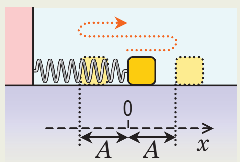
1.1

Les oscillations

Après l'étude de cette section, le lecteur pourra déterminer la position, la vitesse et l'accélération d'un objet qui oscille selon un mouvement harmonique simple.

Aperçu

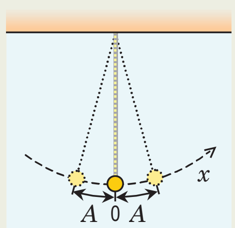
Lorsqu'une onde mécanique (par exemple, une vague ou une onde sonore) se déplace dans un milieu, les particules qui le composent effectuent un mouvement d'**oscillation** : leur position varie de manière périodique autour d'une position centrale. Ainsi, pour comprendre la physique des ondes, il faut d'abord étudier la physique des oscillations.



Lorsqu'un bloc est accroché à l'extrémité d'un ressort idéal dont l'autre extrémité est fixe et qu'il oscille sur une surface horizontale sans frottement (schéma ci-contre), il effectue un **mouvement harmonique simple (MHS)**. Cela signifie que sa position en fonction du temps peut être décrite à l'aide d'une fonction sinusoïdale :

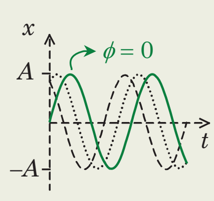
$$\boxed{x = A\sin(\omega t + \phi)}$$

Équation $x(t)$ pour un mouvement harmonique simple



Un **pendule simple** (petite bille suspendue à une corde ou une tige rigide de masse négligeable) qui oscille avec une amplitude relativement faible (en pratique, l'angle entre la corde et la verticale doit demeurer inférieur à 15°) effectue également un MHS (schéma ci-contre).

Dans l'équation du MHS, A représente l'**amplitude** de l'oscillation. La **phase** est l'argument de la fonction sinus (ici, $\omega t + \phi$) ; il est d'usage de l'exprimer en radians. Le paramètre ω (la lettre grecque oméga) est la **fréquence angulaire** : comme la phase est en radians et que le temps est en secondes, ω est en radians par seconde.



Le paramètre ϕ (la lettre grecque phi) est la **constante de phase** (en radians). Si, à t = 0, l'objet est à l'origine ($x = 0$) et se déplace dans le sens des x positifs, alors ϕ = 0 (schéma ci-contre). En donnant une valeur appropriée à ϕ, il est possible de décrire le MHS d'un objet qui débute son mouvement à n'importe quel endroit dans le cycle d'oscillation.

Les concepts de *période* et de *fréquence*, définis dans le **tome A** afin de décrire la rotation, servent également à décrire les oscillations. La période T est la durée d'un cycle d'oscillation : dans le SI, elle s'exprime en secondes.

La fréquence f est égale à l'inverse de la période :

$$f = \frac{1}{T}$$

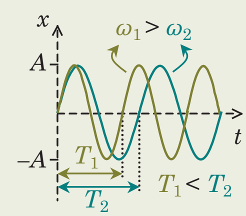
La fréquence s'exprime, dans le système international (SI), en hertz : 1 Hz = 1 s^{-1}. (Un hertz correspond à une oscillation par seconde.) La fréquence angulaire ω est égale à la fréquence « ordinaire » f multipliée par 2π :

$$\omega = 2\pi f$$

Comme $f = 1/T$,

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Relation entre la fréquence angulaire et la période



Plus la fréquence angulaire est grande, plus la période est petite (schéma ci-contre).

Lorsqu'un objet possède un MHS dont l'équation est

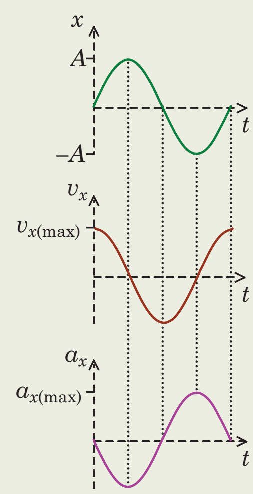
$$x = A\sin(\omega t + \phi)$$

les composantes selon x de sa vitesse et de son accélération sont

$$v_x = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \phi)$$

et

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi)$$



(schémas ci-contre). Chaque fois que l'objet passe par la position centrale de l'oscillation (x = 0), le module de sa vitesse est maximal :

$$\boxed{v_{\max} = A\omega}$$

Module maximal de la vitesse dans un MHS

Chaque fois que l'objet se trouve à une extrémité de son oscillation ($x = \pm A$), le module de son accélération est maximal :

$$\boxed{a_{\max} = A\omega^2}$$

Module maximal de l'accélération dans un MHS

En comparant les équations pour x et a_x, on obtient une relation importante qui caractérise tout MHS :

$$\boxed{a_x = -\omega^2 x}$$

Relation entre l'accélération et la position dans un MHS

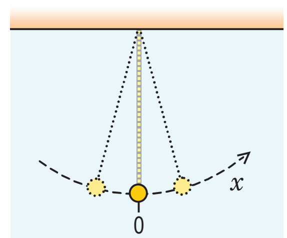
EXPOSÉ

La lumière *n'est pas* une onde mécanique : son comportement ondulatoire découle des propriétés des *photons*, les quantas qui la composent. Par conséquent, elle peut se propager dans le vide de l'espace interplanétaire (contrairement aux ondes mécaniques, comme le son).

Pour plus de détails sur la fonction sinusoïdale, consultez la **section M5 : Les fonctions trigonométriques** de l'annexe mathématique.

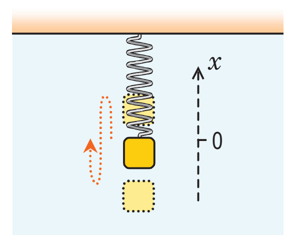
Dans le présent chapitre, nous allons amorcer l'étude des ondes en considérant des ondes *mécaniques* — des ondes qui ont besoin d'un milieu de propagation pour exister. Les vagues à la surface de l'eau, les ondes sonores et les ondes sur les cordes tendues sont des ondes mécaniques. Lorsqu'une onde mécanique se déplace dans un milieu, les particules qui constituent ce dernier subissent un mouvement d'**oscillation** : leur position varie de manière périodique autour d'une position centrale. Ainsi, avant d'aborder la physique des ondes, nous allons étudier les oscillations.

Nous allons surtout nous intéresser au mouvement d'oscillation le plus simple, pour lequel la position en fonction du temps peut être décrite par une fonction sinusoïdale : il s'agit du **mouvement harmonique simple (MHS)**. Dans la présente section, nous nous limiterons à *décrire* le MHS : nous allons faire de la cinématique. Nous analyserons le MHS du point de vue des forces et de l'énergie dans les sections subséquentes, avant d'aborder l'étude des ondes à proprement parler dans la **section 1.8 : Les ondes mécaniques progressives**.



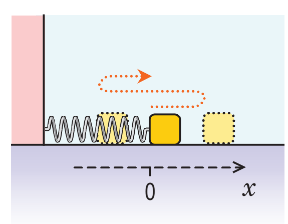
Le mouvement d'un **pendule simple** (une petite « bille » oscillant au bout d'une corde ou d'une tige rigide de masse négligeable) est un exemple bien connu d'oscillation. Comme nous l'avons mentionné dans le **tome A**, c'est en observant l'oscillation d'un lustre dans la cathédrale de Pise que Galilée, alors qu'il était encore étudiant, s'est mis à s'intéresser à la physique. Pour étudier l'oscillation d'un pendule, on peut définir un axe x courbe qui suit la trajectoire de la bille et dont l'origine correspond au point le plus bas de l'oscillation (schéma ci-dessus). La position de la bille en fonction du temps *ne correspond pas* tout à fait à une fonction sinusoïdale. Toutefois, lorsque l'angle maximal entre la corde et la verticale ne dépasse pas 15°, une fonction sinusoïdale peut être utilisée pour obtenir une très bonne approximation du mouvement : nous verrons pourquoi à la fin de la **section 1.2 : La dynamique du mouvement harmonique simple**.

Nous verrons comment analyser le système bloc-ressort vertical du point de vue des forces et de l'énergie dans la **section 1.6 : L'oscillation verticale d'un système bloc-ressort**.



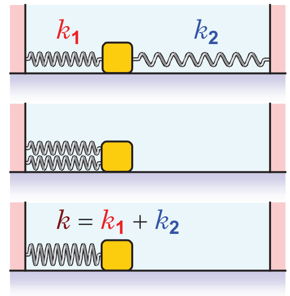
Dans le **chapitre 2 : Dynamique** du **tome A**, nous avons vu qu'un ressort idéal obéit à la loi de Hooke : le module de la force qu'il exerce est proportionnel à son étirement par rapport à sa longueur naturelle. Lorsqu'un bloc attaché à un ressort idéal dont l'autre extrémité est fixe oscille verticalement (schéma ci-contre), sa position en fonction du temps peut être décrite *parfaitement* par une fonction sinusoïdale : l'oscillation verticale d'un système bloc-ressort est un mouvement harmonique simple. Pour décrire la position du bloc, on peut définir un axe x vertical dont l'origine correspond au centre de l'oscillation, c'est-à-dire l'endroit où le bloc peut demeurer en équilibre statique. Malheureusement, le système bloc-ressort vertical est relativement difficile à analyser du point de vue des forces et de l'énergie, car la force résultante que subit le bloc est la somme de son poids et de la force exercée par le ressort.

Dans la **section 1.2 : La dynamique du mouvement harmonique simple**, nous démontrerons qu'un objet est animé d'un MHS lorsqu'il subit une force qui a tendance à le ramener vers une position d'équilibre et que le module de la force est proportionnel à la distance qui le sépare de la position d'équilibre (comme c'est le cas pour un système bloc-ressort).



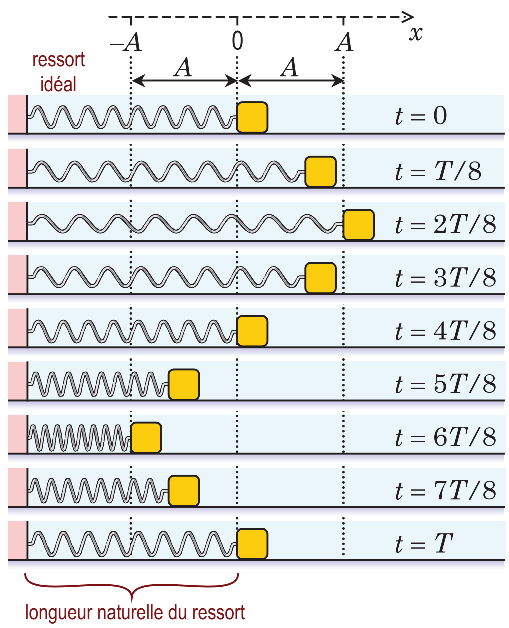
Le système le plus simple à analyser qui possède un mouvement harmonique simple consiste en un bloc accroché à un ressort oscillant à l'horizontale sur une surface sans frottement (schéma ci-contre) : c'est celui que nous allons utiliser pour présenter les caractéristiques générales du MHS. Selon la direction verticale, la force normale exercée par la surface contrebalance le poids du bloc : ainsi, la force résultante subie par le bloc correspond directement à la force exercée par le ressort.

Lorsqu'un système bloc-ressort oscille à la verticale, il arrive souvent que le poids du bloc fasse en sorte que le ressort soit plus long que sa longueur naturelle pendant toute l'oscillation. En revanche, lorsque l'oscillation est horizontale, le ressort est plus court que sa longueur naturelle (c'est-à-dire comprimé) pendant la moitié de l'oscillation. Or, en pratique, les ressorts qui obéissent à la loi de Hooke en compression sont rares. Pour étudier, en laboratoire, un système bloc-ressort en oscillation horizontale, il est préférable de placer le bloc entre *deux* ressorts étirés (schéma ci-contre, en haut) : il est possible de montrer que ceux-ci se comportent comme un ressort unique dont la constante de rappel est égale à la somme de leurs constantes de rappel (schéma ci-contre, en bas).



L'amplitude et la fréquence angulaire

Sur le schéma ci-contre, nous avons représenté l'oscillation d'un système bloc-ressort sur une surface horizontale sans frottement. Nous avons défini un axe x parallèle au mouvement dont l'origine coïncide avec la position centrale de l'oscillation. Lorsque $x = 0$, le ressort est à sa longueur naturelle, c'est-à-dire qu'il n'est ni étiré ni comprimé. La force exercée par le ressort sur le bloc a tendance à le ramener vers $x = 0$. Si on donne un élan au bloc et qu'on le laisse aller, il va osciller indéfiniment, car il n'y a pas de frottement.



Dans le **tome A**, nous avons utilisé les concepts de *période* et de *fréquence* pour décrire le mouvement d'une particule le long d'une trajectoire circulaire et le mouvement de rotation d'un objet sur lui-même. Ils peuvent également servir à décrire les oscillations et les ondes.

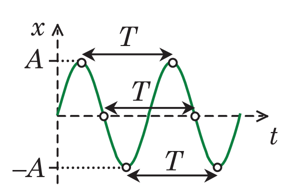
La période (symbole : T) correspond à la durée d'un cycle d'oscillation : dans le SI (système international), elle s'exprime en secondes. La fréquence (symbole : f) est l'inverse de la période :

$$f = \frac{1}{T}$$

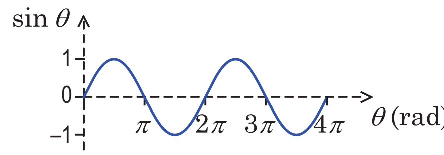
Dans le SI, la fréquence s'exprime en hertz : 1 Hz = 1 s^{-1}. Un objet qui oscille à la fréquence de N Hz effectue N oscillations par seconde.

Le schéma ci-dessus couvre une période complète de l'oscillation : entre deux images successives, il s'écoule un huitième de période. Les positions extrêmes de l'oscillation sont $x = A$ et $x = -A$. On donne le nom d'**amplitude** au paramètre A : l'amplitude d'une oscillation est la distance entre les positions extrêmes et la position centrale.

Sur le schéma ci-contre, nous avons tracé le graphique de la position en fonction du temps qui représente l'oscillation du système bloc-ressort et nous avons indiqué trois façons équivalentes de mesurer la période T.



Comme le graphique $x(t)$ a la même forme que le graphique de la fonction sinus (schéma ci-contre), nous sommes bien en présence d'un mouvement harmonique simple.

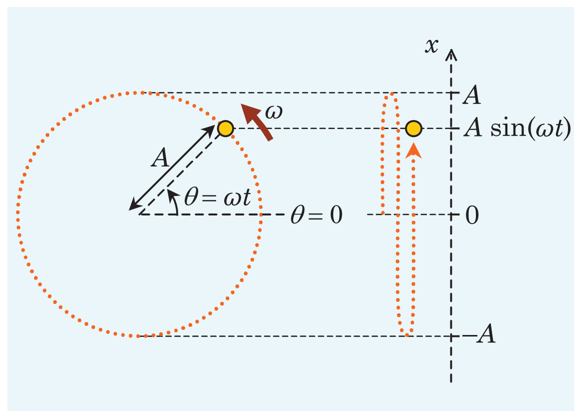


Quelle est l'équation qui décrit le graphique $x(t)$? Comme la valeur de la fonction sinus oscille entre 1 et –1 et que nous voulons que x oscille entre A et $-A$, il faut multiplier le sinus par A :

$$x = A\sin(\omega t)$$

On donne le nom de **phase** à l'*argument* de la fonction sinus (c'est-à-dire tout ce qui se trouve à l'intérieur de la parenthèse). La phase d'une fonction sinus doit correspondre à un angle : en physique des oscillations et des ondes, il est d'usage de l'exprimer en radians. C'est pour cela que la phase doit comporter une constante ω (la lettre grecque oméga) : comme t est en secondes (dans le SI), ω est en radians par seconde (rad/s). Dans le **tome A**, à la **section 4.1 : La cinématique de rotation**, nous avons déjà rencontré un paramètre ω qui s'exprime en radians par seconde : la *vitesse angulaire*. Dans le contexte du MHS, ω s'appelle la **fréquence angulaire**.

Il existe une correspondance étroite entre la vitesse angulaire et la fréquence angulaire : la projection le long d'un axe d'un mouvement circulaire uniforme (MCU) dont la *vitesse angulaire* est ω correspond à un MHS dont la *fréquence angulaire* est ω. Considérons un objet animé d'un MCU (schéma ci-contre) : il tourne sur un cercle de rayon A avec une vitesse angulaire constante ω. Si l'objet est à la position angulaire $\theta = 0$ à $t = 0$, l'angle θ en fonction du temps est

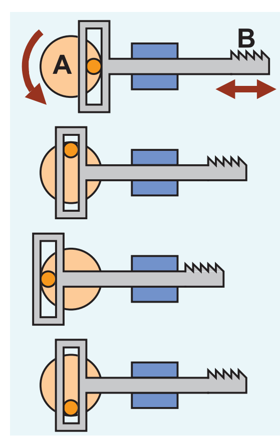


$$\theta = \omega t$$

La *projection* du mouvement le long de l'axe vertical correspond à $A\sin(\omega t)$: il s'agit d'un MHS. La *vitesse angulaire* du mouvement de rotation est égale à la *fréquence angulaire* du mouvement harmonique simple.

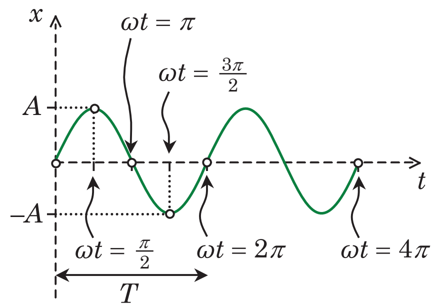
Dans plusieurs machines (par exemple, les scies sauteuses — photo ci-contre), il existe des dispositifs qui transforment le mouvement circulaire généré par un moteur en mouvement harmonique simple. Le schéma ci-contre illustre un dispositif de ce type : chaque fois que la pièce circulaire **A** fait un tour, la pièce **B**, en forme de clef, effectue un cycle d'oscillation. La vitesse angulaire de rotation de **A** est égale à la fréquence angulaire d'oscillation de **B**.

DREAMSTIME



La relation entre la fréquence angulaire et la période

Il existe une relation simple entre la fréquence angulaire ω et la période T d'un MHS. Pour la découvrir, nous allons examiner le graphique de la fonction $x = A\ \sin(\omega t)$, reproduit sur le schéma ci-dessous. (On suppose que A et ω représentent des valeurs positives.)



À $t = 0$, nous avons

$$x = A\ \sin(0) = 0$$

Lorsque la phase ωt est égale à $\frac{\pi}{2}$ rad,

$$x = A \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = A \times 1 = A$$

Pour d'autres valeurs de la phase, nous obtenons

$$\omega t = \pi \qquad \Rightarrow \qquad x = A\ \sin(\pi) = A \times 0 = 0$$

$$\omega t = \tfrac{3\pi}{2} \qquad \Rightarrow \qquad x = A\ \sin\left(\tfrac{3\pi}{2}\right) = A \times -1 = -A$$

$$\omega t = 2\pi \qquad \Rightarrow \qquad x = A\ \sin(2\pi) = A \times 0 = 0$$

Une période T après $t = 0$, lorsque $t = T$, la phase ωt est égale à 2π. Par conséquent,

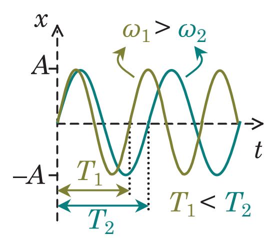
$$\omega T = 2\pi$$

d'où

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Relation entre la fréquence angulaire et la période

La fréquence angulaire est inversement proportionnelle à la période : plus la période est grande, plus la fréquence angulaire est petite (schéma ci-contre).



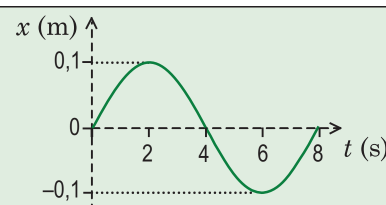
Si on compare l'équation $\omega = 2\pi/T$ avec la définition de la fréquence « ordinaire »,

$$f = \frac{1}{T}$$

on constate que la fréquence angulaire ω correspond à la fréquence f multipliée par 2π rad :

$$\omega = 2\pi f$$

Situation 1 : ***Du graphique à l'équation.*** Dans un système bloc-ressort, la position du bloc est donnée par le graphique ci-contre. On désire déterminer la valeur des paramètres qui permettent de décrire le mouvement du bloc à l'aide de la fonction $x = A\ \sin(\omega t)$.



Sur le graphique, nous pouvons lire directement $A = 0{,}1\ \text{m}$ et $T = 8\ \text{s}$, d'où

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{(8\ \text{s})} = \frac{\pi}{4}\text{rad/s} = 0{,}7854\ \text{rad/s}$$

L'équation du mouvement est

$$x = (0{,}1\ \text{m})\sin\left(\left(\frac{\pi}{4}\ \text{rad/s}\right)t\right)$$

Écrite sous cette forme, avec les unités physiques indiquées explicitement, l'équation est relativement lourde. Dans cet ouvrage, nous allons préférer écrire les équations du MHS sans unités physiques, quitte à préciser les unités dans une phrase accompagnant l'équation. Par exemple, ici, nous pouvons écrire

$$\boxed{x = 0{,}1\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right)}$$

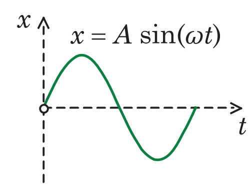
et préciser « où x est en mètres, t est en secondes et la phase est en radians ».

Vérifions que l'équation est correcte : à $t = 2$ s,

$$x = 0{,}1\sin\left(\frac{\pi}{4}\times 2\right) = 0{,}1\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0{,}1\times 1 = 0{,}1\ \text{m}$$

ce qui correspond bien à ce qu'on peut lire sur le graphique.

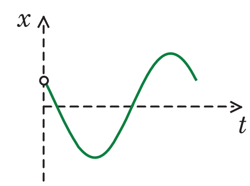
La constante de phase



À $t = 0$, un objet dont la position est donnée par

$$x = A\ \sin(\omega t)$$

est situé en $x = 0$ et il se déplace dans le sens positif de l'axe x (schéma ci-contre). Comment décrire le mouvement lorsque *ce n'est pas* le cas ?



Considérons, par exemple, la situation qui correspond au graphique $x(t)$ représenté sur le schéma ci-contre : à $t = 0$, l'objet est à mi-chemin entre $x = 0$ et sa position positive maximale, et il se déplace dans le sens négatif de l'axe x. Quelle est la fonction qui décrit ce mouvement ?

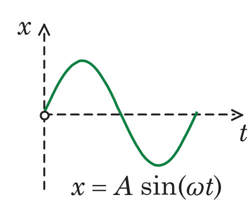
Une approche possible consiste à modifier le choix de l'instant $t = 0$ afin de le faire correspondre à l'instant où l'objet est à $x = 0$ et où il se déplace dans le sens positif de l'axe x : cela fait disparaître le problème ! Toutefois, en physique des ondes, on désire parfois décrire simultanément plusieurs oscillations non synchronisées. Dans ce cas, on n'a pas le choix : on doit être en mesure de décrire une oscillation qui commence à n'importe quelle phase dans le cycle de la fonction sinus. Pour ce faire, il faut introduire une **constante de phase** (symbole : ϕ) à l'intérieur de la phase :

$$\boxed{x = A\sin(\omega t + \phi)}$$

Équation $x(t)$ pour un mouvement harmonique simple

Cette équation générale permet de décrire *n'importe quel* MHS dont la position centrale d'oscillation correspond à $x = 0$. Comme la phase du sinus (ce qui se trouve à l'intérieur de la parenthèse) est en radians, la constante de phase ϕ est également en radians.

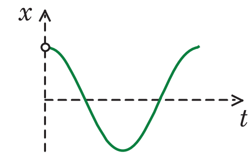
Afin de comprendre la signification de la constante de phase, nous allons considérer quatre situations : $\phi = 0$, $\phi = \pi/2$ rad, $\phi = \pi$ rad et $\phi = 3\pi/2$ rad. Lorsque $\phi = 0$, le graphique $x(t)$ est un « sinus non déphasé » (schéma ci-contre).



Lorsque $\phi = \pi/2$ rad, la position de l'objet à $t = 0$ est positive et maximale (schéma ci-contre) :

$$x = A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A\sin\left(\omega \times 0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= A\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = A \times 1 = A$$



$x = A\ \sin(\omega t + \pi/2)$

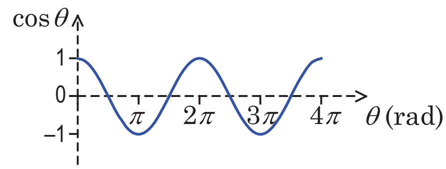
Ce graphique a la même forme que la fonction $\cos\theta$ (schéma ci-dessous). En effet, les équations

$$x = A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

et

$$x = A\cos(\omega t)$$

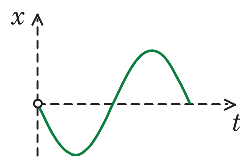
sont équivalentes.



Lorsque $\phi = \pi$ rad, l'objet est en $x = 0$ à $t = 0$, *mais il se déplace dans le sens négatif de l'axe* (schéma ci-contre). Le graphique a la même forme que la fonction $-\sin\theta$: les équations

$$x = A\sin(\omega t + \pi) \qquad \text{et} \qquad x = -A\sin(\omega t)$$

sont équivalentes.

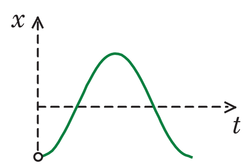


$x = A\ \sin(\omega t + \pi)$

Lorsque $\phi = 3\pi/2$ rad, la position de l'objet à $t = 0$ est négative et maximale en valeur absolue (schéma ci-contre) :

$$x = A\sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) = A\sin\left(\omega \times 0 + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$= A\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = A \times -1 = -A$$



$x = A\ \sin(\omega t + 3\pi/2)$

Le graphique a la même forme que la fonction $-\cos\theta$. Les équations

$$x = A\sin\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad x = -A\cos(\omega t)$$

sont équivalentes.

Comme nous pouvons le constater, en ajustant la valeur de la constante de phase ϕ, il est possible de décrire une oscillation qui commence (instant $t = 0$) à n'importe quelle phase de l'oscillation de la fonction sinus « de base » (non déphasée). Dans cette section, nous allons nous limiter à des situations où la constante de phase est égale à 0, $\pi/2$ rad, π rad ou $3\pi/2$ rad. À la **section 1.5 : Les fonctions trigonométriques inverses et le MHS**, nous étudierons des situations où ϕ peut prendre une valeur quelconque.

Situation 2 : *De l'équation au graphique.* La position d'un objet en fonction du temps est donnée par l'équation

$$x = 0{,}5\sin\left(0{,}982\, t + \frac{3\pi}{2}\right)$$

où x est en mètres, t est en secondes et la phase est en radians. On désire tracer le graphique $x(t)$ pour $0 \le t \le 10$ s.

Pour obtenir le graphique, on pourrait utiliser la « méthode brute » qui consiste à calculer x pour une série de valeurs de t également espacées (par exemple, pour t à chaque demi-seconde) et à tracer le graphique à partir de ces valeurs. Or, il est bien plus rapide d'utiliser une approche basée sur la théorie que nous venons de voir.

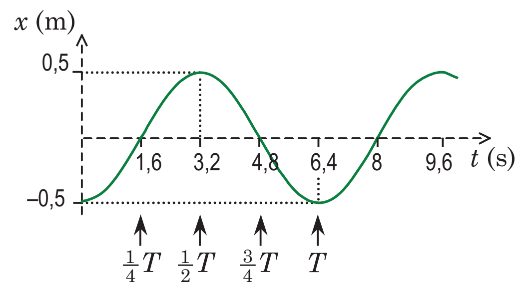
Par simple examen de la fonction, nous savons que $A = 0{,}5$ m et $\omega = 0{,}982$ rad/s. Sur le graphique, les valeurs extrêmes de x seront 0,5 m et −0,5 m. La période de l'oscillation est

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{(0{,}982 \text{ rad/s})} = 6{,}4 \text{ s}$$

À $t = 0$,

$$x = 0{,}5 \sin\left(0{,}982 \times 0 + \frac{3\pi}{2}\right) = 0{,}5 \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0{,}5 \times -1 = -0{,}5 \text{ m}$$

Par conséquent, l'oscillation commence (instant $t = 0$) à la position *négative* maximale (en valeur absolue). Pour tracer le graphique ci-contre, nous avons d'abord placé des points de repère tous les quarts de période. Ici, $T/4 = 1{,}6$ s ; entre $t = 0$ et $t = 10$ s, les multiples de 1,6 s sont 3,2 s ; 4,8 s ; 6,4 s ; 8 s et 9,6 s.

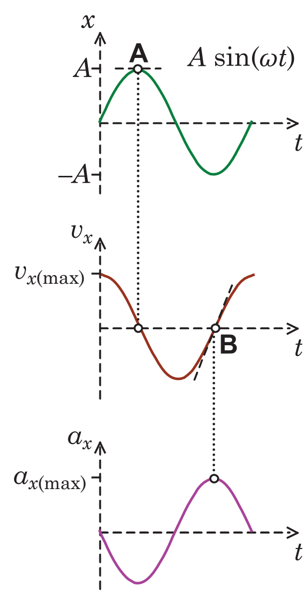


La vitesse et l'accélération dans un mouvement harmonique simple

Considérons un objet animé d'un MHS décrit par la fonction

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$

Comme nous l'avons vu dans le **chapitre 1 : Cinématique** du **tome A**, on obtient le graphique $v_x(t)$ en calculant *la pente de la tangente* en chaque point du graphique $x(t)$. De même, le graphique $a_x(t)$ s'obtient en calculant la pente de la tangente en chaque point du graphique $v_x(t)$. Sur le schéma ci-contre, nous avons représenté le graphique de la fonction $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ dans le cas particulier où $\phi = 0$, ainsi que les graphiques $v_x(t)$ et $a_x(t)$ correspondants. À l'instant **A**, la pente de la tangente du graphique $x(t)$ est nulle, ce qui correspond à $v_x = 0$; à l'instant **B**, la pente de la tangente du graphique $v_x(t)$ est positive et maximale, ce qui correspond à une valeur positive et maximale de a_x. Nous constatons que pour un graphique $x(t)$ qui correspond à une fonction *sinus* non déphasée, le graphique $v_x(t)$ est une fonction *cosinus* et le graphique $a_x(t)$ est une fonction *moins sinus* (sinus « inversé »).



Nous pouvons arriver à la même conclusion en utilisant les définitions de la vitesse et de l'accélération qui font appel à la notion de dérivée. La composante selon x de la vitesse d'un objet qui se déplace le long de l'axe x correspond à la dérivée de la position x par rapport au temps :

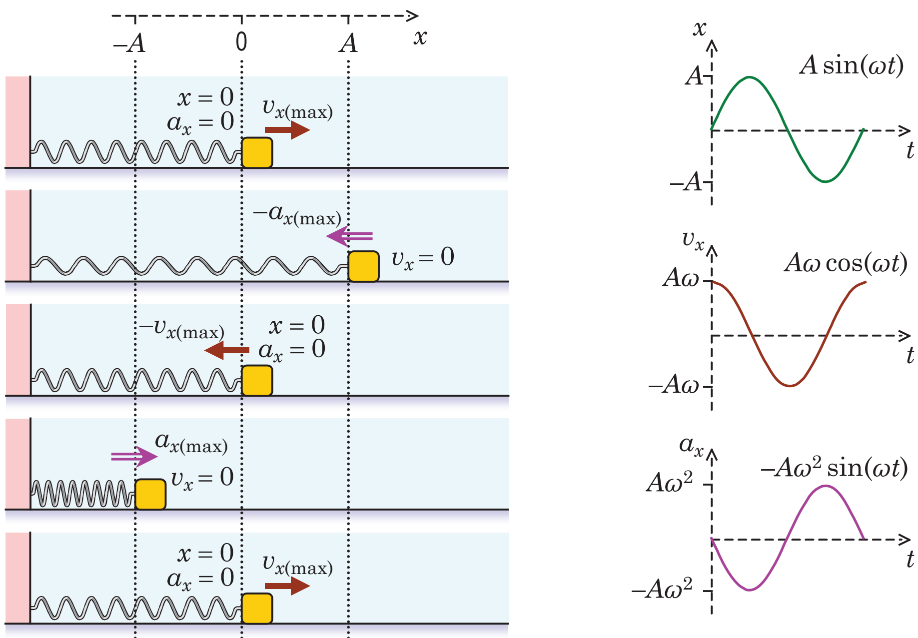
$$
\begin{aligned}
v_x &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A\sin(\omega t+\phi)] \\
&= A\,\omega\cos(\omega t+\phi)
\end{aligned}
$$

Pour obtenir le résultat ci-contre, nous avons utilisé **(i)** le fait que la dérivée d'une constante multipliée par une fonction est égale à la constante multipliée par la dérivée, et **(ii)** la règle de dérivation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sin(\omega t)=\omega\cos(\omega t)$, où ω est une constante (voir **section M10 : La dérivée** de l'annexe mathématique).

Lorsque le cosinus est égal à ±1, l'objet est animé d'une vitesse dont le module est maximal :

$$\boxed{v_{\max} = A\omega}$$ **Module maximal de la vitesse dans un MHS**

L'objet est animé d'une vitesse maximale chaque fois qu'il passe par $x = 0$, position centrale de l'oscillation (schémas ci-dessous). En effet, quand le cosinus est égal à ±1, le sinus est égal à 0, d'où $x = A\sin(\omega t + \phi) = 0$.



La composante selon x de l'accélération d'un objet qui se déplace le long de l'axe x correspond à la dérivée de la vitesse v_x par rapport au temps :

$$
\begin{aligned}
a_x &= \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[A\omega\cos(\omega t+\phi)] \\
&= A\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\cos(\omega t+\phi)] \\
&= A\omega[-\omega\sin(\omega t+\phi)] \\
&= -A\omega^2\sin(\omega t+\phi)
\end{aligned}
$$

Pour obtenir le résultat ci-contre, nous avons utilisé la règle de dérivation $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\cos(\omega t)=-\omega\sin(\omega t)$.

Lorsque le sinus est égal à ±1, le module de l'accélération de l'objet est maximal :

$$\boxed{a_{\max} = A\omega^2}$$ **Module maximal de l'accélération dans un MHS**

Lorsque $\sin(\omega t + \phi) = 1$, la position x est *positive* et maximale, et l'accélération a_x est *négative* et maximale. Lorsque $\sin(\omega t + \phi) = -1$, la position x est *négative* et maximale, et l'accélération a_x est *positive* et maximale, comme on peut le constater sur les schémas ci-dessus.

En comparant les équations

$$x = A\sin(\omega t + \phi) \qquad \text{et} \qquad a_x = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi)$$

nous constatons que

$$\boxed{a_x = -\omega^2 x}$$

Relation entre l'accélération et la position dans un MHS

Cette équation caractérise tout mouvement harmonique simple. Nous allons nous en servir dans la section suivante pour analyser la dynamique du MHS.

Situation 3 : *La vitesse et l'accélération dans un MHS.* La position d'un objet en fonction du temps est donnée par l'équation

$$x = 0{,}2\sin(3t + 5)$$

où x est en mètres, t est en secondes et la phase est en radians. On désire déterminer **(a)** le module de la vitesse maximale ; **(b)** le module de l'accélération maximale ; **(c)** l'accélération lorsque la position est de 0,1 m.

Par simple examen de l'équation, nous savons que $A = 0{,}2$ m et $\omega = 3$ rad/s. En **(a)**, nous voulons déterminer le module de la vitesse maximale de l'objet :

$$v_{\max} = A\omega = (0{,}2\ \text{m})(3\ \text{rad/s}) \quad\Rightarrow\quad \boxed{v_{\max} = 0{,}6\ \text{m/s}}$$

Pour plus de détails concernant la définition du radian, consultez la **sous-section M4.1 : Les angles** de l'annexe mathématique.

Comme nous avons effectué l'opération 0,2 m × 3 rad/s, la réponse devrait s'exprimer en radians-mètres par seconde : rad·m/s. Toutefois, comme nous l'avons mentionné dans le **tome A**, à la **section 4.1 : La cinématique de rotation**, la définition mathématique d'un angle en radians correspond au rapport entre la longueur de l'arc sous-tendu par l'angle et le rayon de courbure de l'arc : ce rapport de deux longueurs est une quantité sans unité. Ainsi, le radian n'est pas une véritable unité physique : il correspond plutôt à une « échelle » qui indique ce qu'on entend par un angle égal à « 1 ». C'est pour cela que le radian peut parfois « apparaître » ou « disparaître » lorsqu'il est combiné à d'autres unités physiques.

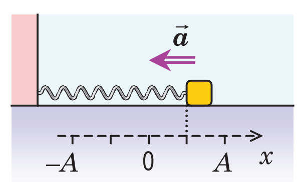
En **(b)**, nous voulons déterminer le module de l'accélération maximale de l'objet :

$$a_{\max} = A\omega^2 = (0{,}2\ \text{m})(3\ \text{rad/s})^2 \quad\Rightarrow\quad \boxed{a_{\max} = 1{,}8\ \text{m/s}^2}$$

En **(c)**, nous voulons déterminer l'accélération lorsque $x = 0{,}1$ m :

$$a_x = -\omega^2 x = -(3\ \text{rad/s})^2(0{,}1\ \text{m}) \quad\Rightarrow\quad \boxed{a_x = -0{,}9\ \text{m/s}^2}$$

Comme a_x est négatif, l'accélération est orientée dans le sens négatif de l'axe x (schéma ci-contre). Par conséquent, lorsque l'objet passe par $x = 0{,}1$ m en se déplaçant dans le sens positif de l'axe, il *ralentit* ; lorsqu'il passe par $x = 0{,}1$ m en se déplaçant dans le sens négatif de l'axe, il va *de plus en plus vite*.



Situation 4 : *La vitesse et l'accélération dans un MHS, prise 2.* La position d'un objet en fonction du temps est donnée par l'équation

$$x = 0{,}2\cos(3t + 5)$$

où x est en mètres, t est en secondes et la phase est en radians. On désire déterminer la position, la vitesse et l'accélération de l'objet à $t = 5$ s.

D'après l'énoncé, la position en fonction du temps est

$$x = 0{,}2\cos(3t + 5)$$

La vitesse en fonction du temps est

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 0{,}2\,\frac{d}{dt}\cos(3t + 5) = 0{,}2 \times -3\sin(3t + 5) = -0{,}6\sin(3t + 5)$$

L'accélération en fonction du temps est

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -0{,}6\,\frac{d}{dt}\sin(3t + 5) = -0{,}6 \times 3\cos(3t + 5) = -1{,}8\cos(3t + 5)$$

En remplaçant $t = 5\ \text{s}$ dans ces équations, nous obtenons

$$x = 0{,}2\cos\left[(3 \times 5) + 5\right] = 0{,}2\cos(20) = 0{,}2 \times 0{,}408 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 0{,}0816\ \text{m}}$$

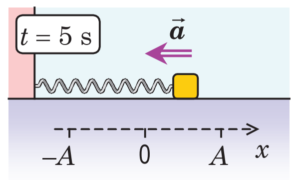
$$v_x = -0{,}6\sin(20) = -0{,}6 \times 0{,}913 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_x = -0{,}548\ \text{m/s}}$$

$$a_x = -1{,}8\cos(20) = -1{,}8 \times 0{,}408 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_x = -0{,}734\ \text{m/s}^2}$$

Il ne faut pas oublier de régler la calculatrice en mode *radians* !

Évidemment, nous pouvons obtenir la même accélération par l'équation $a_x = -\omega^2 x$:

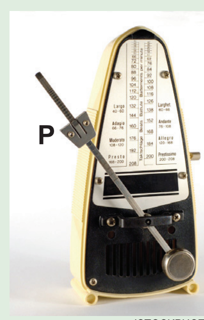
$$a_x = -\left(3\ \text{rad/s}\right)^2\left(0{,}0816\ \text{m}\right) = -0{,}734\ \text{m/s}^2$$



Nous avons représenté la situation sur le schéma ci-contre : la position x est positive et la composante selon x de l'accélération est négative.

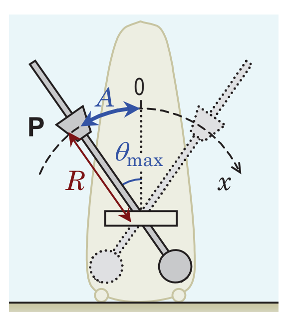
Pour terminer cette section, nous allons analyser le MHS du poids fixé à la tige d'un métronome. Pendant l'oscillation, le poids se déplace le long d'un arc de cercle. En définissant un axe x courbe qui suit cet arc, il est possible d'utiliser l'équation $x = A\sin(\omega t + \phi)$ — ainsi que le reste de la théorie de cette section — pour analyser l'oscillation.

Situation 5 : *Le métronome.* Un métronome (photo ci-contre) est un appareil servant à marquer le rythme qui est très utile pour les apprentis musiciens. Il produit un *clic* chaque fois que la tige atteint une des extrémités de son oscillation : en réglant la position du poids **P**, on peut ajuster la fréquence des clics. Sachant que le métronome produit 120 clics par *minute* et que l'inclinaison maximale de la tige par rapport à la verticale est de 35°, on désire déterminer le module de la vitesse du poids **P**, situé à 10 cm du pivot, lorsque la tige passe à la verticale. (On suppose que le poids **P** effectue un MHS le long de l'axe courbe qui suit sa trajectoire.)



ISTOCKPHOTO

Nous avons représenté la situation sur le schéma ci-contre. L'axe courbe x qui suit la trajectoire du poids **P** est un arc de cercle de rayon $R = 10\ \text{cm}$.



Lorsque la tige est verticale, le poids **P** passe par le centre de l'oscillation et le module de sa vitesse est maximal :

$$v = v_{max} = A\omega$$

Nous savons qu'aux extrémités de l'oscillation, l'angle entre la tige du métronome et la verticale est $\theta_{max} = 35°$. Pour déterminer l'amplitude A de l'oscillation, nous pouvons utiliser le fait que la valeur d'un angle, exprimée en radians, correspond, par définition, à la longueur de l'arc de cercle sous-tendu par l'angle divisé par le rayon du cercle :

$$\theta_{max} = \frac{A}{R}$$

En radians, l'angle maximal est

$$\theta_{max} = 35° \times \frac{2\pi \text{ rad}}{360°} = 0{,}6109 \text{ rad}$$

Ainsi,

$$A = R\theta_{max} = (0{,}1 \text{ m})(0{,}6109 \text{ rad}) = 0{,}06109 \text{ m}$$

D'après l'énoncé, le métronome génère 120 clics en 60 s. Ainsi, l'intervalle de temps entre deux clics est $(60 \text{ s})/120 = 0{,}5$ s. Comme un clic est généré chaque fois que la tige est à une des extrémités de son oscillation, la période complète de l'oscillation est deux fois plus grande :

$$T = 2 \times (0{,}5 \text{ s}) = 1 \text{ s}$$

La fréquence angulaire est

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{(1 \text{ s})} = 2\pi \text{ rad/s}$$

et le module de la vitesse du poids **P** lorsque la tige est verticale est

$$v = v_{max} = A\omega = (0{,}06109 \text{ m})(2\pi \text{ rad/s}) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v = 0{,}384 \text{ m/s}}$$

GLOSSAIRE

Le glossaire présente les définitions des **termes en gras** introduits dans la section.

amplitude : (symbole : A) différence entre la valeur maximale et la valeur centrale d'une oscillation.

constante de phase : (symbole : ϕ, la lettre grecque phi) paramètre que l'on retrouve dans la phase de la fonction du mouvement harmonique simple et qui permet de décrire une oscillation qui commence (instant $t = 0$) à n'importe quelle phase ; unité SI : rad.

fréquence angulaire : (symbole : ω, la lettre grecque oméga) paramètre qui exprime la rapidité d'une oscillation ; plus la fréquence angulaire est élevée, plus la période est courte ; la fréquence angulaire est égale à la fréquence « ordinaire » f multipliée par 2π rad ; unité SI : rad/s.

mouvement harmonique simple (MHS) : mouvement d'oscillation pour lequel la position en fonction du temps peut être décrite à l'aide d'une fonction sinusoïdale.

oscillation : variation répétitive de la valeur d'une certaine propriété autour d'une valeur centrale.

pendule simple : bille de taille négligeable suspendue à une corde ou à une tige rigide de masse négligeable dont l'autre extrémité est fixe.

phase : argument d'une fonction trigonométrique (ce qui se trouve à l'intérieur de la parenthèse) ; exprimée en radians.

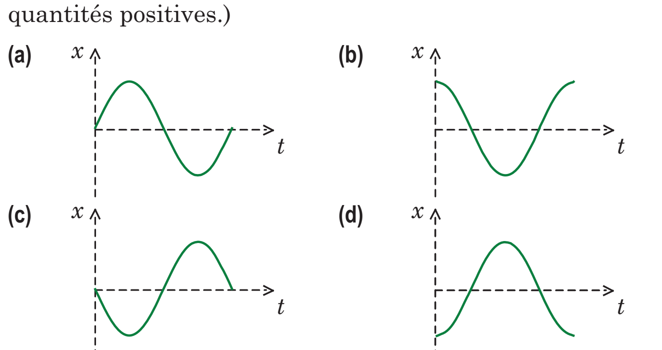
QUESTIONS

Les questions sont conçues pour permettre au lecteur de réviser la matière présentée dans la section et de s'assurer de bien la maîtriser avant de se lancer dans la résolution des exercices. Les réponses aux questions *ne sont pas* fournies en annexe, car on peut les trouver facilement en lisant le texte de la section.

Q1. (a) Quel paramètre de la cinématique de rotation s'exprime à l'aide des mêmes unités que la fréquence angulaire ? **(b)** Expliquez, à l'aide d'un dessin, le parallèle qui existe entre le mouvement circulaire uniforme et le mouvement harmonique simple.

Q2. Donnez la relation entre **(a)** la fréquence angulaire et la période ; **(b)** la fréquence et la période ; **(c)** la fréquence angulaire et la fréquence.

Q3. Associez chacun des schémas ci-dessous à une des fonctions suivantes : $x = A \sin(\omega t)$, $x = -A \sin(\omega t)$, $x = A \cos(\omega t)$ et $x = -A \cos(\omega t)$. (Les paramètres A et ω représentent des quantités positives.)



Q4. Lorsque la fonction $x(t)$ a la forme d'un sinus, la fonction $v_x(t)$ a la forme d'un __________ et la fonction $a_x(t)$ a la forme d'un __________.

Q5. La dérivée par rapport au temps de la position correspond à __________ ; la dérivée par rapport au temps de la vitesse correspond à __________.

Q6. (a) Un objet animé d'un MHS possède une vitesse de module maximal à quel(s) endroit(s) de son oscillation ? **(b)** Même question pour le module de l'*accélération* maximale.

Q7. Pour un MHS d'amplitude A et de fréquence angulaire ω, le module de la vitesse maximale est égal à ______ et le module de l'accélération maximale est égal à ______.

Q8. Vrai ou faux ? Dans un MHS, le signe de l'accélération a_x est toujours l'opposé du signe de la position x.

Q9. Vrai ou faux ? Comme la bille d'un pendule ou le poids d'un métronome se déplacent selon des trajectoires en forme d'arc de cercle, il est impossible de décrire leur oscillation à l'aide de l'équation $x(t)$ du mouvement harmonique simple.

DÉMONSTRATIONS

D1. À partir de l'équation qui décrit la position en fonction du temps pour un MHS, démontrez les relations $v_{max} = A\omega$ et $a_{max} = A\omega^2$.

D2. À partir de l'équation qui décrit la position en fonction du temps pour un MHS, montrez que la position, l'accélération et la fréquence angulaire obéissent à la relation

$$a_x = -\omega^2 x$$

EXERCICES

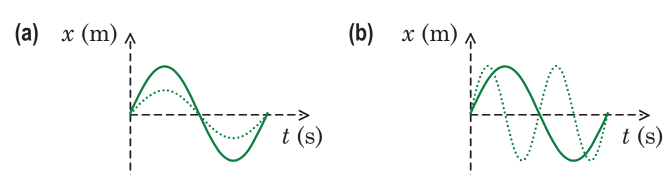
Les réponses aux exercices se trouvent en annexe à la fin du volume.

○ Exercice dont la solution ne requiert ni calculatrice, ni algèbre complexe.

Dans les exercices, lorsqu'on spécifie l'équation $x(t)$ d'un MHS à l'aide de valeurs numériques, x est en mètres, t est en secondes et la phase est en radians.

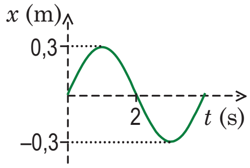
RÉCHAUFFEMENT

○ **1.1.1** ***Trouvez la différence.*** Sur chacun des schémas ci-dessous, on a représenté deux mouvements harmoniques simples. Dans chaque cas, trouvez quel paramètre du MHS diffère entre les deux courbes, et dites pour quelle courbe (en trait plein ou en pointillés) ce paramètre est plus grand.

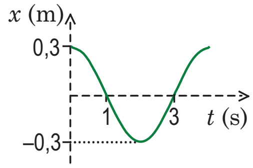


1.1.2 ***Des graphiques aux équations.*** Pour chacun des graphiques ci-dessous, écrivez l'équation du MHS sous la forme $x = A\sin(\omega t + \phi)$, avec x en mètres, t en secondes, $A > 0$, $\omega > 0$ et $0 \leq \phi < 2\pi$ rad.

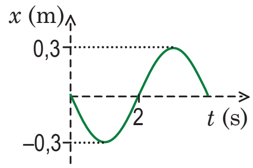
(a)



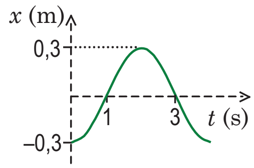
(b)



(c)



(d)



1.1.3 ***La forme usuelle.*** Exprimez les équations suivantes sous la forme usuelle $x = A\sin(\omega t + \phi)$, avec $0 \leq \phi \leq 2\pi$ rad : **(a)** $x = -A\sin(\omega t)$; **(b)** $x = A\cos(\omega t)$; **(c)** $x = -A\cos(\omega t)$.

1.1.4 ***La vitesse et l'accélération dans un MHS.*** La position en fonction du temps d'un objet est

$$x = 0{,}1\sin(4t)$$

Calculez **(a)** le module de la vitesse maximale ; **(b)** le module de l'accélération maximale ; **(c)** l'accélération a_x lorsque la position x est de 0,08 m ; **(d)** la vitesse v_x à $t = 3$ s ; **(e)** l'accélération a_x à $t = 3$ s.

1.1.5 ***La comparaison des vitesses.*** Les particules **A** et **B** possèdent toutes deux un MHS : celui de **B** a une amplitude deux fois plus grande et une période deux fois plus petite que celui de **A**. Si la particule **A** se déplace à 1 m/s à la position centrale de son oscillation, quel est le module de la vitesse de **B** à la position centrale de son oscillation ?

SÉRIE PRINCIPALE

1.1.6 ***MHS ou pas ?*** Dites si chacune des oscillations suivantes est un mouvement harmonique simple. **(a)** Un soldat fait le va-et-vient devant l'entrée de sa base : la durée de chaque demi-tour est négligeable et il marche à vitesse constante. **(b)** Une « super-balle » rebondit plusieurs fois sur le plancher, revenant chaque fois à sa hauteur initiale. **(c)** Un enfant saute sur un trampoline et cesse d'être en contact avec celui-ci pendant une partie de chaque oscillation.

1.1.7 ***De la position maximale à la position centrale.*** À $t = 0$, un bloc qui oscille à l'extrémité d'un ressort passe à sa position positive maximale. À $t = 2$ s, il passe pour la première fois à la position centrale de l'oscillation. Déterminez **(a)** la période ; **(b)** la fréquence ; **(c)** la fréquence angulaire.

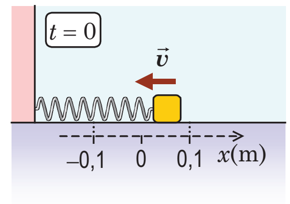
1.1.8 ***La période d'un MHS.*** Un objet est animé d'un MHS dont l'amplitude est de 30 cm. Lorsqu'il passe à la position centrale de l'oscillation, le module de sa vitesse est de 2 m/s. Combien de temps prend-il pour effectuer un cycle d'oscillation ?

1.1.9 ***De l'équation au graphique.*** La position d'un objet en fonction du temps est

$$x = 0{,}4\sin\left(1{,}2t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Tracez le graphique $x(t)$ pour $0 \leq t \leq 10$ s en indiquant la valeur de t chaque fois que la courbe coupe l'axe t.

1.1.10 ***Un MHS déphasé.*** Le MHS d'un bloc est décrit par



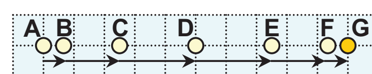
$$x = 0{,}1\sin(5t + \phi)$$

À $t = 0$, il est situé entre $x = 0$ et $x = 0{,}1$ m, et il se déplace dans le sens négatif de l'axe (schéma ci-contre). Choisissez la bonne réponse :

A. ϕ est compris entre 0 et $\pi/2$ rad.
B. ϕ est compris entre $\pi/2$ rad et π rad.
C. ϕ est compris entre π rad et $3\pi/2$ rad.
D. ϕ est compris entre $3\pi/2$ rad et 2π rad.

1.1.11 ***Le graphique et l'équation d'un MHS.*** Un bloc accroché à un ressort oscille sur une surface horizontale avec une période de 5 s. La distance entre les positions extrêmes de l'oscillation est de 50 cm. À $t = 0$, le ressort est à sa compression maximale. **(a)** Tracez au moins deux cycles du graphique $x(t)$ représentant ce mouvement, en graduant les axes afin d'indiquer clairement l'échelle du graphique. (On suppose que x est négatif lorsque le ressort est comprimé et que x est positif lorsque le ressort est étiré.) **(b)** Écrivez l'équation $x(t)$ du mouvement.

1.1.12 ***Sept instantanés d'un MHS.*** Sur le schéma ci-contre, nous avons représenté sept positions successives d'une particule qui possède un MHS. Chaque carré mesure 10 cm de côté et l'intervalle de temps entre deux images successives est de 0,1 s. La particule est momentanément arrêtée aux positions extrêmes **A** et **G**. Quel est le module de sa vitesse instantanée au point **D** ?



1.1.13 ***La tour infernale.*** Par une journée de grand vent, un gratte-ciel de 400 m de hauteur oscille de manière appréciable. Un accéléromètre placé en haut de la tour indique que le module de l'accélération causée par l'oscillation atteint une valeur maximale de 0,345 m/s^2 à intervalles réguliers de 5,94 s. Déterminez **(a)** l'amplitude de l'oscillation du sommet de la tour et **(b)** l'angle d'inclinaison de la tour par rapport à la verticale aux extrémités de l'oscillation, en supposant de manière irréaliste qu'elle oscille sans plier (c'est-à-dire qu'elle demeure rectiligne de sa base à son sommet).

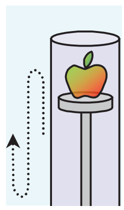
SÉRIE SUPPLÉMENTAIRE

1.1.14 ***La vitesse et l'accélération dans un MHS, prise 2.*** Reprenez l'**exercice 1.1.4** en considérant cette fois que la position de l'objet est $x = -0{,}5\cos(2t + 5)$.

1.1.15 ***L'oscillation d'un haut-parleur.*** Un haut-parleur (image ci-contre) est branché à un générateur de fonctions qui l'alimente avec un signal sinusoïdal. Le centre du haut-parleur oscille selon un MHS avec une vitesse maximale de 6 cm/s et une accélération maximale de 360 m/s^2. **(a)** Quelle est l'amplitude de l'oscillation du centre du haut-parleur ? **(b)** Quelle est la fréquence du son émis par le haut-parleur ?

ISTOCKPHOTO

1.1.16 ***Une pomme secouée.*** Une pomme est déposée sur un piston qui oscille verticalement selon un MHS dont l'amplitude est de 20 cm (schéma ci-contre). On augmente graduellement la fréquence angulaire de l'oscillation : à partir d'une certaine fréquence angulaire critique, on observe que la pomme cesse d'être en contact avec le piston au point le plus haut de l'oscillation. **(a)** Dans les phases du mouvement pour lesquelles l'accélération de la pomme est orientée vers le bas, quel est le module maximal qu'elle peut posséder ? (*Indice* : lorsque l'accélération est orientée vers le bas, elle est causée par le poids de la pomme, puisque celle-ci n'est pas collée au piston.) **(b)** Calculez la fréquence angulaire critique à partir de laquelle la pomme cesse d'être en contact avec le piston.



1.1.17 ***Le jerk d'un MHS.*** Considérez un objet dont la position en fonction du temps est

$$x = 0{,}4\cos(3t + 2)$$

(a) Le *jerk* est défini comme la dérivée de l'accélération par rapport au temps ; quelles sont ses unités SI ? **(b)** Calculez le jerk de l'objet à $t = 0$.

1.1.18 ***Le retour du coefficient de frottement statique.*** Afin de déterminer le coefficient de frottement statique μ_s entre un bloc de bois de masse m et une planche de bois, on place le bloc sur la planche et on fait osciller la planche horizontalement selon un MHS de période T. On observe que le bloc se met à glisser lorsque l'amplitude dépasse une valeur A. Trouvez une expression qui permet de calculer μ_s en fonction des paramètres de l'énoncé. (Vous pouvez inclure, au besoin, le module g du champ gravitationnel.)