

Chapitre 0.1 – Les polynômes

Un polynôme

Un polynôme est une expression mathématique pouvant s'écrire sous la forme

$$\sum_{i=0}^N a_i x^i = 0 .$$

Les polynômes les plus connus et utilisé pour représenter des concepts mathématique et physique sont les suivants :

- Polynôme du 1^{ier} degré (linéaire) : $ax + b = 0$
- Polynôme du 2^{ième} degré (quadratique) : $ax^2 + bx + c = 0$
- Polynôme du 3^{ième} degré (cubique) : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$
- Polynôme du 4^{ième} degré (quartique) : $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

Les racines d'un polynôme

Une racine d'un polynôme est une solution x qui valide l'équation. Le nombre de solution admissible correspond au degré du polynôme. Cependant, ces solutions ne sont pas nécessairement uniques et réelles. Avec ces solutions, un polynôme peut toujours être réécrit sous la forme

$$\sum_{i=0}^N a_i x^i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \prod_{i=1}^N (x - s_i) = 0$$

où s_i est la i ^{ième} racine du polynôme de degré N .

Exemple :

- $3x - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - \frac{2}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad s_i \in \left\{ \frac{2}{3} \right\}$
- $x^2 - 5x - 14 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 7)(x + 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad s_i \in \{-2, 7\}$
- $x^2 - 10x + 25 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x - 5)(x - 5) = 0 \quad \Rightarrow \quad s_i \in \{5, 5\}$
- $x^2 - 25 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 5)(x - 5) = 0 \quad \Rightarrow \quad s_i \in \{-5, 5\}$

Obtenir les racines d'un polynôme

Pour les obtenir, il existe plusieurs techniques différentes. Cependant, il existe des techniques analytiques¹ pour solutionner tous les polynômes du 1^{ier} au 4^{ième} degré. Certains polynômes du 5^{ième} degré et plus peuvent être solutionnés avec des techniques algébriques ou doivent avoir recours à des techniques numériques approximatives.

Les racines d'un polynôme du 1^{ième} degré

Soit le polynôme du 1^{ier} degré de la forme

$$ax + b = 0$$

où $a \neq 0$ et b est réel, alors la racine x_1 est égale à l'expression suivante :

Solution unique
$x_1 = -\frac{b}{a}$

Preuve :

$$\begin{aligned} ax + b = 0 & \Rightarrow ax = -b && \text{(Isoler } ax \text{)} \\ & \Rightarrow x = -\frac{b}{a} && \blacksquare \text{ (Diviser par } a, \text{ car } a \neq 0 \text{)} \end{aligned}$$

¹ Les équations permettant de solutionner des polynômes du 2^{ième} au 4^{ième} degré sont présentées dans les chapitres 0.2 à 0.4.

