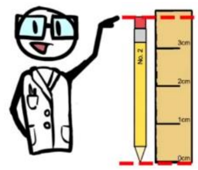
Annexe - Les incertitudes



L'incertitude absolue

Par définition, une <u>mesure ne peut être une valeur unique exacte</u>, mais doit être comprise dans un intervalle de valeurs déterminé par un contexte (expérimental ou théorique). Toute mesure est donc entachée de ce qu'on appelle une incertitude. Au contraire, les constantes mathématiques (π, e) ne possèdent pas d'incertitude, mais son souvent irrationnel (la précision « ultime » nécessite une infinité de chiffre).

Pour être rigoureux, on doit donc tenir compte de cette <u>incertitude</u> lors d'une prise de <u>mesures</u> ou dans la définition d'une <u>constante physique</u>.

L'incertitude dite **absolue** δx nous permet de connaître la plage de valeurs admissibles d'une quantité x où une mesure $\tilde{x}$ a été réalisée pour définir cette quantité.

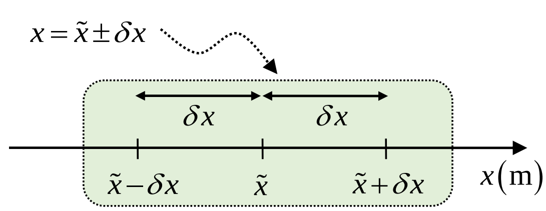
Nous donnerons la définition suivante au paramètres x à partir d'une mesure $\tilde{x}$ et de son incertitude absolue δx :

$$x = \tilde{x} \pm \delta x$$

Lorsqu'on écrit $x = \tilde{x} \pm \delta x$, cela signifie que la valeur x est comprise entre la valeur minimale $\tilde{x} - \delta x$ et la valeur maximale $\tilde{x} + \delta x$. Ainsi, la valeur de x est comprise dans l'intervalle

$$x \in [\tilde{x} - \delta x \quad , \quad \tilde{x} + \delta x]$$

que l'on peut représenter graphiquement sous la forme suivante :



Par exemple, la position $x = (7 \pm 2)\,\mathrm{m}$ signifie que la position est comprise entre 5 m et 9 m.

En général, l'incertitude absolue possède <u>un seul chiffre significatif</u>. On remarque toutefois que les auteurs ont tendance à en garder deux chiffres significatifs si le premier chiffre est un 1 ou un 2. L'incertitude et la valeur mesurée doivent posséder le même nombre de décimales (ex : on écrit 7 ± 2, mais on n'écrit pas 7 ± 2,1).

La détermination d'une incertitude à une mesure

L'incertitude d'une mesure dépend de plusieurs facteurs comme le choix de l'instrument de mesure, du contexte de son usage, de l'environnement où cette mesure est réalisée, etc. Pour déterminer cette incertitude, il existe plusieurs méthodes et techniques. L'objectif de cette présentation sera de vous présenter deux méthodes relativement simple d'usage.

Pour juger la qualité d'une incertitude, il est raisonnable d'utiliser le critère suivant :

Une incertitude δx sera jugée adéquate si 95% d'un même mesure $\tilde{x}_i$ se retrouve dans l'intervalle

$$\tilde{x}_i \in [\bar{x} - \delta x \quad , \quad \bar{x} + \delta x] \quad \text{où} \qquad \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_i$$

- S'il y a <u>plus de 5%</u> des mesures $\tilde{x}_i$ qui ne sont pas dans l'intervalle, alors l'incertitude δx sera considéré comme étant trop petite.
- S'il y a <u>moins de 1%</u> des mesures $\tilde{x}_i$ qui ne sont pas dans l'intervalle, alors l'incertitude δx pourrait être considéré comme étant trop grande.

Méthode 1 : La différence entre deux mesures pessimistes

Cette méthode consiste à <u>prendre qu'une seule mesure</u> $\tilde{x}$ et d'estimer qu'elle serait la plus petite valeur admissible (mesure pessimiste minimale) $\tilde{x}_{\min}$ et la plus grande valeur admissible (mesure pessimiste maximale) $\tilde{x}_{\max}$. Avec ces deux valeurs, on détermine la mesure $\tilde{x}$ et son incertitude δx comme étant

$$x = \tilde{x} \pm \delta x \quad \text{où} \qquad \tilde{x} = \frac{\tilde{x}_{\max} + \tilde{x}_{\min}}{2} \qquad \text{et} \qquad \delta x = \tilde{x}_{\max} - \tilde{x}_{\min}$$

Situation 1 : *La pointe du crayon*. À partir de l'image ci-dessous, déterminez la position de la pointe du crayon.

À partir de l'image, nous constatons visuellement que la pointe du crayon est pratiquement à mi-chemin entre la graduation 9 cm et 10 cm, mais que cela n'est pas nécessairement le cas. Ainsi, on peut affirmer de façon pessimiste que :

- La position minimale $\tilde{x}_{\min}$ du crayon est $\tilde{x}_{\min} = 9{,}3\,\text{cm}$. (valeur pessimiste minimale raisonnable)
- La position maximale $\tilde{x}_{\max}$ du crayon est $\tilde{x}_{\max} = 9{,}7\,\text{cm}$. (valeur pessimiste maximale raisonnable)

Évaluons la valeur de cette mesure ainsi que son incertitude :

- $\tilde{x} = \dfrac{\tilde{x}_{\max} + \tilde{x}_{\min}}{2} \quad \Rightarrow \quad \tilde{x} = \dfrac{(9{,}7\,\text{cm}) + (9{,}3\,\text{cm})}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\tilde{x} = 9{,}5\ \text{cm}}$
- $\delta x = \tilde{x}_{\max} - \tilde{x}_{\min} \quad \Rightarrow \quad \delta x = (9{,}7\,\text{cm}) - (9{,}3\,\text{cm}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\delta x = 0{,}4\,\text{cm}}$

La position de la pointe du crayon sera $x = \tilde{x} \pm \delta x = (9{,}5 \pm 0{,}4)\,\text{cm}$.

On remarque ici que δx n'est pas égal la moitié de la plus petite division !

Méthode 2 : L'écart maximal à la moyenne

Cette méthode consiste à prendre plusieurs fois la même mesure $\tilde{x}_i$ pour définir une valeur moyenne $\bar{x}$ de la mesure x et de définir l'incertitude δx comme étant le plus grand écart entre toutes les valeurs $\tilde{x}_i$ disponibles et la valeur moyenne $\bar{x}$.

Mathématiquement, on détermine la mesure $\tilde{x}$ et son incertitude δx comme étant

$$x = \tilde{x} \pm \delta x \quad \text{où} \quad \tilde{x} = \bar{x}, \quad \bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_i \quad \text{et} \quad \delta x = \max_{i \in N}\left\{\left|\tilde{x}_i - \bar{x}\right|\right\}$$

Situation 2 : ***La canette de 473 mL.*** Dans une usine de boisson gazeuse, nous mesurons la quantité de liquide qui se retrouve dans 6 canettes de 473 mL sortie d'une même ligne de montage. Déterminez le volume dans les canettes sachant que nous avons mesurez les valeurs suivantes :

$$\tilde{x}_1 = 473{,}8\,\text{mL}, \ \tilde{x}_2 = 473{,}9\,\text{mL}, \ \tilde{x}_3 = 472{,}9\,\text{mL}, \ \tilde{x}_4 = 473{,}5\,\text{mL}, \ \tilde{x}_5 = 472{,}7\,\text{mL} \ \text{et} \ \tilde{x}_6 = 472{,}5\,\text{mL}$$

Débutons par évaluer la valeur moyenne de nos mesures :

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \tilde{x}_i \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} (473{,}8\,\text{mL}) + (473{,}9\,\text{mL}) + (472{,}9\,\text{mL}) + \\ (473{,}5\,\text{mL}) + (472{,}7\,\text{mL}) + (472{,}5\,\text{mL}) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\bar{x} = 473{,}2166\ \text{mL}}$$

En analysant l'ensemble des mesures, nous constatons que c'est la mesure $\tilde{x}_6 = 472{,}5\,\text{mL}$ qui est la plus écartée de la moyenne $\bar{x} = 473{,}2166\ \text{mL}$. Ainsi, réalisons le calcul de l'écart avec $\tilde{x}_6$:

$$\delta x = \max\left\{\left|\tilde{x}_i - \bar{x}\right|\right\} \quad \Rightarrow \quad \delta x = \left|\tilde{x}_6 - \bar{x}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \delta x = \left|(472{,}5\,\text{mL}) - (473{,}2166\,\text{mL})\right|$$

$$\Rightarrow \quad \delta x = \left|-0{,}7166\,\text{mL}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta x = 0{,}7166\,\text{mL}}$$

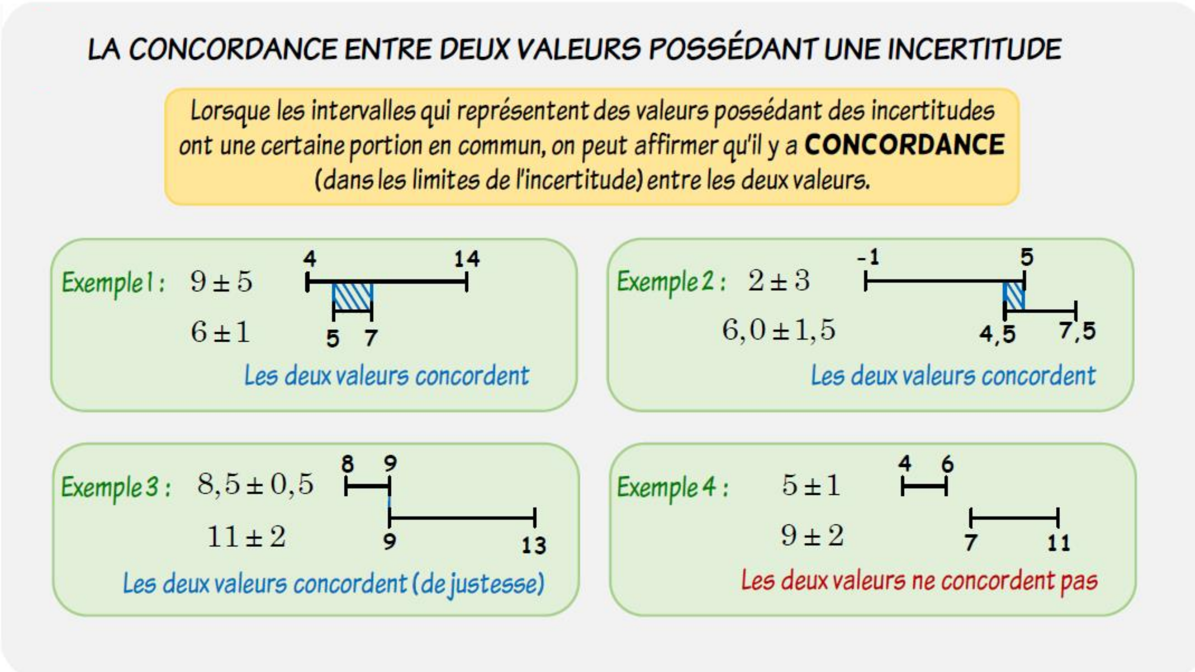
Nous pouvons affirmer que cette ligne de montage produit des canettes de 473 mL dont le volume est

$$x = \tilde{x} \pm \delta x = (473{,}2 \pm 0{,}7)\,\text{mL}$$

(avec gestion des chiffres significatifs)

Le critère de concordance

L'incertitude absolue nous permet de comparer rigoureusement différentes valeurs d'une même quantité. Voici quelques diagrammes de concordance pour vous permettre de voir différentes possibilités.



(Schéma de concordance)

La concordance entre deux paramètres $x = \tilde{x} \pm \delta x$ et $y = \tilde{y} \pm \delta y$ peut également être vérifiée grâce à **l'inégalité de la concordance**

$$\delta x + \delta y \geq |\tilde{x} - \tilde{y}|$$

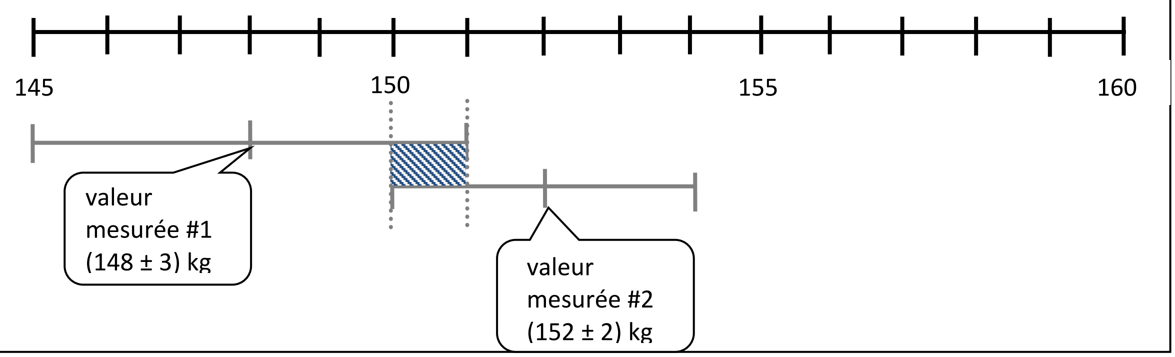
où δx et δy sont les incertitudes absolues des paramètres x et y, $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ sont les valeurs des paramètres x et y et l'opérateur $|\quad|$ correspond à la valeur absolue.

Tel que montré dans l'encadré ci-dessus, on peut affirmer que deux paramètres concordent entre eux s'il y a une intersection entre les deux intervalles de valeurs admissibles (zone hachurée sur le schéma). Dans le contexte où l'on désire comparer une valeur théorique avec une valeur expérimentale, on peut affirmer qu'une valeur théorique concorde avec une valeur expérimentale si la valeur théorique est comprise dans l'intervalle de valeurs expérimentales.

Situation 3 : ***La masse d'une personne avec deux balances.*** À l'aide d'une balance #1, on mesure la masse d'une personne $m_1 = (148 \pm 3)\,\mathrm{kg}$. On mesure la masse de cette personne avec une autre balance #2 et on obtient $m_2 = (152 \pm 2)\,\mathrm{kg}$. Démontrez (a) à l'aide d'un schéma de concordance et (b) à l'aide de l'inégalité de la concordance s'il y a concordance entre la mesure effectuée avec la balance #1 et la balance #2.

(a) Dans cette situation, on peut conclure que, compte tenu des incertitudes, les deux valeurs de masse concordent.

Voici le diagramme de concordance associé à la situation :



(b) De plus l'inégalité de la concordance confirme cette concordance :

$$\delta x + \delta y \geq |\tilde{x} - \tilde{y}| \quad \Rightarrow \quad \delta m_1 + \delta m_2 \geq |\tilde{m}_1 - \tilde{m}_2|$$

$$\Rightarrow \quad (3\,\mathrm{kg}) + (2\,\mathrm{kg}) \geq |(148\,\mathrm{kg}) - (152\,\mathrm{kg})|$$

$$\Rightarrow \quad 5\,\mathrm{kg} \geq |\ -4\,\mathrm{kg}\ |$$

$$\Rightarrow \quad 5\,\mathrm{kg} \geq 4\,\mathrm{kg} \qquad \text{(inégalité vérifiée)}$$

L'incertitude relative

L'incertitude relative correspond, quant à elle, au rapport de l'incertitude absolue sur la mesure : $\delta x / x$. On la donne généralement en pourcentage (%). Elle permet de comparer la précision de mesures de différentes grandeurs ou de différentes natures. On lui attribue généralement un ou deux chiffres significatifs selon le contexte.

Situation 4 : *La masse d'un bébé et d'un adulte.* La masse d'un bébé est $m_\mathrm{B} = (20,2 \pm 1,6)\,\mathrm{lb}$ et la masse d'un adulte est $m_\mathrm{A} = (212 \pm 9)\,\mathrm{lb}$. On désire calculer l'incertitudes relatives de la masse du bébé et de l'adulte pour déterminer quelle mesure est plus précise relativement (Information : $1\ \mathrm{lb} = 0{,}4536\,\mathrm{kg}$).

L'incertitude relative du bébé sera $\delta m_\mathrm{B} / m_\mathrm{B} = \dfrac{(1,6\ \mathrm{lb})}{(20,2\ \mathrm{lb})} \times 100\,\% = 7,9\,\%$.

L'incertitude relative de l'adulte sera $\delta m_\mathrm{A} / m_\mathrm{A} = \dfrac{(9\ \mathrm{lb})}{(212\ \mathrm{lb})} \times 100\,\% = 4,2\,\%$.

Nous constatons que $\delta m_\mathrm{A} / m_\mathrm{A} < \delta m_\mathrm{B} / m_\mathrm{B}$ ce qui prouve que la mesure de la masse de l'adulte est relativement plus précise que la masse du bébé même si l'incertitude absolue du bébé ($\delta m_\mathrm{B} = 1,6\ \mathrm{lb}$) est inférieure à l'incertitude absolue de l'adulte ($\delta m_\mathrm{A} = 9\ \mathrm{lb}$).

La propagation d'une erreur

Lorsqu'une quantité physique peut être représentée à l'aide d'une variable qui est égale à une fonction f d'un ou plusieurs paramètres (exemple : $f(x,y)$), il est possible de déterminer la valeur de cette fonction en remplaçant tous les paramètres de la fonction par une valeur. Par exemple, si la quantité $z = f(x,y)$ correspond à la fonction

$$z = f(x,y) = 7xy + y^2$$

où $x = 3$ et $y = 5$, alors la variable z sera égale à

$$z = f(x=3, y=5) = 7(3)(5) + (5)^2 = 130 \quad .$$

Cependant, si l'on accorde une incertitude à tous les paramètres ($x = \tilde{x} \pm \delta x$ et $y = \tilde{y} \pm \delta y$) d'une quantité z, nous pouvons propager ces erreurs pour ainsi déterminer une incertitude δz à la quantité z. Cette action porte le nom de « **propagation d'une erreur** ». Il existe plusieurs méthodes de propagation d'erreur ayant tous leur utilité. Dans le cadre de ce document, nous allons présenter strictement la **propagation linéaire de l'erreur**.

La propagation linéaire de l'erreur

La propagation linéaire de l'erreur d'une fonction $z = f(x,y)$ à deux paramètres x et y correspond à l'équation

$$\delta z = \delta f(x,y) = \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|\delta y \qquad \text{ou bien} \qquad \delta z = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\delta y$$

où $\partial f / \partial x = \partial z / \partial x$ correspond à la dérivée partielle de la fonction f par rapport à x, $\partial f / \partial y = \partial z / \partial y$ correspond à la dérivée partielle de la fonction f par rapport à y, δx correspond à l'incertitude du paramètre x et δy correspond à l'incertitude du paramètre y. Vous remarquerez la présence de valeur absolue (| |) sur le calcul des dérivées partielles.

Situation 5 : L'incertitude de $z = 7xy + y^2$. Une variable z est égale à la fonction $z = 7xy + y^2$. Déterminez **(a)** l'expression de l'incertitude de z et **(b)** déterminez z (valeur et incertitude) si $x = 3 \pm 1$ et $y = 5 \pm 2$.

L'expression de l'incertitude de z sera déterminée par les calculs suivants :

$$\delta z = \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right|\delta x + \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right|\delta y \quad \Rightarrow \quad \delta z = \left|\frac{\partial}{\partial x}\left(7xy + y^2\right)\right|\delta x + \left|\frac{\partial}{\partial y}\left(7xy + y^2\right)\right|\delta y$$

$$\Rightarrow \quad \delta z = \left|\frac{\partial}{\partial x}(7xy) + \frac{\partial}{\partial x}\left(y^2\right)\right|\delta x + \left|\frac{\partial}{\partial y}(7xy) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\right)\right|\delta y$$

$$\Rightarrow \quad \delta z = \left|7y\frac{\partial}{\partial x}(x) + y^2\frac{\partial}{\partial x}(1)\right|\delta x + \left|7x\frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\right)\right|\delta y$$

$$\Rightarrow \quad \delta z = \left|7y(1) + y^2(0)\right|\delta x + \left|7x(1) + (2y)\right|\delta y$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta z = \left|7y\right|\delta x + \left|7x + 2y\right|\delta y} \quad \textbf{(a)}$$

Évaluons la fonction z à l'aide de la définition des paramètres afin d'évaluer la valeur $\tilde{z}$:

$$z = 7xy + y^2 \quad \Rightarrow \quad \tilde{z} = 7\tilde{x}\tilde{y} + \tilde{y}^2$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{z} = 7(3)(5) + (5)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\tilde{z} = 130}$$ (la valeur de référence)

Évaluons l'incertitude δz à l'aide de la définition des paramètres :

$$\delta z = \left|7y\right|\delta x + \left|7x + 2y\right|\delta y \quad \Rightarrow \quad \delta z = \left|7\tilde{y}\right|\delta x + \left|7\tilde{x} + 2\tilde{y}\right|\delta y$$

$$\Rightarrow \quad \delta z = \left|7(5)\right|\delta x + \left|7(3) + 2(5)\right|\delta y$$

$$\Rightarrow \quad \delta z = 35\ \delta x + 31\delta y$$

$$\Rightarrow \quad \delta z = 35\ (1) + 31(2)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\delta z = 97}$$

Nous obtenons **(b)** ainsi que

$z = 130 \pm 97$ lorsque $x = 3 \pm 1$ et $y = 5 \pm 2$.