Chapitre 0.2 – Le polynôme du 2$^{\text{ième}}$ degré

Les racines d'un polynôme du 2$^{\text{ième}}$ degré

Soit un polynôme du 2$^{\text{ième}}$ degré de la forme

$$ax^2 + bx + c = 0$$

où $a \neq 0$, b et c sont des réels, alors les racines x_1 et x_2 de cette équation donnant l'expression

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

dépendent du discriminant Δ étant égale à

$$\Delta = b^2 - 4ac\ .$$

Condition du discriminant Δ	1$^{\text{ière}}$ solution	2$^{\text{ième}}$ solution
$\Delta > 0$	$x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
$\Delta = 0$	$x_{1,2} = \dfrac{-b}{2a}$	
$\Delta < 0$ avec $i = \sqrt{-1}$ (solution imaginaire)	$x_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$	$x_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{\lvert\Delta\rvert}}{2a}$

<u>Preuve :</u>

$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad ax^2 + bx = -c$ (Soustraire c de chaque côté)

$\Rightarrow \quad 4a^2x^2 + 4abx = -4ac$ (Multiplier par $4a$)

$\Rightarrow \quad 4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$ (Additionner b^2 de chaque côté)

$\Rightarrow \quad (2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$ (Formation du carré)

$\Rightarrow \quad 2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$ (Effectuer la racine des deux côtés)

$\Rightarrow \quad 2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$ (Soustraire b de chaque côté)

$\Rightarrow \quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (Diviser par $2a$)

$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \blacksquare$ (Remplacer $\Delta = b^2 - 4ac$)

Si $\Delta < 0$, nous devons introduire le nombre imaginaire $i = \sqrt{-1}$ ce qui nous donne la solution suivante :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{(-1)|\Delta|}}{2a} \qquad \text{(Sortir le signe de } \Delta\text{)}$$

$$\Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{|\Delta|}}{2a} \quad \blacksquare \qquad (\sqrt{AB} = \sqrt{A}\sqrt{B} \text{ et } i = \sqrt{-1})$$

La somme et le produit de deux racines d'un polynôme

Soit le polynôme du 2[ième] degré

$$ax^2 + bx + c = 0$$

qui admet les racines

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{où} \quad \Delta = b^2 - 4ac\,,$$

alors nous avons le relation somme-produit suivante existant entre les racines x_1 et x_2 :

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad \text{et} \qquad M = x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

<u>Preuve :</u>

$$S = x_1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad S = \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) + \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad S = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$\Rightarrow \quad S = -\frac{b}{a} \quad \blacksquare$$

$$M = x_1 x_2 \quad \Rightarrow \quad M = \left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{1}{4a^2}\left(-b - \sqrt{\Delta}\right)\left(-b + \sqrt{\Delta}\right)$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{1}{4a^2}\left(b^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2\right)$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{1}{4a^2}\left(b^2 - (\Delta)\right)$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{1}{4a^2}\left(b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)\right)$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{1}{4a^2}(4ac)$$

$$\Rightarrow \quad M = \frac{c}{a} \quad \blacksquare$$

<u>Remarque :</u>

Il est à noter que même si l'expression $\Delta < 0$, la relation tient toujours.