1.5

Les fonctions trigonométriques inverses et le MHS

Après l'étude de cette section, le lecteur pourra déterminer la constante de phase d'un MHS et le temps qui correspond à une situation particulière en résolvant des équations qui comportent des fonctions trigonométriques inverses (arcsinus, arccosinus et arctangente).

Aperçu

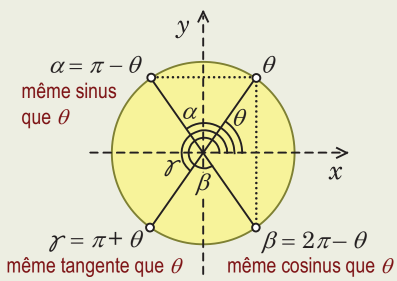
Lorsqu'on analyse un MHS, il arrive que l'on doive isoler un angle θ dans des équations qui font intervenir le sinus, le cosinus ou la tangente de θ. En général, il y a un nombre infini de valeurs de θ qui peuvent satisfaire l'équation. Une de ces valeurs est obtenue directement à partir de la fonction trigonométrique inverse (arcsinus, arccosinus ou arctangente) :

$$\text{si } \sin\theta = y \text{ alors } \theta = \arcsin y$$

$$\text{si } \cos\theta = x \text{ alors } \theta = \arccos x$$

$$\text{si } \tan\theta = z \text{ alors } \theta = \arctan z$$

Pour trouver les autres valeurs de θ, il faut considérer le cercle trigonométrique (schéma ci-dessous) :



$\alpha = \pi - \theta$ possède le même sinus que θ

$\beta = 2\pi - \theta$ possède le même cosinus que θ

$\gamma = \pi + \theta$ possède la même tangente que θ

À chacune des valeurs de θ obtenues, on peut ajouter un multiple entier positif ou négatif de 2π rad, car cela ne change pas la position du point correspondant sur le cercle trigonométrique.

Lorsqu'on combine des équations qui contiennent des sinus et des cosinus, les relations

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

et

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

peuvent être utiles.

Il est pratique de mémoriser les valeurs du sinus et du cosinus pour les angles 0, $\pi/6$ rad (30°), $\pi/4$ rad (45°), $\pi/3$ rad (60°) et $\pi/2$ rad (90°). Ces valeurs sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
0	0	1
$30° = \frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660...$
$45° = \frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071...$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071...$
$60° = \frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660...$	$\frac{1}{2}$
$90° = \frac{\pi}{2}$ rad	1	0

Exposé

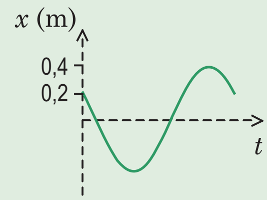
Dans la **section 1.1 : Les oscillations**, lorsque nous avons étudié la fonction générale qui décrit un MHS, $x = A\sin(\omega t + \phi)$, nous avons considéré uniquement des situations où la constante de phase ϕ prenait les valeurs 0, $\pi/2$, π ou $3\pi/2$ rad. Dans cette section, nous allons analyser le MHS pour des valeurs quelconques de ϕ, en utilisant au besoin les notions de cinématique, de dynamique et d'énergie des **sections 1.2 : La dynamique du mouvement harmonique simple** et **1.4 : L'énergie et le mouvement harmonique simple**.

Jusqu'à présent, nous n'avons pas rencontré de situations dont la résolution nécessitait l'emploi des fonctions trigonométriques inverses (arcsinus, arccosinus et arctangente). Dans cette section, nous allons apprendre à travailler avec ces fonctions ; en particulier, nous allons voir comment tenir compte des solutions multiples qui sont associées à leur utilisation.

Situation 1 : *La constante de phase d'un MHS.* La position en fonction du temps d'un objet est donnée par

$$x = A\sin(\omega t + \phi)$$

avec $A = 0{,}4$ m et $\omega = 2$ rad/s. À $t = 0$, l'objet est situé en $x = 0{,}2$ m et il se déplace dans le sens négatif de l'axe x (schéma ci-contre). On désire déterminer la valeur de ϕ ($0 \le \phi < 2\pi$ rad).



En divisant l'équation de part et d'autre du signe d'égalité par A,

$$\frac{x}{A} = \sin(\omega t + \phi)$$

puis en remplaçant les valeurs numériques $A = 0{,}4$ m, $\omega = 2$ rad/s et $t = 0$, nous obtenons

$$\frac{(0{,}2\,\text{m})}{(0{,}4\,\text{m})} = \sin(0 + \phi) \quad \Rightarrow \quad \sin\phi = 0{,}5$$

Pour plus de détails, consultez la **sous-section M5.5 : Les fonctions trigonométriques inverses** de l'annexe mathématique.

Nous voulons déterminer la valeur de l'angle ϕ dont le sinus est de 0,5. Pour ce faire, nous allons utiliser l'*arcsinus*, la fonction inverse du sinus (sur la plupart des calculatrices, l'arcsinus correspond à la touche $\sin^{-1}$). En n'oubliant pas de régler la calculatrice en mode « radians », nous obtenons

$$\arcsin(0{,}5) = 0{,}5236 \text{ rad}$$

Pour plus de détails, consultez la **sous-section M5.2 : Valeurs particulières du sinus et du cosinus** de l'annexe mathématique.

Le tableau ci-contre présente les valeurs particulières de sinus et de cosinus qu'il est utile de mémoriser. Dans le cas qui nous intéresse, nous pouvons écrire

$$\arcsin(0{,}5) = \frac{\pi}{6} \text{ rad}$$

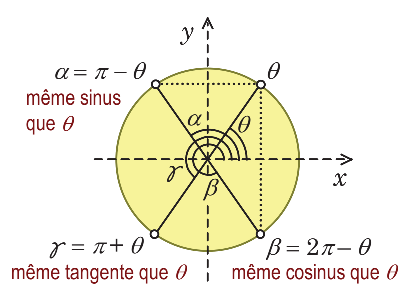
sans faire appel à la calculatrice.

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$
0	0	1
$30° = \frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660...$
$45° = \frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071...$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}7071...$
$60° = \frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\sqrt{3}}{2} = 0{,}8660...$	$\frac{1}{2}$
$90° = \frac{\pi}{2}$ rad	1	0

Nous savons que $\phi = \pi/6$ rad est une solution de l'équation $\sin\phi = 0{,}5$. Toutefois, il faut faire attention, car *ce n'est pas la seule* ; de plus, dans cette situation, *ce n'est pas la bonne* ! En effet, comme la fonction sinus est une fonction périodique, il existe *un nombre infini* de valeurs de ϕ dont le sinus est de 0,5. Pour trouver les autres valeurs, il faut considérer le *cercle trigonométrique*, un cercle de rayon 1 centré sur un système d'axes *xy* qui sert à définir les fonctions trigonométriques.

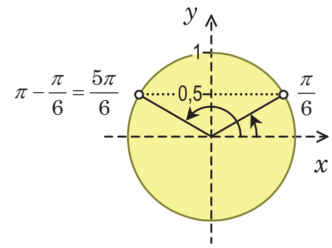
Pour plus de détails concernant le cercle trigonométrique, consultez la **sous-section M5.1 : La définition du sinus et du cosinus** de l'annexe mathématique.

Considérons un point du cercle trigonométrique situé à la position angulaire θ mesurée dans le sens antihoraire à partir de l'axe des x positifs (schéma ci-contre). Par définition, la coordonnée x de ce point correspond à $\cos\theta$ et la coordonnée y correspond à $\sin\theta$. Le schéma permet de constater que l'angle $\alpha = \pi - \theta$ possède le même sinus que l'angle θ.



Dans le cas particulier qui nous intéresse, nous savons que

$$\phi = \frac{\pi}{6}\,\text{rad}$$



est une solution. Par conséquent,

$$\phi = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\text{rad} = \frac{5\pi}{6}\,\text{rad}$$

est également une solution (schéma ci-contre).

De plus, comme un tour du cercle trigonométrique correspond à 2π rad, ajouter un multiple entier positif ou négatif de 2π rad ne change rien à la position sur le cercle trigonométrique. Il y a donc *deux* séries infinies de solutions :

$$\phi = \begin{cases} \dfrac{\pi}{6} + 2n\pi = \ldots \overbrace{\dfrac{-11\pi}{6}}^{n=-1};\ \overbrace{\dfrac{\pi}{6}}^{n=0};\ \overbrace{\dfrac{13\pi}{6}}^{n=1}\ldots \\ \dfrac{5\pi}{6} + 2n\pi = \ldots \dfrac{-7\pi}{6};\ \dfrac{5\pi}{6};\ \dfrac{17\pi}{6}\ldots \end{cases}$$

Le paramètre n peut prendre n'importe quelle valeur entière, qu'elle soit positive ou négative : $n = \ldots -2, -1, 0, 1, 2\ldots$

D'après l'énoncé de la situation, nous cherchons une constante de phase ϕ entre 0 et 2π rad. Ainsi, il y a deux possibilités :

$$\phi = \frac{\pi}{6}\,\text{rad} \qquad \text{et} \qquad \phi = \frac{5\pi}{6}\,\text{rad}$$

Pour déterminer la bonne, il faut tenir compte du fait qu'à $t = 0$, l'objet se déplace dans le sens négatif de l'axe x : c'est indiqué dans l'énoncé, mais on peut également le constater par simple examen du graphique $x(t)$.

Ici, la vitesse de l'objet est

$$v_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[A\sin(\omega t + \phi)\right] = A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sin(\omega t + \phi)\right] = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

Pour $A = 0{,}4$ m, $\omega = 2$ rad/s, $t = 0$ et $\phi = \pi/6$ rad, nous obtenons une vitesse positive, ce qui est incorrect :

$$v_x = (0{,}4\ \text{m})(2\ \text{rad/s})\cos\left(0 + \frac{\pi}{6}\right) = 0{,}693\ \text{m/s}$$

En revanche, pour $\phi = 5\pi/6$ rad, la vitesse est négative :

$$v_x = (0{,}4\ \text{m})(2\ \text{rad/s})\cos\left(0 + \frac{5\pi}{6}\right) = -0{,}693\ \text{m/s}$$

Par conséquent, la constante de phase de ce MHS est

$$\boxed{\phi = \frac{5\pi}{6}\ \text{rad} = 2{,}62\ \text{rad}}$$

Situation 2 : *Trois instants à la même position.* La position en fonction du temps d'un objet est donnée par

$$x = 0{,}5\sin(3t + 4{,}5)$$

où x est en mètres et t est en secondes. On désire déterminer les trois premiers instants après $t = 0$ où l'objet est situé en $x = -0{,}4$ m.

Dans le reste de cette section, nous allons omettre les unités physiques dans les calculs intermédiaires afin de mieux faire ressortir les manipulations algébriques.

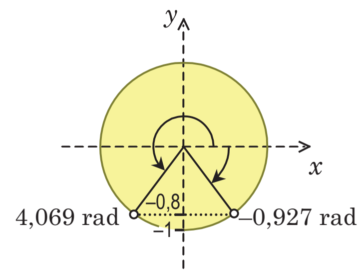
Isolons le sinus et remplaçons x par $-0{,}4$ m :

$$\sin(3t+4{,}5)=\frac{x}{0{,}5}=\frac{-0{,}4}{0{,}5}=-0{,}8$$

D'après la calculatrice (correctement réglée en mode « radians »),

$$\arcsin(-0{,}8)=-0{,}927 \text{ rad}$$

D'après le cercle trigonométrique (schéma ci-contre),



$$\pi-(-0{,}927 \text{ rad})=4{,}069 \text{ rad}$$

possède également un sinus de $-0{,}8$. En ajoutant à ces valeurs des multiples entiers de 2π, nous obtenons deux séries infinies de solutions :

$$3t+4{,}5=\begin{cases}-0{,}927+2n\pi=\ldots\overbrace{-7{,}210}^{n=-1};\ \overbrace{-0{,}927}^{n=0};\ \overbrace{\underline{5{,}356}}^{n=1};\ \overbrace{\underline{11{,}639}}^{n=2}\ldots\\ 4{,}069+2n\pi=\ldots-2{,}214;\ 4{,}069;\ \underline{10{,}352};\ 16{,}635\ldots\end{cases}$$

Les trois plus petites valeurs positives de t correspondent aux trois solutions soulignées :

$$t_1=\frac{5{,}356-4{,}5}{3}\quad\Rightarrow\quad\boxed{t_1=0{,}285\text{ s}}$$

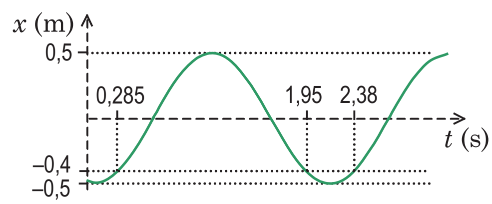
$$t_2=\frac{10{,}352-4{,}5}{3}\quad\Rightarrow\quad\boxed{t_2=1{,}95\text{ s}}$$

$$t_3=\frac{11{,}639-4{,}5}{3}\quad\Rightarrow\quad\boxed{t_3=2{,}38\text{ s}}$$

Sur le graphique ci-contre, nous avons représenté la fonction

$$x=0{,}5\sin(3t+4{,}5)$$

ainsi que les trois valeurs de t que nous avons obtenues.



Situation 3 : ***L'amplitude et la constante de phase à partir de la position, de la vitesse et de la fréquence angulaire.*** La position en fonction du temps d'un objet est donnée par

$$x=A\sin(\omega t+\phi)$$

avec $\omega=3$ rad/s. À $t=2$ s, la position de l'objet est $x=-0{,}4$ m et la composante selon x de sa vitesse est $v_x=-0{,}6$ m/s. On désire déterminer les valeurs de A et de ϕ. (On veut $A>0$ et $0\leq\phi<2\pi$ rad.)

Nous pouvons écrire deux équations :

$$x=A\sin(\omega t+\phi)\qquad\text{et}\qquad v_x=\frac{dx}{dt}=A\omega\cos(\omega t+\phi)$$

Remplaçons les données dans chacune des équations :

$$-0{,}4 = A\sin(3\times 2+\phi) \qquad\qquad -0{,}6 = 3A\cos(3\times 2+\phi)$$

$$-0{,}4 = A\sin(6+\phi) \quad \textbf{(i)} \qquad\qquad -0{,}2 = A\cos(6+\phi) \quad \textbf{(ii)}$$

Nous obtenons un système de deux équations à deux inconnues : A et ϕ. Pour le résoudre, il y a deux approches possibles, basées sur les relations

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \qquad \text{ou} \qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Nous allons utiliser la première approche (nous utiliserons la seconde approche dans la **situation 4**). En divisant l'équation **(i)** par l'équation **(ii)**,

$$\frac{-0{,}4}{-0{,}2} = \frac{A\sin(6+\phi)}{A\cos(6+\phi)}$$

nous obtenons

$$\tan(6+\phi) = 2$$

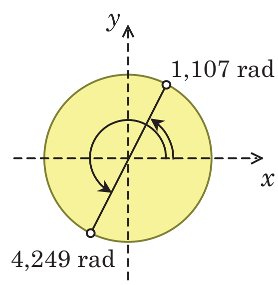
D'après la calculatrice (correctement réglée en mode radians),

$$\arctan(2) = 1{,}107 \text{ rad}$$

D'après le cercle trigonométrique (schéma ci-contre),

$$\pi + 1{,}107 = 4{,}249 \text{ rad}$$

possède également une tangente de 2. En ajoutant à ces valeurs des multiples entiers de 2π, nous obtenons deux séries infinies de solutions :



Lorsqu'on ajoute π rad à un angle, on inverse le signe de son sinus et de son cosinus, mais comme $\tan\theta = \sin\theta / \cos\theta$, cela ne change pas la valeur de la tangente. Pour plus de détails, consultez la **sous-section M5.5 : Les fonctions trigonométriques inverses** de l'annexe mathématique.

$$6+\phi = \begin{cases} 1{,}107 + 2n\pi = \ldots \underbrace{-5{,}176}_{n=-1} \;;\; \underbrace{1{,}107}_{n=0} \;;\; \underbrace{\underline{7{,}390}}_{n=1} \;;\; \underbrace{13{,}673}_{n=2} \ldots \\ 4{,}249 + 2n\pi = \ldots -2{,}034 \;;\; 4{,}249 \;;\; \underline{10{,}532} \;;\; 16{,}815 \ldots \end{cases}$$

Pour que ϕ soit compris entre 0 et 2π rad, il y a deux possibilités, correspondant aux deux solutions soulignées :

$$\phi = 7{,}390 - 6 = 1{,}390 \text{ rad} \qquad \text{et} \qquad \phi = 10{,}532 - 6 = 4{,}532 \text{ rad}$$

En insérant la première possibilité dans l'équation **(i)**, nous obtenons

$$-0{,}4 = A\sin(6 + 1{,}390)$$

$$A = \frac{-0{,}4}{\sin(7{,}390)} = \frac{-0{,}4}{0{,}8943} = -0{,}447 \text{ m}$$

Comme il est d'usage d'exprimer l'équation du MHS avec une amplitude positive (ce qui est d'ailleurs explicitement demandé dans l'énoncé), nous devons *rejeter* cette possibilité.

En insérant la seconde possibilité dans l'équation **(i)**, nous obtenons

$$-0{,}4 = A\sin(6 + 4{,}532)$$

$$A = \frac{-0{,}4}{\sin(10{,}532)} = \frac{-0{,}4}{-0{,}8945} = 0{,}447 \text{ m}$$

Ainsi, les réponses cherchées sont

$$\boxed{\phi = 4{,}53 \text{ rad}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{A = 0{,}447 \text{ m}}$$

Vérifions l'exactitude de ces réponses en les remplaçant dans les équations d'origine :

$$x = A\sin(\omega t+\phi) = 0{,}447\sin((3\times 2)+4{,}53) = 0{,}447\sin(10{,}53) = -0{,}4 \text{ m}$$
$$v_x = A\omega\cos(\omega t+\phi) = 0{,}447\times 3\cos((3\times 2)+4{,}53) = 1{,}341\cos(10{,}53) = -0{,}6 \text{ m/s}$$

Nous retrouvons bien les données de départ.

Situation 4 : ***L'amplitude et la constante de phase à partir de la position, de la vitesse et de la fréquence angulaire, prise 2.*** On désire reprendre l'analyse de la **situation 3**, mais en utilisant cette fois l'identité trigonométrique $\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$.

Afin d'utiliser l'identité trigonométrique spécifiée dans l'énoncé, nous devons élever au carré les équations **(i)** et **(ii)** de l'analyse de la **situation 3** :

$$0{,}16 = A^2\sin^2(6+\phi) \qquad \textbf{(i}^2\textbf{)}$$
$$0{,}04 = A^2\cos^2(6+\phi) \qquad \textbf{(ii}^2\textbf{)}$$

En additionnant les équations **(i²)** et **(ii²)**, nous obtenons

$$0{,}16+0{,}04 = A^2\left[\sin^2(6+\phi)+\cos^2(6+\phi)\right]$$

Pour plus de détails, consultez la **sous-section M5.6 : Les identités trigonométriques** de l'annexe mathématique.

Comme $\sin^2\theta+\cos^2\theta = 1$, cela donne

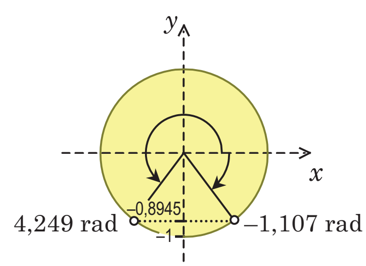
$$0{,}2 = A^2 \qquad \Rightarrow \qquad A = \pm\sqrt{0{,}2} = \pm 0{,}4472 \text{ m}$$

Comme on désire que l'amplitude soit positive, $\boxed{A = 0{,}447 \text{ m}}$. Insérons cette valeur dans l'équation **(i)** :

$$-0{,}4 = A\sin(6+\phi)$$
$$-0{,}4 = 0{,}4472\sin(6+\phi)$$
$$\sin(6+\phi) = -0{,}8945$$

D'après la calculatrice,

$$\arcsin(-0{,}8945) = -1{,}107 \text{ rad}$$



D'après le cercle trigonométrique (schéma ci-contre),

$$\pi-(-1{,}107) = 4{,}249 \text{ rad}$$

possède également un sinus de –0,8945. En ajoutant à ces valeurs des multiples entiers de 2π, nous obtenons deux séries infinies de solutions :

$$6+\phi = \begin{cases} -1{,}107+2n\pi = \ldots \overbrace{-7{,}390}^{n=-1};\ \overbrace{-1{,}107}^{n=0};\ \overbrace{5{,}176}^{n=1};\ \overbrace{\underline{11{,}459}}^{n=2}\ldots \\ 4{,}249+2n\pi = \ldots -2{,}034;\ 4{,}249;\ \underline{10{,}532};\ 16{,}815\ldots \end{cases}$$

Pour que ϕ soit compris entre 0 et 2π rad, il y a deux possibilités, correspondant aux deux solutions soulignées :

$$\phi = 11{,}459-6 = 5{,}459 \text{ rad} \qquad \text{et} \qquad \phi = 10{,}532-6 = 4{,}532 \text{ rad}$$

En insérant la première possibilité dans l'équation **(ii)**, nous obtenons une contradiction :

$$\begin{aligned}
-0{,}2 &= A\cos(6+\phi)\\
-0{,}2 &= 0{,}4472\ \cos(6+5{,}459)\\
-0{,}2 &= 0{,}4472\ \cos(11{,}459)\\
-0{,}2 &= 0{,}2
\end{aligned}$$

Ainsi, il faut éliminer cette possibilité. En insérant la seconde possibilité dans l'équation **(ii)**, nous obtenons une égalité :

$$\begin{aligned}
-0{,}2 &= 0{,}4472\ \cos(6+4{,}532)\\
-0{,}2 &= 0{,}4472\ \cos(10{,}532)\\
-0{,}2 &= -0{,}2
\end{aligned}$$

Ainsi, la constante de phase est

$$\boxed{\phi = 4{,}53\ \text{rad}}$$

Nous obtenons, bien sûr, les mêmes réponses que dans la **situation 3**.

Que l'on choisisse de résoudre la situation à partir de

$$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta \qquad \text{ou} \qquad \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

une chose est certaine : la présence de solutions multiples chaque fois que l'on calcule une fonction trigonométrique inverse rend le problème assez difficile. Il ne faut pas accepter aveuglément la première réponse donnée par la calculatrice. De plus, il est fortement conseillé de vérifier que la solution finale est conforme aux équations d'origine.

QUESTIONS

Q1. L'angle $\pi - \theta$ possède le même __________ que l'angle θ ; l'angle $2\pi - \theta$ possède le même __________ que l'angle θ. (Les angles sont exprimés en radians.)

Q2. Illustrez les deux énoncés de la **question Q1** à l'aide du cercle trigonométrique.

Q3. L'angle $\theta + \pi$ possède la même __________ que l'angle θ. (Les angles sont exprimés en radians.)

EXERCICES

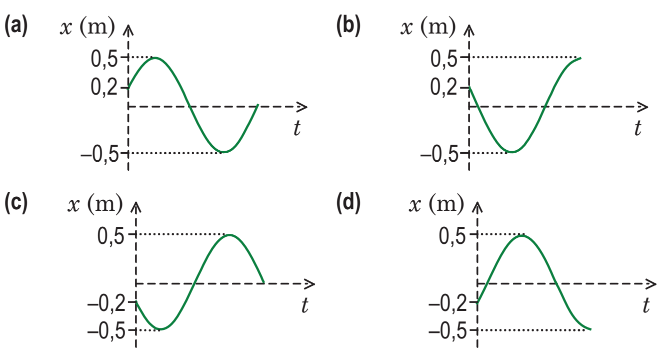
Dans les exercices, lorsqu'on demande l'équation qui décrit un MHS, on désire qu'elle soit exprimée sous la forme $x = A\ \sin(\omega t + \phi)$, avec x en mètres, t en secondes, $A > 0$, $\omega > 0$ et $0 \le \phi < 2\pi$ rad.

Lorsqu'on spécifie l'équation $x(t)$ d'un MHS à l'aide de valeurs numériques, x est en mètres, t est en secondes et la phase est en radians.

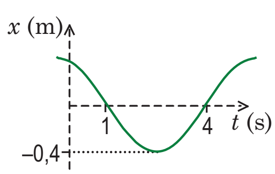
RÉCHAUFFEMENT

1.5.1 ***De multiples solutions.*** Déterminez tous les angles entre -10 rad et $+10$ rad dont **(a)** le sinus est de 0,3 ; **(b)** le sinus est de $-0,3$; **(c)** le cosinus est de 0,3 ; **(d)** le cosinus est de $-0,3$; **(e)** la tangente est de 0,3 ; **(f)** la tangente est de $-0,3$.

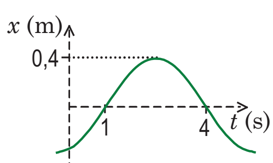
1.5.2 ***La constante de phase à partir du graphique.*** Les graphiques ci-dessous représentent des mouvements harmoniques simples $x = A\ \sin(\omega t + \phi)$. Pour chaque graphique, déterminez la valeur de ϕ ($0 \le \phi < 2\pi$ rad). L'amplitude A est une quantité positive.



1.5.3 ***L'équation à partir du graphique.*** Pour le MHS représenté sur le graphique ci-contre, déterminez **(a)** la période et **(b)** l'équation qui décrit le graphique.



1.5.4 ***L'équation à partir du graphique, prise 2.*** Reprenez l'**exercice 1.5.3** pour le MHS représenté sur le graphique ci-contre.



SÉRIE PRINCIPALE

1.5.5 ***L'équation à partir de la position et de la vitesse au même instant.*** Un bloc dont la masse est de 200 g oscille selon un MHS à l'extrémité d'un ressort dont la constante de rappel est de 5 N/m. À $t = 1,2$ s, le bloc est à la position $x = -0,206$ m et il se déplace à 2,28 m/s dans le sens positif. Déterminez l'équation $x(t)$ qui décrit le MHS du bloc.

1.5.6 ***Quand l'énergie cinétique est égale au double de l'énergie potentielle.*** **(a)** Dans un système bloc-ressort qui oscille, combien de fois par période l'énergie cinétique est-elle égale au double de l'énergie potentielle ? Pour un objet qui oscille selon

$$x = 0{,}2 \sin\left(\frac{\pi}{2} t + 5\right)$$

déterminez **(b)** les quatre premiers instants plus grands que zéro pour lesquels l'énergie cinétique est égale au double de l'énergie potentielle, et **(c)** les quatre instants suivants.

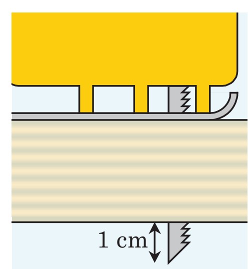
1.5.7 ***L'instant qui correspond à une vitesse et à une position données.*** La position en fonction du temps d'un objet est

$$x = 0{,}6\ \sin(1{,}5\,t + 1)$$

Déterminez le premier instant positif où $x = -0,423$ m et $v_x = 0,638$ m/s.

1.5.8 ***Un pendule revient à la verticale.*** On incline la corde d'un pendule et on lâche ce dernier (vitesse initiale nulle) ; cela prend 0,2 s pour que l'inclinaison entre la corde et la verticale soit réduite de moitié. Combien de temps supplémentaire doit-on attendre pour que le pendule passe pour la première fois à la verticale ?

1.5.9 ***Une scie sauteuse.*** La lame d'une scie sauteuse possède un MHS vertical dont l'amplitude est de 2,5 cm. Lorsqu'elle est à sa position la plus basse, elle dépasse de 1 cm sous la planche (schéma ci-contre). Sachant que la lame oscille à 100 Hz, déterminez l'intervalle de temps où la lame dépasse la planche pendant chaque cycle d'oscillation.



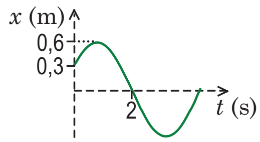
1.5.10 ***Lorsque la conservation de l'énergie n'est d'aucun secours.*** Reprenez l'**exercice 1.4.8 : *La vitesse à une certaine position*** en supposant que l'on *ne connaît pas* la masse du bloc. (*Indice* : au lieu de procéder par l'énergie, vous aurez besoin de résoudre une équation qui contient une fonction trigonométrique inverse.)

SÉRIE SUPPLÉMENTAIRE

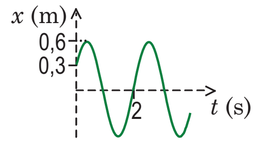
1.5.11 ***Sous la forme conventionnelle.*** Exprimez chacune des équations suivantes sous la forme conventionnelle (avec un sinus et une constante de phase entre 0 et 2π) :
(a) $x = 0,3\ \sin(2t - 3\pi/8)$; **(b)** $x = 0,4\ \cos(1,5t + 7\pi/8)$;
(c) $x = -0,2\ \cos(0,5t + 5\pi/8)$.

1.5.12 ***Trouvez les équations.*** Déterminez l'équation de chacun des graphiques ci-dessous. (Suggestion : estimez d'abord, « à l'œil », la valeur approximative de la période.)

(a)



(b)



1.5.13 ***L'équation à partir de la vitesse et de l'accélération au même instant.*** Un bloc dont la masse est de 500 g oscille selon un MHS à l'extrémité d'un ressort dont la constante de rappel est de 8 N/m. À $t = 2$ s, le bloc se déplace à 0,507 m/s dans le sens négatif, et son accélération est $a_x = -1{,}28$ m/s^2. Déterminez l'équation $x(t)$ qui décrit le MHS du bloc.

1.5.14 ***Lorsque la conservation de l'énergie n'est d'aucun secours, prise 2.*** Reprenez l'**exercice 1.4.12 :** ***La position pour une certaine vitesse*** en supposant que l'on *ne connaît pas* la constante de rappel du ressort. (*Indice* : au lieu de procéder par l'énergie, vous aurez besoin de résoudre une équation qui contient une fonction trigonométrique inverse.)

1.5.15 ***Les trois premiers instants.*** La position en fonction du temps d'un objet est

$$x = 0{,}5\sin\left(\frac{\pi}{3}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Déterminez les *trois* premiers instants ($t \geq 0$) où **(a)** la position est nulle ; **(b)** la vitesse est positive et maximale ; **(c)** l'accélération est négative et maximale (en valeur absolue) ; **(d)** la position est négative et maximale (en valeur absolue) ; **(e)** la vitesse est positive et de module égal à la moitié du module maximal de la vitesse ; **(f)** l'accélération est négative et de module égal à la moitié du module maximal de l'accélération ; **(g)** l'énergie potentielle est égale à la moitié de l'énergie mécanique ; **(h)** l'énergie cinétique est égale au quart de l'énergie mécanique.

1.5.16 ***Les trois premiers instants, prise 2.*** Reprenez l'**exercice 1.5.15** pour un objet dont la position en fonction du temps est

$$x = 0{,}4\cos(2t)$$