} \quad .$$

Définissons

$$a = \frac{q}{2} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{\sqrt{(-\Delta)}}{2}$$

ce qui nous permet d'obtenir les expressions

$$u^3 = a - ib \qquad \text{et} \qquad v^3 = a + ib$$

sous une notation en nombre complexe.

<u>REMARQUE :</u>

- a et b n'ont pas la même définition que dans l'expression $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.
- a correspond à la partie réelle du nombre complexe.
- b correspond à la partie imaginaire du nombre complexe.
- Le terme $a - ib$ et $a + ib$ sont conjugué complexe et leur produit donne un nombre réel.

Puisque $u^3 = a - ib$ et $v^3 = a + ib$ sont des nombres complexes identiques, mais de partie imaginaire de signe contraire (conjugué complexe), leur produit donne un nombre entier :

$$u^3v^3 = (a - ib)(a + ib) \qquad \Rightarrow \qquad u^3v^3 = a^2 + abi - abi - b^2i^2$$

$$\Rightarrow \qquad u^3v^3 = a^2 - b^2(-1)$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{u^3v^3 = a^2 + b^2}$$

En interprétant A comme étant la racine du produit des nombres u^3 et v^3, nous avons

$$A = \sqrt{u^3v^3} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

ce qui correspond à la norme des nombre u^3 et v^3 (comme si l'on considérait a et b comme des composantes d'un vecteur dans un plan xy et u^3 ainsi que v^3 sont deux vecteurs de même norme), nous pouvons réécrire ces mêmes nombre à l'aide de la formule d'Euler[1]

$$a \pm ib = A(\cos(\theta) \pm i\sin(\theta)) = Ae^{\pm i\theta}$$

Ce qui nous donne les expressions suivantes :

- $u^3 = a - bi \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{u^3 = A(\cos(\phi) - i\sin(\phi)) = Ae^{-i\theta}}$
- $v^3 = a + bi \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v^3 = A(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) = Ae^{i\theta}}$

---

[1] Référence : https://fr.wikipedia.org/wiki/Formule_d%27Euler

On peut simplifier l'expression de A par le calcul suivant :

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \Rightarrow \quad A = \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{(-\Delta)}}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \quad A = \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{(-\Delta)}{4}}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A = \frac{1}{2}\sqrt{q^2 - \Delta}}$$

En remplaçant Δ, nous obtenons :

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{q^2 - \Delta} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{1}{2}\sqrt{q^2 - \left(q^2 + \frac{4p^3}{27}\right)} \qquad (\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{A = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}}$$

Avec cette information, nous pouvons effectuer un calcul avec l'expression $u^3 = a - bi$ pour évaluer les multiples solutions à la variable ϕ :

$$u^3 = a - bi \quad \Rightarrow \quad A(\cos(\phi) - i\sin(\phi)) = a - ib \qquad (u^3 = A(\cos(\phi) - i\sin(\phi)))$$

$$\Rightarrow \quad A\cos(\phi) = a \qquad \text{(Association partie réelle)}$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{-\frac{p^3}{27}}\cos(\phi) = \frac{q}{2} \qquad \text{(Remplacer } A = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}\text{, } a = \frac{q}{2}\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \cos(\phi) = \frac{q}{2\left(\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\right)} \qquad \text{(Isoler } \cos(\phi)\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \cos(\phi) = \frac{q\sqrt{27}}{2\sqrt{-p^3}} \qquad (\frac{A/B}{C/D} = \frac{AD}{BC})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\phi_1 = \arccos\left(\frac{q\sqrt{27}}{2\sqrt{-p^3}}\right)} \qquad \text{(Solution principale)}$$

Cependant, la fonction arc cosinus admet toujours plusieurs solutions. Les solutions que nous devrons traiter dans l'obtention des racines de notre polynôme sont

$$\phi = \{\phi_1,\ \phi_1 + 2\pi,\ \phi_1 + 4\pi,\ \ldots\}$$

Puisque $x = u + v + h$, nous devons transformer nos expression de $u^3 = Ae^{i\phi}$ et $v^3 = Ae^{-i\phi}$ en expression de u et v ce qui peut s'obtenir par la racine cubique :

$$u^3 = Ae^{i\phi} \quad \Rightarrow \quad \sqrt[3]{u^3} = \sqrt[3]{Ae^{i\phi}}$$

$$\Rightarrow \quad u = \sqrt[3]{A}\sqrt[3]{e^{i\phi}} \qquad (\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{u = A^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\phi}{3}}}$$

$$v^3 = Ae^{-i\phi} \quad \Rightarrow \quad \ldots \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = A^{\frac{1}{3}} e^{-i\frac{\phi}{3}}}$$

Utilisons maintenant la formule d'Euler

$$Ae^{\pm i\theta} = A(\cos(\theta) \pm i\sin(\theta))$$

pour réécrire[2] nos terme u et v car ils seront plus facile à simplifier dans l'expression $x = u + v + h$ par la suite. Ainsi, nous obtenons

- $u = A^{\frac{1}{3}} e^{-i\frac{\phi}{3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{u = A^{\frac{1}{3}}\left(\cos\left(\frac{\phi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\phi}{3}\right)\right)}$

- $v = A^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{\phi}{3}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = A^{\frac{1}{3}}\left(\cos\left(\frac{\phi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\phi}{3}\right)\right)}$

Effectuons maintenant le calcul $x = u + v + h$:

$$x = u + v + h \quad \Rightarrow \quad x = \left(A^{\frac{1}{3}}\left(\cos\left(\frac{\phi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\phi}{3}\right)\right)\right) + \left(A^{\frac{1}{3}}\left(\cos\left(\frac{\phi}{3}\right) - i\sin\left(\frac{\phi}{3}\right)\right)\right) + h$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x = 2A^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\phi}{3}\right) + h}$$

Avec les solutions de ϕ trouvées précédemment, nous obtenons les trois solutions réelles suivantes :

Solution réelle 1	Solution réelle 2	Solution réelle 3
$x_1 = 2A^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\phi_1}{3}\right) + h$	$x_2 = 2A^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\phi_1 + 2\pi}{3}\right) + h$	$x_3 = 2A^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\phi_1 + 4\pi}{3}\right) + h$

où

$$A = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}, \quad \phi_1 = \arccos\left(\frac{q\sqrt{27}}{2\sqrt{-p^3}}\right), \quad p = \frac{3ah^2 + 2bh + c}{a}, \quad q = -\frac{ah^3 + bh^2 + ch + d}{a} \quad \text{et} \quad h = -\frac{b}{3a}. \quad \blacksquare \text{ (2)}$$

---

[2] La formule de Moivre $(A(\cos(\theta) \pm i\sin(\theta)))^n = A^n(\cos(n\theta) \pm i\sin(n\theta))$ permet d'effectuer l'opération précédente en moins d'étape.

Scénario : $\Delta = 0$

Dans ce scénario, il y a trois solutions réelles dont deux identiques. On peut calculer une première solution simplement en remplaçant $\Delta = 0$ dans l'expression générale de $x_1 = u + v + h$:

$$x_1 = \left(\frac{q - \sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3} + \left(\frac{q + \sqrt{\Delta}}{2}\right)^{1/3} + h \Rightarrow \quad x_1 = \left(\frac{q}{2}\right)^{1/3} + \left(\frac{q}{2}\right)^{1/3} + h$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 2\left(\frac{q}{2}\right)^{1/3} + h}$$

Cependant, cette stratégie n'est pas idéale si l'on désire obtenir l'autre solution. Exploitons les solutions du cas $\Delta < 0$ et obtenons l'expression de ϕ_1 sous une condition où $\Delta = 0$. Commençons par évaluer q en fonction de p :

$$\Delta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad q^2 + \frac{4p^3}{27} = 0 \qquad \text{(Remplacer } \Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}\text{)}$$

$$\Rightarrow \qquad q^2 = -\frac{4p^3}{27}$$

$$\Rightarrow \qquad q = \sqrt{-\frac{4p^3}{27}}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{q = 2\sqrt{\frac{-p^3}{27}}}$$

Si l'on remplacer l'expression de q dans la solution de ϕ_1, car il est raisonnable qu'il y ait continuité dans les ensembles solutions, nous avons :

$$\phi_1 = \arccos\left(\frac{q\sqrt{27}}{2\sqrt{-p^3}}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \phi_1 = \arccos\left(\frac{\sqrt{27}}{2\sqrt{-p^3}}\left(2\sqrt{\frac{-p^3}{27}}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \phi_1 = \arccos(1)$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\phi_1 = 0}$$

Ainsi, nous obtenons les solutions suivantes à partir de nos équations du cas $\Delta < 0$:

- $x_1 = 2A^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{\phi_1}{3}\right) + h \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = 2A^{\frac{1}{3}}\cos\left(\frac{0}{3}\right) + h$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{x_1 = 2A^{\frac{1}{3}} + h}$$

- $x_2 = 2A^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{\phi_1 + 2\pi}{3}\right) + h \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2A^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + h$

$$\Rightarrow \quad x_2 = -A^{\frac{1}{3}} + h \qquad \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\right)$$

- $x_3 = 2A^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{\phi_1 + 4\pi}{3}\right) + h \quad \Rightarrow \quad x_3 = 2A^{\frac{1}{3}} \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + h$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_3 = -A^{\frac{1}{3}} + h} \qquad \left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\right)$$

Nous obtenons les solutions suivantes :

Solution réelle unique	Solution réelle double
$x_1 = 2A^{\frac{1}{3}} + h$	$x_{2,3} = -A^{\frac{1}{3}} + h$

où

$$A = \sqrt{-\frac{p^3}{27}} \;, \;, \quad p = \frac{3ah^2 + 2bh + c}{a} \;, \quad \text{et} \quad h = -\frac{b}{3a} \;. \qquad \blacksquare \; (3)$$

<u>Remarque :</u>

On constant ici que l'expression de la première solution simple

$$x_1 = 2\left(\frac{q}{2}\right)^{1/3} + h$$

n'est pas identique à la première solution par angle ϕ_1

$$x_1 = 2A^{\frac{1}{3}} + h \,.$$

Cependant, on peut démontrer qu'elles sont équivalentes puisque $\Delta = 0$ et $\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}$. Débutons par la réécriture de la solution avec l'angle ϕ_1 :

$$x_1 = 2A^{\frac{1}{3}} + h \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2\left(\sqrt{-\frac{p^3}{27}}\right)^{\frac{1}{3}} + h \qquad \left(A = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = 2\left(-\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{6}} + h \qquad \left(\left(x^A\right)^B = x^{AB}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_1 = 2\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) + h}$$

Réécrivons l'expression $\left(\frac{q}{2}\right)^{1/3}$ afin de la faire correspondre à $\sqrt{-\frac{p}{3}}$ ce qui permettrait d'affirmer que

$$x_1 = 2\left(\frac{q}{2}\right)^{1/3} + h \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 2\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) + h \ .$$

Alors :

$$\Delta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 0 = q^2 + \frac{4p^3}{27} \qquad\qquad \left(\Delta = q^2 + \frac{4p^3}{27}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{q^2}{4} = -\frac{p^3}{27}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{q}{2} = \sqrt{-\frac{p^3}{27}}$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(-\frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{6}}$$

$$\Rightarrow \qquad \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \blacksquare$$