1.2

La dynamique du mouvement harmonique simple

Après l'étude de cette section, le lecteur pourra démontrer qu'un objet oscille selon un MHS en considérant les forces qui agissent sur lui, et calculer la fréquence angulaire naturelle de l'oscillation.

Aperçu

Dans la **section 1.1 : Les oscillations**, nous avons vu que l'accélération d'un objet animé d'un mouvement harmonique simple (MHS) est reliée à sa position par l'équation

$$a_x = -\omega^2 x$$

En combinant cette équation avec la deuxième loi de Newton, $\sum F_x = ma_x$, nous obtenons

$$\sum F_x = -m\omega^2 x$$

Le facteur $m\omega^2$ est une constante positive. Ainsi, tout objet qui subit une force résultante égale à *moins* une constante positive fois sa position oscille selon un MHS. Comme $x = 0$ correspond à la position centrale de l'oscillation (position d'équilibre), cela revient à dire que l'objet subit une force résultante qui a tendance à le ramener vers la position d'équilibre et dont le module est proportionnel à la distance qui le sépare du point d'équilibre.

Dans un système bloc-ressort qui oscille à l'horizontale sur une surface sans frottement, la force résultante qui agit sur le bloc correspond à la force du ressort. D'après la loi de Hooke,

$$\sum F_x = -kx$$

Ainsi, le bloc possède un MHS pour lequel $m\omega^2 = k$.

La **fréquence angulaire naturelle** (symbole : ω_0) est la fréquence angulaire d'un système oscillant auquel on a donné une « poussée » et qu'on a laissé aller. Pour un système bloc-ressort en oscillation horizontale, $m{\omega_0}^2 = k$, d'où

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Fréquence angulaire naturelle d'un système bloc-ressort

La fréquence angulaire naturelle est indépendante de l'amplitude, une propriété que l'on nomme **isochronisme**.

Lorsqu'un pendule simple oscille avec une amplitude qui est petite par rapport à la longueur de la corde, la bille subit une force résultante

$$\sum F_x = -\frac{mg}{L}x$$

où m est la masse de la bille et L est la longueur de la corde. Ainsi, la bille possède un MHS pour lequel $m\omega^2 = mg/L$, ou encore $\omega^2 = g/L$. La fréquence angulaire naturelle du pendule est

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

Fréquence angulaire naturelle d'un pendule simple (faible amplitude)

La fréquence angulaire naturelle dépend de la longueur L de la corde et du module g du champ gravitationnel, mais *ne dépend pas* de la masse du pendule.

En présence de forces d'amortissement (frottement, résistance de l'air), l'oscillation d'un système est *amortie* (son amplitude diminue avec le temps), à moins que l'on exerce sur lui une force externe oscillante (on « tire » et on « pousse » sur le système de manière périodique) afin de créer une oscillation *forcée*. Si l'on maintient l'amplitude de la force externe constante et que l'on fait varier sa fréquence, on observe que l'amplitude de l'oscillation forcée est maximale pour une certaine fréquence : le système est alors en **résonance**. Lorsque les forces d'amortissement sont relativement faibles, la résonance se produit lorsque la fréquence de la force externe est égale à la fréquence naturelle d'oscillation du système.

Exposé

Dans la **section 1.1 : Les oscillations**, nous avons vu comment décrire le mouvement harmonique simple (MHS) : nous avons fait de la cinématique. Dans cette section, nous allons analyser le MHS en utilisant la deuxième loi du mouvement de Newton, $\sum \vec{F} = m\vec{a}$: nous allons faire de la dynamique. Nous allons commencer par démontrer que les oscillations d'un système bloc-ressort et d'un pendule simple de faible amplitude sont des MHS. Puis, nous allons montrer qu'il est possible de *prévoir* la fréquence angulaire d'un MHS à partir des caractéristiques physiques du système telles que la masse, la constante de rappel du ressort ou la longueur de la corde du pendule.

La définition dynamique du MHS

Considérons un objet de masse m animé d'un MHS. Dans la **section 1.1 : Les oscillations**, nous avons vu que l'accélération de l'objet est reliée à sa position par l'équation

$$a_x = -\omega^2 x$$

En combinant cette équation avec la deuxième loi de Newton,

$$\sum F_x = ma_x$$

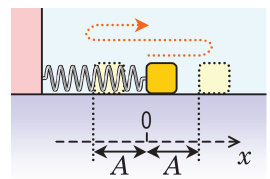
nous obtenons

$$\sum F_x = -m\omega^2 x$$

Comme la masse est toujours positive, le facteur $m\omega^2$ est une constante positive.

Cette équation constitue une définition dynamique du MHS : tout objet qui subit une force résultante égale à *moins* une constante positive fois sa position oscille selon un MHS.

Dans la **section 1.1**, nous avons défini l'axe x de manière à ce que l'origine $x = 0$ corresponde à la position centrale de l'oscillation, c'est-à-dire la position d'équilibre (schéma ci-contre). Par conséquent, il est possible d'exprimer la définition dynamique du MHS de la manière suivante :



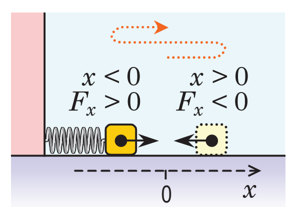
Un objet oscille selon un MHS lorsqu'il subit une force résultante qui a tendance à le ramener vers la position d'équilibre et dont le module est proportionnel à la distance qui le sépare du point d'équilibre.

Dans les deux situations qui suivent, nous allons utiliser la définition dynamique du MHS afin de montrer que l'oscillation horizontale d'un système bloc-ressort et l'oscillation d'un pendule simple de faible amplitude sont des MHS.

Situation 1 : *L'oscillation horizontale d'un système bloc-ressort*. On désire prouver, à l'aide de la définition dynamique du MHS, que l'oscillation horizontale d'un système bloc-ressort sans frottement est un MHS.

D'après la loi de Hooke, le module de la force exercée par un ressort idéal est $F = k|e|$, où e est l'étirement du ressort par rapport à sa longueur naturelle. Ici, l'origine de l'axe x coïncide avec la position pour laquelle $e = 0$, ce qui permet d'obtenir l'équation ci-contre ; il y a un signe négatif car la force est orientée dans le sens *négatif* lorsque x est *positif*, et vice versa.

La situation est représentée sur le schéma ci-contre. Comme nous l'avons vu au **tome A**, dans la **section 3.2 : L'énergie potentielle élastique d'un ressort idéal**, la composante selon x de la force exercée par le ressort sur le bloc est donnée par la loi de Hooke :



$$F_x = -kx$$

Selon la direction verticale, la force normale contrebalance le poids. Comme il n'y a pas de frottement, la force résultante qui agit sur le bloc correspond à la force du ressort :

$$\sum F_x = -kx$$

Dans la **section 1.6 : L'oscillation verticale d'un système bloc-ressort**, nous verrons qu'un bloc attaché à un ressort idéal vertical oscille également selon un MHS, et ce, malgré le fait que la force résultante qui agit sur le bloc soit égale à la somme de son poids et de la force exercée par le ressort.

Cette équation est conforme à la définition dynamique du MHS,

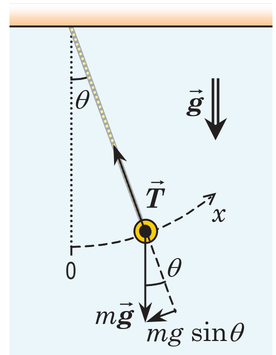
$$\sum F_x = -m\omega^2 x$$

Cela constitue la preuve qu'un système bloc-ressort sans frottement qui oscille à l'horizontale est un MHS. Dans cette situation, la constante positive $m\omega^2$ est égale à k, la constante de rappel du ressort.

Situation 2 : *L'oscillation de faible amplitude d'un pendule simple*. On désire prouver, à l'aide de la définition dynamique du MHS, qu'un pendule simple (une bille accrochée à une corde de masse négligeable) oscille selon un MHS lorsque l'amplitude de l'oscillation est petite par rapport à la longueur de la corde.

Dans la **section 1.1**, nous avons mentionné que l'oscillation d'un pendule simple peut être considérée comme un MHS, pourvu que son amplitude demeure faible (en pratique, il ne faut pas que l'inclinaison de la corde par rapport à la verticale dépasse 15°). La définition dynamique du MHS va nous permettre de comprendre pourquoi.

Sur le schéma ci-contre, nous avons représenté un pendule à un instant quelconque de son oscillation. Afin de décrire l'oscillation de la bille, nous avons défini un axe x courbe qui suit la trajectoire de la bille et dont l'origine correspond à la position d'équilibre (le point le plus bas de l'oscillation).



La bille subit deux forces : son poids orienté vers le bas et la tension dans la corde. Selon la direction de l'axe x, la seule force que la bille subit est la composante de son poids. Ainsi,

$$\sum F_x = -mg\sin\theta$$

où m est la masse de la bille : il faut mettre un signe négatif, car la composante est dans le sens contraire de l'axe. Or, par la définition de l'angle θ en radians,

Pour plus de détails sur la définition du radian, consultez la **sous-section M4.1 : Les angles** de l'annexe mathématique.

$$\theta = \frac{x}{L}$$

où L est la longueur de la corde. Ainsi,

$$\sum F_x = -mg\sin\left(\frac{x}{L}\right)$$

Lorsque l'amplitude est petite par rapport à la longueur de la corde, le rapport x/L est beaucoup plus petit que 1 :

$$\frac{x}{L} << 1$$

Dans ce cas,

La démonstration que le sinus d'un petit angle est approximativement égal à l'angle lui-même, exprimé en radians, se trouve dans la **sous-section M6.2 : Les approximations du petit angle** de l'annexe mathématique.

$$\sin\left(\frac{x}{L}\right) \approx \frac{x}{L}$$

(car l'argument du sinus est en radians) et nous obtenons

$$\sum F_x = -\frac{mg}{L}x$$

Comme cette équation est conforme à la définition dynamique du MHS,

$$\sum F_x = -m\omega^2 x$$

nous venons de *prouver* que l'oscillation d'un pendule est un MHS pour lequel

$$m\omega^2 = \frac{mg}{L}$$

La fréquence angulaire naturelle

Nous étudierons les oscillations forcées dans la **section 1.7 : Les oscillations amorties et forcées.**

Il est possible de *forcer* un système bloc-ressort ou un pendule à osciller en lui faisant subir une force externe oscillante : dans ce cas, la fréquence angulaire correspond à la fréquence angulaire de la force externe. En revanche, lorsque le système bloc-ressort ou le pendule oscille *de lui-même* selon un MHS, sa fréquence angulaire possède une valeur bien déterminée que l'on nomme **fréquence angulaire naturelle** (symbole : ω_0, la lettre grecque oméga suivie de l'indice zéro). La fréquence angulaire naturelle est la fréquence angulaire que le système acquiert lorsqu'on l'éloigne de sa position d'équilibre et qu'on le lâche (ou qu'on lui donne une « poussée » et qu'on le laisse aller).

Dans la **situation 1**, nous avons vu que, pour un système bloc-ressort sans frottement, $m\omega^2 = k$, ou encore

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

Par conséquent, la fréquence angulaire naturelle est

Dans la **section 1.6**, nous verrons que l'équation ci-contre s'applique également à l'oscillation verticale d'un système bloc-ressort. C'est pour cela qu'il n'est pas nécessaire de préciser que l'oscillation est horizontale dans le titre de l'équation.

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

Fréquence angulaire naturelle d'un système bloc-ressort

où k est la constante de rappel du ressort, et m est la masse du bloc.

Vérifions que cette équation est cohérente du point de vue des unités : dans le SI, la constante de rappel k s'exprime en newtons par mètre (N/m). Ainsi, les unités de $\sqrt{k/m}$ sont

$$\sqrt{\frac{\text{N/m}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{(\text{kg}\cdot\text{m/s}^2)/\text{m}}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{\text{kg/s}^2}{\text{kg}}} = \sqrt{\frac{1}{\text{s}^2}} = \frac{1}{\text{s}}$$

Comme le radian n'est pas une véritable unité physique, cela est conforme au fait que la fréquence angulaire s'exprime en radians par seconde.

Il est intéressant de remarquer que la fréquence angulaire naturelle *ne dépend pas* de l'amplitude. Si l'on dispose de deux systèmes bloc-ressort identiques, que l'on donne un étirement initial deux fois plus grand au ressort du système **A** qu'à celui du système **B** et qu'on lâche les blocs, le bloc **A** oscille avec une amplitude deux fois plus grande que le bloc **B**, *mais sa vitesse moyenne est deux fois plus grande*, ce qui fait en sorte que les deux blocs prennent le même temps pour faire un aller-retour. On nomme **isochronisme** la propriété d'une oscillation d'avoir une période indépendante de son amplitude. (Si la période T est indépendante de l'amplitude, la fréquence f et la fréquence angulaire ω le sont également.)

Les systèmes bloc-ressort ne sont pas les seuls à faire preuve d'isochronisme ; en général, c'est le cas de tout système mécanique qui oscille naturellement selon un MHS. C'est Galilée qui, vers 1600, a découvert l'isochronisme alors qu'il observait l'oscillation d'un lustre dans une église pendant la messe : tant que l'angle d'oscillation n'est pas trop grand, un lustre (comme tout pendule) oscille avec une période indépendante de l'angle maximal de l'oscillation.

À la **situation 2**, nous avons vu que, pour un pendule simple de faible amplitude,

$$m\omega^2 = \frac{mg}{L} \qquad \Rightarrow \qquad \omega^2 = \frac{g}{L}$$

Par conséquent, la fréquence angulaire naturelle d'un pendule simple de faible amplitude est

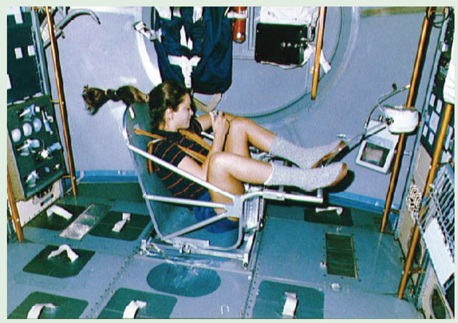
$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}}$$

Fréquence angulaire naturelle d'un pendule simple (faible amplitude)

où g est le module du champ gravitationnel et L est la longueur de la corde. Il est intéressant de remarquer que la fréquence angulaire ne dépend pas de la masse de la bille. En effet, c'est la force gravitationnelle qui est responsable de l'oscillation du pendule. Si la masse de la bille est deux fois plus grande, elle subit une force gravitationnelle deux fois plus grande, mais son inertie est également deux fois plus grande : par conséquent, le résultat est le même. (C'est pour la même raison que l'accélération de chute libre est indépendante de la masse de l'objet qui tombe.)

Pour terminer cette section, nous allons examiner deux situations qui illustrent l'utilité du concept de fréquence angulaire naturelle.

Situation 3 : ***Un pèse-astronaute.*** Une navette spatiale en orbite est en chute libre : la gravité *apparente* à l'intérieur de la navette est nulle. Par conséquent, les balances ordinaires sont inopérantes. Pour suivre l'évolution de leur masse pendant la mission, les astronautes s'assoient dans un dispositif qui contient un ressort dont la constante de rappel est connue, se donnent une poussée, se laissent osciller et mesurent la période naturelle d'oscillation (photo ci-contre). Assise dans un dispositif dont la constante de rappel est de 500 N/m, une astronaute prend 2,31 s pour effectuer une oscillation complète : on désire déterminer sa masse, sachant que le dispositif lui-même a une masse de 10 kg.



TAMARA E. JERNIGAN, MISSION STS-040, NASA

La période naturelle d'oscillation est $T_0 = 2{,}31\ \text{s}$, d'où

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{(2{,}31\ \text{s})} = 2{,}720\ \text{rad/s}$$

Ainsi,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$m = \frac{k}{\omega_0^2} = \frac{(500\ \text{N/m})}{(2{,}720\ \text{rad/s})^2} = 67{,}6\ \text{kg}$$

Ici, m correspond, bien sûr, à la masse totale de l'astronaute et du dispositif. Comme la masse de ce dernier est de $10\ \text{kg}$, celle de l'astronaute est de $\boxed{57{,}6\ \text{kg}}$.

C'est parce que la période ne dépend pas de l'amplitude (oscillation isochrone) que le pèse-astronaute constitue une manière simple et fiable de déterminer la masse de l'astronaute.

Situation 4 : ***Un pendule pour compter les secondes.*** On désire déterminer la longueur de la corde d'un pendule pour que la période naturelle d'oscillation (près de la surface de la Terre) soit de 1 s. (On suppose que l'amplitude d'oscillation est petite.)

Nous voulons obtenir une période naturelle $T_0 = 1\ \text{s}$, ce qui correspond à une fréquence angulaire naturelle

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi}{(1\ \text{s})} = 6{,}283\ \text{rad/s}$$

Or,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}} \qquad \Rightarrow \qquad {\omega_0}^2 = \frac{g}{L} \qquad \Rightarrow \qquad L = \frac{g}{{\omega_0}^2}$$

Près de la surface de la Terre, $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$, d'où

$$L = \frac{(9{,}8\ \text{m/s}^2)}{(6{,}283\ \text{rad/s})^2} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{L = 0{,}248\ \text{m}}$$

Comme nous l'avons mentionné dans la **section 1.1 : Les oscillations,** l'oscillation d'un pendule simple n'est pas un MHS parfait : elle correspond à un MHS uniquement dans la limite où l'angle maximal que fait la corde avec la verticale est beaucoup plus petit que 1 radian (1 rad = 57,3°).

Considérons, par exemple, le pendule de la **situation 4**, dont la longueur est $L = 0{,}248$ m : d'après l'équation $\omega_0 = \sqrt{g/L}$, sa période naturelle est de 1 s. Si on déplace le pendule d'un angle θ_{max}, qu'on le lâche et qu'on mesure la période d'oscillation avec précision, on obtient les résultats du tableau ci-contre.

Période d'un pendule simple pour différentes valeurs de l'amplitude d'oscillation (la période pour une très petite oscillation est de 1 s)

θ_{max}	T (s)
5°	1,0005
10°	1,002
15°	1,004
20°	1,008
30°	1,02
45°	1,04
60°	1,07

En analysant l'oscillation d'un pendule à l'aide de techniques qui dépassent le niveau de cet ouvrage, il est possible d'obtenir une série qui permet de calculer la période naturelle d'un pendule simple. Les premiers termes de la série sont

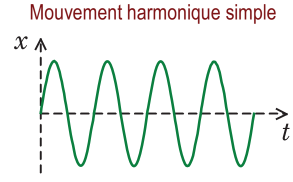
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{g/L}}\left(1 + \tfrac{1}{4}\sin^2\left(\frac{\theta_{\text{max}}}{2}\right) + \tfrac{9}{64}\sin^4\left(\frac{\theta_{\text{max}}}{2}\right) + \ldots\right)$$

Dans les limites usuelles de précision des calculs (trois chiffres significatifs), nous pouvons considérer que l'oscillation est un MHS et utiliser l'équation $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ tant que l'amplitude de l'oscillation ne dépasse pas 15°.

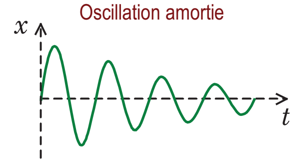
Fréquence naturelle et résonance

Par définition, l'amplitude d'un MHS est constante (schéma ci-contre, en haut). Ainsi, pour pouvoir appliquer la théorie que nous venons de présenter, il faut supposer que le système bloc-ressort ou le pendule ne subit aucune force d'*amortissement* (par exemple, le frottement contre la surface d'appui ou la résistance de l'air). Lorsqu'on fait osciller un vrai système bloc-ressort ou un vrai pendule, on observe que l'amplitude diminue graduellement : on est en présence d'une *oscillation amortie* (schéma ci-contre, en bas). Le rythme auquel l'amplitude décroît dépend de la force d'amortissement : plus cette dernière est grande, plus l'amplitude décroît rapidement.

Mouvement harmonique simple



Oscillation amortie

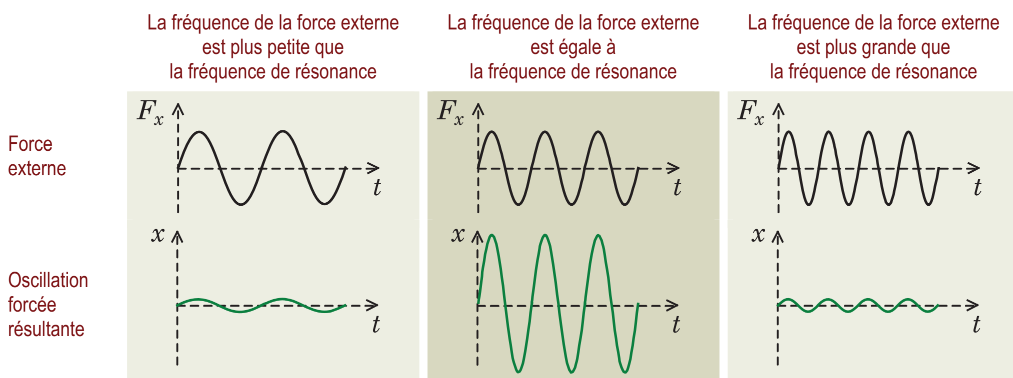


Il est possible de faire osciller un système amorti selon un MHS, mais seulement si on contrebalance l'effet de la force d'amortissement à l'aide d'une force externe qui oscille elle-même en fonction du temps (on « tire » et on « pousse » sur le système de manière périodique) : dans ce cas, on est en présence d'une *oscillation forcée*.

Dans la **section 1.7 : Les oscillations amorties et forcées**, nous analyserons ces phénomènes de manière plus détaillée.

La notion de fréquence naturelle, que nous avons introduite dans la présente section, est importante pour comprendre les oscillations forcées. Lorsqu'on donne une poussée à un système oscillant et qu'on le laisse aller, il oscille à sa fréquence naturelle. En revanche, lorsqu'on applique une force externe suffisamment grande à un système oscillant, on parvient à le faire osciller *à la fréquence de la force externe* (schémas ci-dessous). Si l'on maintient l'amplitude de la force externe constante et qu'on fait varier sa fréquence, on observe que l'amplitude de l'oscillation forcée est maximale pour une certaine fréquence : le système est alors en **résonance**. Lorsque les forces d'amortissement sont relativement faibles, la fréquence de résonance est voisine de la fréquence naturelle d'oscillation du système.

Si la fréquence angulaire naturelle d'un système oscillant est ω_0, sa fréquence naturelle est $f_0 = \omega_0/(2\pi)$.



En général, dans une oscillation forcée, la position x de l'objet n'oscille pas en phase avec la force externe F_x (les deux paramètres ne passent pas par leurs valeurs maximales en même temps). Nous *n'avons pas* représenté ce phénomène sur les schémas ci-contre.

Il est très facile d'observer le phénomène de résonance lorsqu'on se balance sur une balançoire (photo ci-contre). Même si on ne touche pas au sol, il est possible de créer et d'entretenir l'oscillation en levant les jambes et en les rabaissant de manière périodique (cela transfère de l'énergie à l'oscillation selon un processus complexe qui fait intervenir la modification de la position du centre de masse du corps). Si on balance les jambes très lentement ou très rapidement, cela n'a presque aucun effet sur l'oscillation. En revanche, si on lève les jambes et qu'on les rabaisse à la fréquence naturelle d'oscillation de la balançoire (que l'on peut calculer de manière approximative en la considérant comme un pendule simple), on observe que l'amplitude de l'oscillation augmente graduellement. L'amplitude finale est atteinte lorsque la puissance qu'on fournit au système en balançant les jambes est compensée par la puissance perdue en raison des forces d'amortissement (résistance de l'air et frottement aux points d'attache entre la balançoire et le cadre).


DREAMSTIME

Dans le **tome B**, à la **section 5.10 : Les circuits *RLC* alimentés par une tension alternative**, nous avons étudié la résonance dans un circuit composé d'un résisteur, d'un inducteur et d'un condensateur. Dans ce cas, c'est l'amplitude du *courant* dans le circuit qui est maximale lorsque la fréquence d'oscillation de l'électromotance de la source correspond à la fréquence de résonance du circuit.

Un système oscillant composé de plusieurs particules (comme une corde de guitare ou l'air dans une flûte) possède *plusieurs* fréquences de résonance. Nous étudierons ce phénomène, qui est à la base du mode de fonctionnement de la plupart des instruments de musique, dans la **section 1.12 : Les ondes stationnaires**. Dans certains cas, l'amplitude de l'oscillation d'un système en résonance peut devenir si grande que l'intégrité de ce dernier se trouve menacée. En 1940, un pont suspendu de 850 m de longueur traversant le détroit de Tacoma (État de Washington, États-Unis) s'est écroulé : le vent créait des remous autour du tablier du pont dont la fréquence était voisine d'une de ses fréquences de résonance, ce qui a contribué à la catastrophe. Nous en reparlerons dans la **section 1.12**.

GLOSSAIRE

fréquence angulaire naturelle : (symbole : ω_0) fréquence angulaire d'un système oscillant isochrone (dont la période est indépendante de l'amplitude) auquel on a donné une « poussée » et qu'on a laissé aller.

isochronisme : propriété d'une oscillation d'avoir une période indépendante de son amplitude ; un système bloc-ressort est isochrone ; dans la limite où l'amplitude d'oscillation demeure petite, un pendule est isochrone.

résonance : tendance que possède un système à osciller avec une amplitude maximale lorsqu'il est soumis à une force externe qui oscille avec une certaine fréquence (la fréquence de résonance) : lorsque les forces d'amortissement qui agissent sur le système sont relativement faibles, la fréquence de résonance est égale à la fréquence naturelle du système.

QUESTIONS

Q1. L'oscillation d'un objet est un MHS lorsqu'il subit une force résultante qui a tendance à ____________________ et dont le module est proportionnel à ________________.

Q2. Considérez un objet animé d'un MHS selon x autour de l'origine $x = 0$. Lorsque sa position x est positive, la force résultante qu'il subit est orientée dans le sens ___________.

Q3. D'après la loi de _________, le module de la force exercée par un ressort idéal est égal à ___, la constante de _________ du ressort multipliée par e, ____________ du ressort par rapport à sa ________________.

Q4. Vrai ou faux ? Si l'on augmente la masse de la bille d'un pendule sans changer la longueur de la corde, le pendule effectuera plus d'oscillations par seconde que s'il oscille à sa fréquence naturelle.

Q5. Comment un astronaute dans une navette spatiale en orbite peut-il déterminer sa masse ?

Q6. L'oscillation d'un pendule simple correspond-elle toujours à un MHS ? Sinon, quelle condition doit être respectée ?

Q7. En utilisant le concept de résonance, expliquez ce qu'il faut faire pour se balancer sur une balançoire avec la plus grande amplitude possible.

DÉMONSTRATION

D1. Considérez un axe x qui suit la trajectoire de la bille d'un pendule et dont l'origine coïncide avec la position d'équilibre de la bille. Démontrez que la composante selon x de la force résultante qui agit sur la bille est donnée par

$$\sum F_x = -\frac{mg}{L}x$$

où m est la masse de la bille, L est la longueur de la corde et g est le module du champ gravitationnel. Indiquez clairement l'étape de la démonstration qui n'est vraie que si l'angle que fait la corde du pendule par rapport à la verticale est beaucoup plus petit que 1 radian.

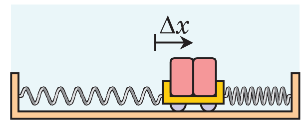
EXERCICES

○ Exercice dont la solution ne requiert ni calculatrice ni algèbre complexe.

Dans les exercices, à moins d'avis contraire, on suppose que les pendules oscillent près de la surface de la Terre ($g = 9{,}8$ N/kg).

RÉCHAUFFEMENT

○ **1.2.1** ***La période d'un système bloc-ressort.*** On place un chariot qui contient deux briques entre deux ressorts (schéma ci-contre), on déplace le chariot de Δx par rapport à sa position d'équilibre, puis on le lâche (vitesse initiale nulle). On reprend l'expérience en faisant certaines modifications. Par rapport à la situation initiale, quel sera l'effet des modifications suivants sur la période d'oscillation (augmentation, diminution ou aucun changement) ? **(a)** On augmente Δx. **(b)** On donne une poussée au chariot au moment où on le lâche. **(c)** On enlève une des briques du chariot. **(d)** On remplace les ressorts par d'autres ressorts dont les constantes de rappel sont plus grandes.



○ **1.2.2** ***Deux pendules.*** La période du pendule **A** est de 8 s. Le pendule **B** est quatre fois plus long et sa masse est quatre fois plus petite : quelle est sa période ?

○ **1.2.3** ***Deux balançoires.*** Xavier se balance avec une période de 3 s (photo ci-dessous). À côté, Zoé se balance sur une balançoire identique, mais son amplitude est deux fois plus petite. À un certain moment, ils sont côte à côte au point le plus bas de l'oscillation, et se déplacent dans le même sens. Au bout de combien de temps seront-ils de nouveau côte à côte ?

ISTOCKPHOTO

1.2.4 ***L'oscillation d'un système bloc-ressort.*** Une masse de 4 kg oscille avec une amplitude de 20 cm à l'extrémité d'un ressort dont la constante de rappel est de 200 N/m. Déterminez **(a)** la fréquence angulaire, **(b)** la fréquence et **(c)** la période. **(d)** Que deviennent les réponses des parties (a), (b) et (c) si l'amplitude est de 40 cm ?

1.2.5 ***Trouvez la masse.*** À $t = 0$, un bloc qui oscille à l'extrémité d'un ressort dont la constante de rappel est de 50 N/m passe à la position centrale de l'oscillation en se déplaçant dans le sens négatif de l'axe. À $t = 2$ s, il repasse pour la première fois à la position centrale de l'oscillation en se déplaçant dans le sens positif de l'axe. Quelle est la masse du bloc ?

1.2.6 ***Un pendule extraterrestre.*** Quel doit être le module du champ gravitationnel à la surface d'une planète pour que les pendules oscillent deux fois plus rapidement que sur Terre ?

SÉRIE PRINCIPALE

1.2.7 ***La longueur de la corde.*** La bille d'un pendule simple prend 0,2 s pour passer de sa position la plus haute à sa position la plus basse. Quelle est la longueur de la corde ?

1.2.8 ***Deux oscillations horizontales côte à côte.*** Deux blocs de 0,5 kg oscillent horizontalement sur une surface sans frottement au bout de deux ressorts identiques (k = 200 N/m) placés côte à côte, parallèlement à l'axe x. On tire sur chaque bloc afin d'étirer son ressort de 10 cm, puis on les lâche (vitesse initiale nulle) : le second bloc est lâché 1 s après le premier. **(a)** Déterminez la position et la vitesse selon x de chacun des blocs, 1 s après le départ du *second* bloc. (On suppose que x est positif quand le ressort est étiré, et négatif quand il est comprimé.) **(b)** À cet instant, dites si les blocs se rapprochent ou s'éloignent l'un de l'autre et calculez le module de leur vitesse relative.

1.2.9 ***Sur une autre planète.*** Sur Terre, un système bloc-ressort et un pendule ont la même période. On déménage les deux systèmes sur une autre planète et on observe que le pendule fait 17 oscillations complètes pendant que le système bloc-ressort fait 13 oscillations complètes. Quel est le module du champ gravitationnel à la surface de la planète ?

1.2.10 ***Un pendule de longueur variable.*** Considérez un pendule dont on peut faire varier la longueur de la corde. Pour chaque essai, on le lâche (vitesse initiale nulle) alors que la corde fait un angle de 5° avec la verticale. **(a)** Lorsqu'on augmente la longueur de la corde, la vitesse du pendule lorsqu'il passe au point le plus bas de sa trajectoire augmente-t-elle, diminue-t-elle ou demeure-t-elle inchangée ? **(b)** Calculez la vitesse en question pour m = 2 kg, L = 3 m (essai 1) et L = 4 m (essai 2).

SÉRIE SUPPLÉMENTAIRE

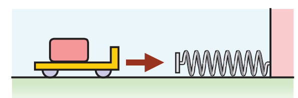
○ **1.2.11** ***Quels sont les MHS ?*** Une particule se déplace le long de l'axe x sous l'effet d'une force F_x. Pour chacune des expressions suivantes, dites si la particule possède un MHS (A et B sont des constantes positives) : **(a)** $F_x = -AB$; **(b)** $F_x = -(A + B)x$; **(c)** $F_x = Ax$; **(d)** $F_x = -Ax/B$; **(e)** $F_x = -Bx^2$.

1.2.12 ***Un pour cent plus lent.*** Quel doit être le pourcentage d'augmentation de la longueur de la corde d'un pendule pour que la période augmente de 1 % ?

1.2.13 ***Un très long pendule.*** À 170 m du sol, entre les deux tours Petronas, à Kuala Lumpur, en Malaisie, se trouve une passerelle (photo ci-dessous). Imaginons qu'on y a accroché un pendule de 100 kg qui peut osciller en rasant le sol. **(a)** Quel est le module de la force horizontale requise pour maintenir le pendule en équilibre avec la corde inclinée à 1° par rapport à la verticale ? **(b)** Si on lâche le pendule (vitesse initiale nulle) dans la situation décrite en (a), quelle sera sa vitesse au centre de l'oscillation ? **(c)** Quelle est la période d'oscillation du pendule ?

ISTOCKPHOTO

1.2.14 ***Un arrêt en douceur.*** Une brique de 500 g est posée dans un chariot de 300 g (schéma ci-contre). Il y a un coefficient de frottement statique de 0,8 entre la brique et le chariot. On lance le chariot à 1,5 m/s vers un ressort horizontal. (Le frottement entre la surface horizontale et le chariot est négligeable.) **(a)** Quel est le module maximal de l'accélération que le chariot peut subir sans que la brique glisse ? **(b)** Quelle doit être la constante de rappel du ressort pour que le chariot arrête le plus rapidement possible sans que la brique glisse ?



1.2.15 ***L'oscillation de l'eau dans un tube en U.*** Un tuyau de section A constante est replié en forme de U (schéma ci-contre) : la longueur du tuyau rempli d'eau est égale à L et la masse de l'eau est $m = \rho AL$, où ρ est la masse volumique de l'eau. En aspirant du côté droit, on fait monter la surface de l'eau d'une hauteur x par rapport à sa hauteur à l'équilibre. **(a)** Quelle est la masse de l'eau dans la zone hachurée sur le schéma ? **(b)** Quelle est la force *totale* qui a tendance à ramener l'eau dans le tube à la configuration d'équilibre initiale ? **(c)** Si on cesse l'aspiration, l'eau va se mettre à osciller : montrez qu'il s'agit d'un mouvement harmonique simple et calculez sa fréquence angulaire naturelle.