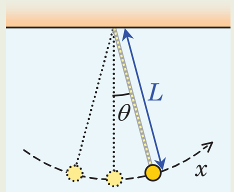
1.3

Le pendule composé

Après l'étude de cette section, le lecteur pourra analyser l'oscillation d'un pendule composé en tenant compte de son moment d'inertie.

APERÇU

Dans la **section 1.1 : Les oscillations**, nous avons décrit l'oscillation d'un pendule simple en mesurant la position de la bille par rapport à un axe x courbe qui suit son mouvement (schéma ci-contre). On peut également décrire l'oscillation du pendule en utilisant l'angle θ que fait la corde par rapport à la verticale. Si θ oscille entre les valeurs maximales $-\theta_{max}$ et θ_{max}, on peut écrire

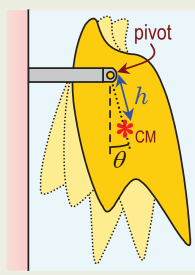


$$\boxed{\theta = \theta_{max} \sin(\omega t + \phi)}$$

Équation $\theta(t)$ d'un pendule (faible amplitude)

L'oscillation est adéquatement décrite par cette fonction sinusoïdale uniquement lorsque l'amplitude est faible : en pratique, θ_{max} doit être inférieur à 15°.

Lorsqu'on fait osciller un corps qui *ne peut pas* être considéré comme une particule, on est en présence d'un **pendule composé** (schéma ci-contre). Il n'est pas pratique de décrire le mouvement du pendule composé à l'aide d'une équation $x(t)$, car chacun des points du corps ne subit pas le même déplacement. En revanche, pendant l'oscillation, tous les points du corps se déplacent du même angle : ainsi, on peut se servir de l'équation $\theta(t)$ ci-dessus (lorsque l'amplitude est faible). L'angle θ représente l'inclinaison (par rapport à la position d'équilibre verticale) de la droite qui relie le pivot et le centre de masse du corps.



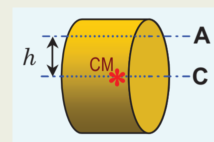
La fréquence angulaire naturelle de l'oscillation d'un pendule composé dépend du moment d'inertie I du corps par rapport à l'axe de rotation qui passe par le pivot. Pour une oscillation de faible amplitude,

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{mgh}{I}}}$$

Fréquence angulaire naturelle d'un pendule composé (faible amplitude)

où m est la masse du corps et h est la distance entre le pivot et le centre de masse du corps.

Pour calculer le moment d'inertie d'un pendule composé, il faut parfois utiliser le **théorème des axes parallèles** (**section 4.6** du **tome A**) : le moment d'inertie d'un corps de masse m par rapport à un axe **A** parallèle à un axe **C** passant par son centre de masse et situé à une distance h de ce dernier (schéma ci-contre) est



$$\boxed{I = mh^2 + I_{CM}}$$

Théorème des axes parallèles

où I_{CM} le moment d'inertie par rapport à l'axe **C**.

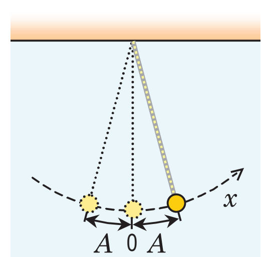
Pour un pendule simple de masse m oscillant au bout d'une corde de longueur L, $h = L$ et $I = mh^2$. Ainsi,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgh}{mh^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

ce qui est conforme au résultat obtenu dans la **section 1.2 : La dynamique du mouvement harmonique simple**.

EXPOSÉ

Comme nous l'avons mentionné dans la **section 1.1 : Les oscillations**, un pendule simple (schéma ci-contre) constitue un des exemples les plus connus de système oscillant. La bille qui est attachée au bout de la corde peut être considérée comme une particule. Ainsi, on peut décrire sa position en fonction du temps à l'aide de l'équation $x(t)$ du MHS,



$$x = A \sin(\omega t + \phi)$$

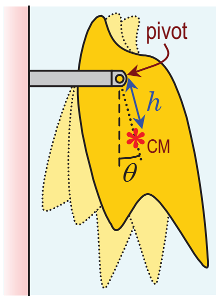
(tant que l'angle entre la corde et la verticale demeure petit — en pratique, inférieur à 15°). Bien sûr, pour pouvoir utiliser cette équation, il faut définir un axe x courbe qui suit le mouvement de la bille.

Un pendule composé est constitué d'*un seul* objet : le terme « composé » fait référence au fait que l'objet qui oscille est composé de plusieurs particules reliées entre elles.

Dans cette section, nous allons nous intéresser aux **pendules composés** — des pendules pour lesquels l'objet qui oscille *ne peut pas* être considéré comme une particule. Un pendule simple est un modèle théorique utile, mais, dans la réalité, la plupart des pendules sont composés. En particulier, lorsqu'on analyse le mouvement du corps humain (par exemple, le mouvement des jambes d'un marcheur), il faut se servir de la théorie que nous allons introduire dans la présente section.

DREAMSTIME

On peut créer un pendule composé en faisant osciller un corps accroché à une tige rigide dont la longueur n'est pas beaucoup plus grande que la taille du corps (photo ci-contre). On peut également faire osciller un corps autour d'un axe qui passe *au travers* (schéma ci-dessous).



Pour décrire l'oscillation du pendule composé, l'équation $x(t)$ du MHS n'est pas très pratique. En effet, entre deux instants de l'oscillation, tous les points du corps ne subissent pas le même déplacement : plus un point est situé loin de l'axe (pivot), plus son déplacement est grand. En revanche, pendant l'oscillation, *tous les points du corps pivotent du même angle*. Nous avons déjà rencontré des situations similaires dans le **chapitre 4 : Mécanique des corps** du **tome A**, quand nous nous sommes intéressés au mouvement de rotation des corps.

À la fin de cette section, nous allons démontrer qu'un pendule composé dont l'amplitude d'oscillation est faible obéit bien à l'équation ci-contre.

Afin de décrire l'oscillation du pendule composé, nous allons utiliser l'angle θ indiqué sur le schéma ci-dessus : il s'agit de l'angle entre la verticale (position d'équilibre du pendule) et la droite qui relie le pivot et le centre de masse du corps. Si l'angle θ oscille entre les valeurs maximales $-\theta_{\max}$ et $\theta_{\max}$, on peut écrire

$$\boxed{\theta = \theta_{\max} \sin(\omega t + \phi)}$$

Équation $\theta(t)$ d'un pendule (faible amplitude)

Tant que l'amplitude $\theta_{\max}$ de l'oscillation est inférieure à 15°, cette équation décrit adéquatement le pendule composé. Elle peut également être utilisée pour décrire l'oscillation d'un pendule simple, car il s'agit d'un cas particulier de pendule composé pour lequel le corps qui oscille peut être considéré comme une particule. Si nous avons préféré utiliser l'équation $x(t)$ pour décrire le pendule simple dans les **sections 1.1** et **1.2**, c'était pour mieux faire ressortir le parallèle entre l'oscillation d'un pendule simple et l'oscillation d'un système bloc-ressort.

La fréquence angulaire naturelle d'un pendule composé

Si l'on donne une poussée à un pendule composé et qu'on le laisse osciller, quelle est sa fréquence angulaire naturelle ? Dans la **section 4.3 : Le centre de masse** du **tome A**, nous avons vu qu'il est parfois possible de considérer un corps comme une particule dont toute la masse est concentrée en son centre de masse. Malheureusement, on *ne peut pas* déterminer la fréquence angulaire naturelle d'un pendule composé en supposant que toute sa masse est concentrée en son centre de masse et en utilisant l'équation $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ du pendule simple.

Tout comme l'équation $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ du pendule simple, l'équation ci-contre donne de bons résultats uniquement lorsque l'amplitude de l'oscillation est faible (en pratique, $\theta_{\max}$ doit être inférieur a 15°).

Sur le schéma ci-dessus, nous avons désigné par h la distance entre le centre de masse du pendule composé et le pivot. La fréquence angulaire naturelle du pendule composé *n'est pas* $\omega_0 = \sqrt{g/h}$, mais plutôt

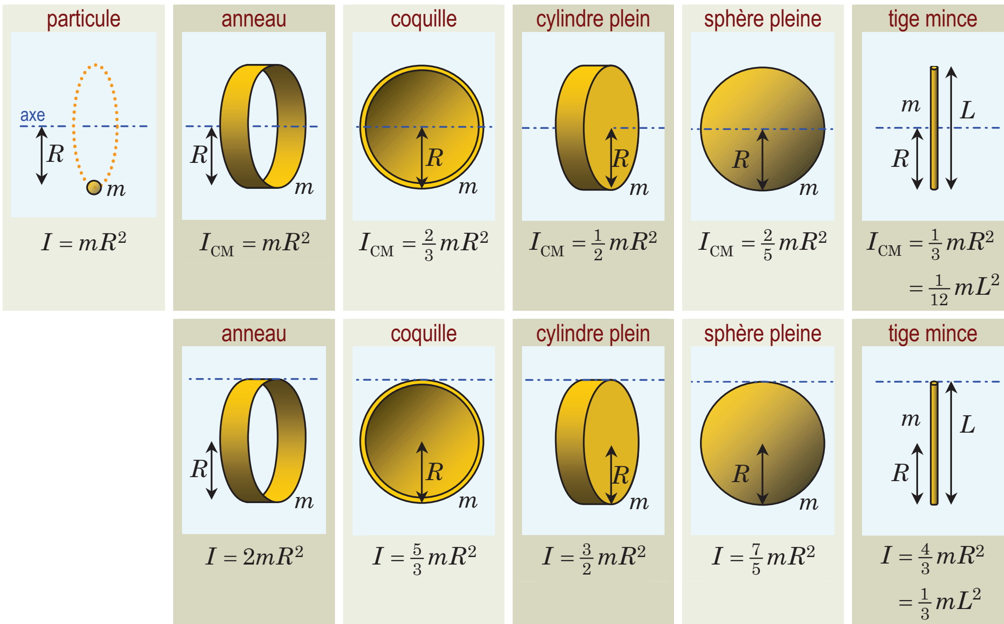
$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{mgh}{I}}}$$

Fréquence angulaire naturelle d'un pendule composé (faible amplitude)

où I est le *moment d'inertie* du corps par rapport à l'axe de rotation qui passe par le pivot.

Rappelons que le moment d'inertie est une mesure de l'inertie de rotation d'un objet (sa tendance à s'opposer à un changement de son mouvement de rotation). Le tableau ci-dessous présente les équations permettant de calculer le moment d'inertie d'une particule ainsi que de différents corps autour d'axes passant par leurs centres de masse (rangée du haut) et par leurs « extrémités » (rangée du bas). Comme le moment d'inertie correspond à une masse multipliée par une distance au carré, il s'exprime, dans le SI, en kilogrammes-mètres carrés (kg·m²).

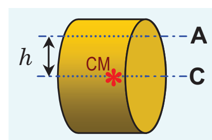
Le moment d'inertie a été introduit dans le **tome A**, à la **section 4.4 : Le moment d'inertie et l'énergie cinétique de rotation**.



Pour une masse m donnée, plus les particules qui composent le corps sont situées, en moyenne, près de l'axe, plus le moment d'inertie est petit. C'est pour cela que le moment d'inertie diminue de gauche à droite dans le tableau.

Lorsque l'axe passe par le centre de masse du corps, on a ajouté l'indice CM au symbole I.

D'après le **théorème des axes parallèles** (que nous avons démontré dans la **section 4.6** du **tome A**), le moment d'inertie d'un corps de masse m par rapport à un axe **A** parallèle à un axe **C** passant par son centre de masse et situé à une distance h de ce dernier (schéma ci-contre) est



$$\boxed{I = mh^2 + I_{CM}}$$

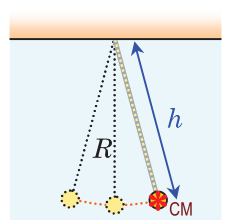
Théorème des axes parallèles

où I_{CM} est le moment d'inertie par rapport à l'axe **C**. C'est pour cela que les moments d'inertie dans la rangée du bas du tableau sont supérieurs de mR^2 aux moments d'inertie correspondants dans la rangée du haut.

Nous allons démontrer l'équation

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgh}{I}}$$

à la fin de cette section. Pour l'instant, nous allons nous contenter de vérifier qu'elle redonne bien $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ pour un pendule simple (schéma ci-contre). Dans ce cas, la distance h entre le centre de masse et le pivot correspond à la longueur L de la corde :



$$h = L$$

La bille du pendule simple peut être considérée comme une particule. Le rayon R qui sert à calculer son moment d'inertie correspond à la longueur L de la corde : d'après le tableau des moments d'inertie,

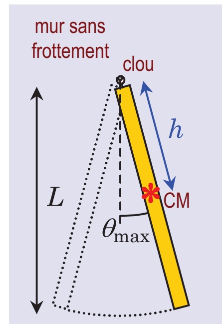
$$I = mR^2 = mL^2$$

Par conséquent,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgh}{I}} = \sqrt{\frac{mgL}{mL^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

ce que nous voulions démontrer.

Situation 1 : *L'oscillation d'une tige.* On visse un petit anneau à l'extrémité d'une tige homogène de longueur L, on accroche la tige à un clou planté dans le mur, on l'incline d'un angle θ_{max} par rapport à la verticale et on la lâche (vitesse initiale nulle). En supposant que le frottement est négligeable et que θ_{max} est inférieur à 15°, on désire déterminer **(a)** le temps que prend la tige pour passer d'une extrémité à l'autre de son oscillation ; **(b)** le module de la vitesse de l'extrémité inférieure de la tige lorsque cette dernière passe à la verticale.



Nous avons représenté la situation sur le schéma ci-contre. Par rapport au pivot situé au sommet de la tige, le moment d'inertie (voir tableau de la page précédente) est

$$I = \tfrac{1}{3}mL^2$$

où m est la masse de la tige. Comme la tige est homogène, son centre de masse est situé en son centre géométrique, à une distance

$$h = \frac{L}{2}$$

du pivot. Par conséquent, la fréquence angulaire naturelle de l'oscillation est

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgh}{I}} = \sqrt{\frac{mg(L/2)}{\frac{1}{3}mL^2}} = \sqrt{\frac{3g}{2L}}$$

et la période est

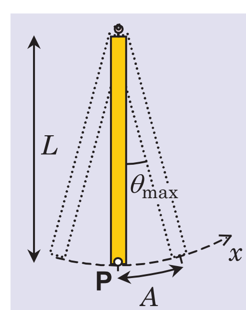
$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}$$

En **(a)**, nous voulons déterminer le temps que prend la tige pour passer d'une extrémité à l'autre de son oscillation. En une période T, le pendule oscille d'une extrémité à l'autre *et revient à son point de départ*. Ainsi, l'intervalle de temps que nous cherchons correspond à $T/2$:

Rappelons que, dans un problème sans valeurs numériques (comme c'est le cas ici), il est important de vérifier que la réponse finale est exprimée en fonction des paramètres de l'énoncé (et de constantes générales, s'il y a lieu). Ici, les paramètres de l'énoncé sont L et θ_{max}, et g est une constante générale.

$$\Delta t = \frac{T}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta t = \pi\sqrt{\frac{2L}{3g}}}$$

Dans le SI, L est en mètres et g est en mètres par seconde carrée : ainsi, le rapport L/g est en secondes carrées, et on obtient bien un temps en secondes lorsqu'on extrait la racine carrée.



En **(b)**, nous voulons déterminer la vitesse d'un point situé à l'extrémité inférieure de la tige (identifié par **P** sur le schéma ci-contre) lorsque la tige passe à la verticale. Comme il s'agit de la vitesse maximale du point en question, nous pouvons utiliser l'équation de la **section 1.1**, qui s'applique à tout MHS :

$$v_{max} = A\omega$$

On peut décrire le MHS du point **P** à l'aide d'un axe x courbe qui suit son mouvement. Le long de cet axe, l'amplitude du mouvement d'oscillation est

$$A = L\theta_{max}$$

(Cette équation découle directement de la définition d'un angle en radians.) Ainsi, la vitesse du point **P** au point le plus bas de l'oscillation est

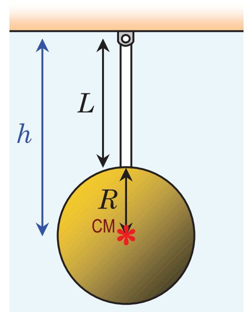
$$v_{max} = L\theta_{max}\omega = L\theta_{max}\sqrt{\frac{3g}{2L}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_{max} = \theta_{max}\sqrt{\frac{3gL}{2}}}$$

Attention : comme on a utilisé la définition d'un angle en radians pour obtenir l'équation ci-contre, il faudrait absolument exprimer θ_{max} en radians si l'on disposait de valeurs numériques.

Dans le SI, L est en mètres et g est en mètres par seconde carrée : ainsi, le produit gL est en mètres carrés par seconde carrée, et on obtient bien une vitesse en mètres par seconde lorsqu'on extrait la racine carrée. (Le paramètre θ_{max} est en radians, mais comme le radian n'est pas une véritable unité physique, il ne contribue pas aux unités de la réponse.)

Situation 2 : *Une sphère oscille au bout d'une tige.* Une sphère pleine de 10 cm de rayon est fixée au bout d'une tige rigide dont la masse est négligeable et dont la longueur est de 20 cm. On fixe l'autre bout de la tige à un pivot et on désire déterminer la période de l'oscillation.

Nous avons représenté le pendule composé sur le schéma ci-contre. Comme la tige rigide a une masse négligeable, elle ne contribue pas au moment d'inertie. Par rapport à un axe qui passe par son centre de masse, le moment d'inertie de la sphère pleine est



$$I_{CM} = \tfrac{2}{5}mR^2$$

où m est la masse de la sphère (et, par conséquent, du pendule). Le centre de masse de la sphère est à une distance h du pivot. Ainsi, d'après le théorème des axes parallèles, le moment d'inertie de la sphère par rapport au pivot est

$$I = mh^2 + I_{CM} = mh^2 + \tfrac{2}{5}mR^2 = m(h^2 + \tfrac{2}{5}R^2)$$

La fréquence angulaire du pendule est

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgh}{I}} = \sqrt{\frac{mgh}{m(h^2 + \frac{2}{5}R^2)}} = \sqrt{\frac{gh}{h^2 + \frac{2}{5}R^2}}$$

et la période est

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{h^2 + \frac{2}{5}R^2}{gh}}$$

Ici, $R = 10\text{ cm} = 0{,}1\text{ m}$, $L = 20\text{ cm} = 0{,}2\text{ m}$ et $h = L + R = 0{,}3\text{ m}$. Ainsi,

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{(0{,}3\text{ m})^2 + \frac{2}{5}(0{,}1\text{ m})^2}{(9{,}8\text{ m/s}^2)(0{,}3\text{ m})}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = 1{,}12\text{ s}}$$

***QI* 1** Quelle est la période d'un pendule simple de 30 cm de longueur ?

*Les réponses aux questions instantanées (**QI**) se trouvent dans la marge à la fin de l'exposé de la section.*

La démonstration de l'équation de la fréquence angulaire naturelle du pendule composé

Dans la **section 1.1 : Les oscillations**, nous avons vu que l'accélération et la position d'une particule animée d'un mouvement harmonique simple sont reliées entre elles par l'équation

$$a_x = -\omega^2 x$$

L'accélération obéit à l'équation ci-contre lorsque la particule subit une force qui a tendance à la ramener vers la position centrale de l'oscillation et dont le module est proportionnel à la distance qui sépare la particule de la position centrale.

Or, l'accélération est égale à la dérivée seconde par rapport au temps de la position :

$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}$$

Ainsi, on peut écrire

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega^2 x$$

ou encore

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$$

Une équation différentielle est une équation qui fait intervenir à la fois une variable et ses dérivées d'ordre 1 ou supérieur.

L'équation que nous venons d'obtenir est une *équation différentielle* qui caractérise tout paramètre x qui varie dans le temps de manière sinusoïdale. Le paramètre x peut représenter la position d'une particule, mais peut également correspondre à tout autre paramètre physique qui varie de manière sinusoïdale en fonction du temps, comme l'inclinaison θ d'un pendule ou la différence de potentiel ΔV aux bornes d'une source de courant alternatif. Si l'on peut démontrer qu'un paramètre x obéit à une équation de ce type, on peut conclure que le paramètre en question oscille en fonction du temps selon

$$x = x_{\max} \sin(\omega t + \phi)$$

Dans les **sections 1.1** et **1.2**, x représentait la position d'une particule : dans ce cas, on utilise le paramètre A plutôt que $x_{\max}$ pour représenter l'amplitude.

et que, par conséquent, la fréquence angulaire de son oscillation est ω.

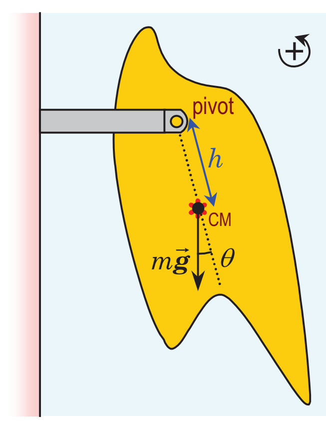
On peut vérifier aisément que l'équation $x = x_{\max} \sin(\omega t + \phi)$ est une solution de l'équation différentielle $\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2 + \omega^2 x = 0$, et ce, peu importe la valeur de $x_{\max}$ ou de ϕ. En effet, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x_{\max} \sin(\omega t + \phi) = \omega x_{\max} \cos(\omega t + \phi)$ et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \omega x_{\max} \cos(\omega t + \phi) = -\omega^2 x_{\max} \sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 x$.

Pour démontrer que l'inclinaison θ d'un pendule composé oscille en fonction du temps selon l'équation

$$\theta = \theta_{\max} \sin(\omega t + \phi)$$

avec une fréquence angulaire $\omega = \sqrt{mgh/I}$, nous allons prendre comme point de départ l'équation qui donne le moment de force résultant $\sum \tau$ qui s'exerce sur le pendule.

La force exercée par le pivot sur le corps ne génère pas de moment de force, car la distance entre son point d'application et l'axe (qui se trouve à la position du pivot) est nulle.



Le poids du corps s'applique au centre de masse, à une distance $r = h$ de l'axe. Le moment de force généré par le poids est

$$\tau = -rF \sin\theta = -h\,mg \sin\theta$$

Le signe négatif dans l'équation indique que le moment de force a tendance à faire tourner le pendule dans le sens contraire de la position angulaire : par exemple, lorsque la position angulaire θ est positive (comme sur le schéma ci-contre), le moment de force généré par le poids a tendance à faire pivoter le pendule dans le sens des θ négatifs.

Pour plus de détails, référez-vous à la **section 4.2 : Le moment de force et l'équilibre statique** du **tome A**.

Comme le moment de force généré par le poids est le seul à agir sur le corps, ce dernier subit un moment de force résultant

$$\sum \tau = -mgh \sin\theta$$

Supposons que l'amplitude de l'oscillation est petite : dans ce cas,

$$\sin\theta \approx \theta$$

(l'angle θ est exprimé en radians) et on peut écrire

$$\sum \tau = -mgh\theta$$

L'analogue en rotation de la deuxième loi de Newton est

$$\sum \tau = I\alpha$$

L'analogue de la deuxième loi de Newton en rotation a été présenté dans la **section 4.7 : La dynamique de rotation** du **tome A**.

Par définition, l'accélération angulaire α est égale à la dérivée par rapport au temps de la vitesse angulaire ω, qui est elle-même égale à la dérivée par rapport au temps de la position angulaire θ. Ainsi,

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

Le paramètre ω dans l'équation ci-contre représente la vitesse angulaire du corps, et non la fréquence angulaire de l'oscillation !

En combinant les trois équations centrées qui précèdent, nous pouvons écrire

$$-mgh\theta = I\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} \qquad \Rightarrow \qquad -\frac{mgh}{I}\theta = \frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

ou encore

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{mgh}{I}\theta = 0$$

Comme cette équation est de même forme que l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$$

nous pouvons conclure que l'angle d'inclinaison θ oscille en fonction du temps selon l'équation

$$\theta = \theta_{\max}\sin(\omega t + \phi)$$

et que la fréquence angulaire de l'oscillation est donnée par

$$\omega^2 = \frac{mgh}{I} \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{mgh}{I}}$$

ce que nous voulions démontrer.

Réponse à la question instantanée

***QI* 1** $T = 1{,}10$ s

GLOSSAIRE

pendule composé : pendule constitué d'un corps qui ne peut pas être considéré comme une particule.

théorème des axes parallèles : équation qui permet de déterminer le moment d'inertie d'un corps par rapport à un axe quelconque à partir de son moment d'inertie par rapport à un axe parallèle passant par son centre de masse.

QUESTIONS

Q1. Vrai ou faux ? Un pendule composé est constitué d'au moins deux corps qui oscillent de manière différente.

Q2. Pourquoi n'est-il pas pratique d'utiliser l'équation $x(t)$ du MHS pour décrire l'oscillation d'un pendule composé ?

Q3. Vrai ou faux ? Pour calculer la fréquence angulaire naturelle d'oscillation d'un pendule composé, on peut supposer que toute sa masse est concentrée en son centre de masse et utiliser l'équation de la fréquence angulaire naturelle du pendule simple.

Q4. Le moment d'inertie est une mesure de la tendance d'un corps à s'opposer ________________________________.
Dans le SI, il s'exprime en ________________________________.

Q5. Vrai ou faux ? Pour un corps de masse donnée, plus les particules qui composent le corps sont situées, en moyenne, près de l'axe, plus le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe est petit.

Q6. Pourquoi la force exercée par le pivot qui soutient un pendule composé n'exerce-t-elle pas de moment de force ? Quelle est la force qui génère un moment de force sur le pendule ?

DÉMONSTRATIONS

D1. Montrez que, en appliquant l'équation de la fréquence angulaire naturelle d'un pendule composé, $\omega_0 = \sqrt{mgh/I}$, à un pendule simple, on retrouve l'équation de la fréquence angulaire naturelle du pendule simple, $\omega_0 = \sqrt{g/L}$.

D2. En appliquant l'analogue en rotation de la deuxième loi de Newton,

$$\sum \tau = I\alpha$$

à un pendule composé, obtenez une équation de même forme que l'équation différentielle qui caractérise une oscillation, et déduisez-en l'équation de la fréquence angulaire naturelle d'un pendule composé,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgh}{I}}$$

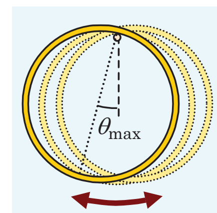
EXERCICES

Dans les exercices, on suppose que les corps sont homogènes et que l'amplitude d'oscillation des pendules ne dépasse jamais 15°. Vous pouvez utiliser au besoin les moments d'inertie du tableau ci-dessous.

Corps homogène de masse m	Moment d'inertie
Cylindre plein de rayon R tournant autour de son axe de symétrie	$\frac{1}{2}mR^2$
Sphère pleine de rayon R tournant autour d'un axe passant par son centre	$\frac{2}{5}mR^2$
Coquille sphérique mince de rayon R tournant autour d'un axe passant par son centre	$\frac{2}{3}mR^2$
Tige mince de longueur L tournant autour d'un axe perpendiculaire à elle-même passant par son centre	$\frac{1}{12}mL^2$
Tige mince de longueur L tournant autour d'un axe perpendiculaire à elle-même passant par une extrémité	$\frac{1}{3}mL^2$

RÉCHAUFFEMENT

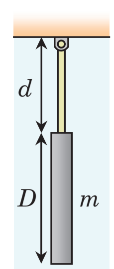
1.3.1 ***Un cerceau suspendu au bout du doigt.*** Béatrice suspend un cerceau de 45 cm de rayon au bout de son doigt et lui donne une poussée afin de le faire osciller selon son plan (schéma ci-contre). La masse du cerceau est de 0,6 kg et son inclinaison maximale par rapport à sa position d'équilibre (θ_{max}) est de 10°. **(a)** Quel est le moment d'inertie du cerceau par rapport à l'axe passant par le doigt de Béatrice ? **(b)** Quelle est la période de l'oscillation ? **(c)** Quelle est la distance parcourue par le point du cerceau le plus éloigné du doigt de Béatrice pendant un cycle complet d'oscillation ? **(d)** Quel est le module maximal de la vitesse du point du cerceau le plus éloigné du doigt de Béatrice ?



SÉRIE PRINCIPALE

1.3.2 ***Un cerceau suspendu au bout du doigt, prise 2.*** Béatrice reprend l'expérience de l'**exercice 1.3.1**, mais avec un autre cerceau : ce dernier prend 0,35 s pour passer d'une des extrémités de son oscillation à sa position centrale. Quel est son rayon ?

1.3.3 ***Une tige lourde oscillant au bout d'une tige légère.*** Une tige en plomb de masse m et de longueur D est suspendue au plafond par une mince tige en bois de longueur d dont la masse est négligeable (schéma ci-contre). **(a)** Montrez que la fréquence angulaire naturelle d'oscillation est



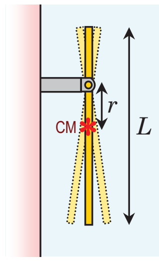
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{6g(2d + D)}{3(2d + D)^2 + D^2}}$$

(b) Dans la limite où la tige lourde est très courte ($D << d$), montrez que l'on obtient l'équation de la fréquence angulaire naturelle d'un pendule simple. **(c)** Dans la limite où la tige légère est très courte ($d << D$), montrez que l'on obtient $\omega_0 = \sqrt{3g/(2D)}$, ce qui correspond à la fréquence angulaire naturelle d'une tige oscillant autour de son extrémité supérieure (comme dans la **situation 1** de la présente section).

SÉRIE SUPPLÉMENTAIRE

1.3.4 ***Une tige lourde oscillant au bout d'une tige légère, prise 2.*** Dans le montage de l'**exercice 1.3.3**, les tiges de bois et de plomb ont toutes les deux une longueur de 70 cm. **(a)** Quelle est la période d'oscillation ? **(b)** Quelle longueur de la tige de plomb doit-on scier pour que la période soit de 2 s ? **(c)** Si la tige de plomb conserve sa longueur de 70 cm et que l'on préfère raccourcir la tige de bois, quelle longueur doit-on scier pour obtenir une période de 2 s ?

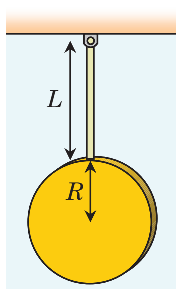
1.3.5 ***L'oscillation d'une tige autour d'un point quelconque.*** Une tige de longueur L peut osciller autour d'un axe qui passe par un point situé à une distance r de son centre (schéma ci-contre). **(a)** Montrez que la fréquence angulaire naturelle de l'oscillation est



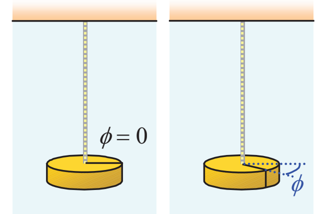
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{12gr}{12r^2 + L^2}}$$

(b) Déterminez la fréquence angulaire naturelle lorsque r prend sa valeur maximale ($r = L/2$). **(c)** Déterminez la fréquence angulaire naturelle pour $r = 0$ et expliquez la signification du résultat. **(d)** Pour quelle valeur du rapport r/L la fréquence angulaire naturelle est-elle maximale ? (*Indice* : utilisez le calcul différentiel.) **(e)** Quelle est la fréquence angulaire naturelle pour le rapport r/L trouvé en (d) ?

1.3.6 ***Une horloge imprécise.*** Albert a fabriqué le pendule d'une horloge grand-père (schéma ci-contre) en utilisant une mince tige en bois et un disque en laiton (masse de 0,825 kg, rayon de 10 cm). À l'aide de la théorie du pendule composé, il a calculé la longueur de la tige pour avoir une période d'oscillation d'exactement 1 s, en *supposant que la masse de la tige est négligeable*. **(a)** Quelle est la longueur L de la tige ? **(b)** En réalité, la masse de la tige est de 55 g ; dites si l'horloge d'Albert « avance » ou « recule » par rapport à une horloge idéale, et de combien elle est désynchronisée au bout d'une heure.



1.3.7 ***Le pendule de torsion.*** Lorsqu'on suspend un corps par un fil et qu'on le fait tourner selon l'axe du fil d'un angle ϕ (schéma ci-contre), on « tord » le fil. Lorsqu'on lâche le corps, le fil se « détord » en exerçant sur le corps un moment de force



Vues en perspective

$$\tau = -\kappa\phi$$

où κ (la lettre grecque kappa) est la *constante de torsion* du fil : le signe négatif signifie que le moment de force a tendance à ramener le corps vers son orientation d'origine, $\phi = 0$, pour laquelle le fil n'est pas tordu. Sous l'effet de ce moment de force, l'angle ϕ oscille en fonction du temps de part et d'autre de la position d'équilibre $\phi = 0$. **(a)** Montrez que la fréquence angulaire naturelle de l'oscillation est

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$$

où I est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe confondu avec le fil. **(b)** Si la constante de torsion est de 0,0015 N·m/rad et que le corps est un disque homogène (comme sur le schéma ci-dessus) dont la masse est de 0,6 kg et le rayon est de 8 cm, calculez le nombre d'oscillations par minute.

1.3.8 ***La détermination du moment d'inertie d'un corps à l'aide d'un pendule de torsion.*** Au bout d'un fil, on suspend une sphère dont le moment d'inertie (par rapport à un axe passant par son centre) est de 1 kg·m², on la fait osciller comme un pendule de torsion (voir **exercice 1.3.7**), et on observe que la période des oscillations est de 32,3 s. On remplace la sphère par un corps de forme irrégulière, on le fait osciller comme un pendule de torsion, et on observe que la période des oscillations est de 17,7 s : quel est le moment d'inertie du corps par rapport à l'axe vertical passant par son point d'attache ?